

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Д. Породников

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

(курс лекций для экономических специальностей)

*Утверждено
на заседании кафедры
математики и математических
методов в экономике*

Донецк 2000 г.



УДК 519.(022)

Породников В.Д.
Высшая математика

Настоящее пособие составлено в соответствии с программой курса “Математика для экономистов”. Его задачей является не только изложение основных сведений из высшей математики, и подготовка студентов к самостоятельной работе с математической литературой. Излагаются вопросы дифференциального и интегрального исчисления функций одного переменного, простейшие сведения о функциях многих переменных, дифференциальные уравнения и ряды и некоторые вопросы линейной алгебры.

Учебное пособие предназначено для студентов экономических специальностей.

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ	8
В В Е Д Е Н И Е	9
1. М Н О Ж Е С Т В А	10
2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ	10
3. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ	11

ГЛАВА I *ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ*

1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ	14
1.2. Расстояние между двумя точками на плоскости	15
1.3. Линия как множество точек	15
1.4. Прямые в R^2	16
1.4.1. Взаимное расположение двух прямых в R^2	17
2. Линии второго порядка	18
2.1. Окружность	18
2.2. Центральные кривые второго порядка	19
2.3. Кривые эллиптического и гиперболического типа	19
2.4. Фокальные свойства центральных кривых второго порядка	21
2.5. Асимптоты гиперболы	22
2.6. Нецентральные кривые второго порядка	22
2.7. Фокальное свойство параболы	23

ГЛАВА II *ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ*

1. СХОДИМОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ R^n	24
1.1. Окрестности и пределы последовательностей точек	24
1.2. Определение бесконечно малой последовательности	26
1.3. Сходимость последовательностей в пространстве	28
1.3.1. Различные типы множеств	30
2. Функция	33
2.1. Понятие функции	33

2.2. Способы задания функций.	35
2.3. Понятие функции нескольких переменных.	36
2.4. Неявные функции.	36
2.5. Сложные функции	36
2.6. Элементарные функции и их классификация	37
2.7. Трансцендентные функции.	38
3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ	38
3.1. Определение предела функции	38
3.2. Односторонние пределы функции	39
3.3. Свойства пределов функции	41
3.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	42
3.5. Свойства пределов функции	43
4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ	46
4.1. Точки непрерывности и точки разрыва функции	46
4.2. Основные теоремы о непрерывных функциях	48
5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	49
5.1. Производная функции в точке	49
6. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ	51
7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА	53
8. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ	55
8.1 Производная обратной функции	56
8.2. Производная и дифференциал сложной функции.	58
9. ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.	60
10. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ	61
10.1. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций	61
10.2. Возрастание и убывание функции одной переменной	65
10.3. Понятие о правиле Лопиталя	66
11. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА	68
11.1. Вывод формулы Тейлора для многочлена	68
11.2. Бином Ньютона	69
11.3. Формула Тейлора для функции	70
11.4. Экстремум функции одной переменной	71
12. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИИ	73
12.1. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба	73
12.2. Асимптоты	75
12.3. Построение графиков	76
13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ	78
13.1. Частные производные первого порядка	78
13.2. Геометрический смысл частных производных	79
13.3. Полный дифференциал функции	80

14. ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ПО ДАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ	83
14.1. Производная по направлению	83
14.2. Градиент и его свойства	84
14.3. Частные производные высших порядков	86
14.4. Признак полного дифференциала	86
15. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	87
15.1. Максимум и минимум функции нескольких переменных	87
15.2. Абсолютный экстремум	89
15.3. Метод наименьших квадратов	90

ГЛАВА III *ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ*

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА	92
1.1. Первообразная и неопределенный интеграл	92
1.1.2. Неопределенный интеграл	93
1.1.3. Основные свойства неопределенного интеграла	94
1.1.4. Таблица простейших неопределенных интегралов	95
2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ (ОСНОВНЫЕ)	96
2.1. Независимость вида неопределенного интеграла от выбора аргумента	96
2.2. Понятие об основных методах интегрирования	98
2.3. Интегрирование рациональных дробей с квадратным знаменателем	99
2.4. Интегрирование простейших иррациональностей	100
2.5. Интегрирование тригонометрических функций	101
2.6. Интегралы от некоторых трансцендентных функций	103
3. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИНТЕГРАЛАХ, НЕ ВЫРАЖАЮЩИХСЯ ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ	104
4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	105
4.1. Определение интеграла по Риману	105
4.2. Свойства определенного интеграла	106
4.3. Определенный интеграл с переменным верхним пределом	107
4.4. Формула Ньютона-Лейбница	108
4.5. Геометрический смысл определенного интеграла	109
4.6. Теорема о среднем для определенного интеграла	109
5. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА	110
5.1. Замена переменного	110
5.2. Интегрирование по частям	111
5.3. Приближенное вычисление определенного интеграла	111
5.4. Несобственные интегралы	113
6. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА	114
6.1. Площадь плоских фигур	114
6.2. Объем тела вращения	115

6.3. Длина дуги	116
6.4. Дифференциал дуги	117
7. ПОНЯТИЕ О КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ	118
7.1. Основные способы вычисления двойного интеграла	119
7.1.1. Вычисление площадей при помощи двойного интеграла	120
8. ПОНЯТИЕ О ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ	121

ГЛАВА IV *ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*

1. ПОНЯТИЕ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ	122
1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка	123
1.3. Уравнения первого порядка с разделяющимися переменными	123
1.4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка	124
1.5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка	125
2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА	127
2.1. Простые случаи уравнений второго порядка	127
2.2. Случаи понижения порядка	129
2.3. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	130

ГЛАВА V *РЯДЫ И ПОНЯТИЕ О СХОДИМОСТИ РЯДОВ*

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ	133
1.1. Определение ряда и его сходимость	133
1.2. Сходимость ряда (<i>свойства</i>)	135
1.3. Признак сравнения рядов	136
1.4. Признак сходимости Даламбера	138
1.5. Знакопеременные ряды и абсолютная сходимость	140
1.6. Признак сходимости Лейбница для знакопеременных рядов	141
2. ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДАХ	142
2.1. Степенные ряды	142
2.2. Разложение данной функции в ряд	144
2.3. Ряд Маклорена	145
2.4. Ряд Тейлора	146

ГЛАВА VI *ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА*

1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	148
1.1. Понятие о системах линейных уравнений	148

1.2. Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений со многими неизвестными.	149
2. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ	152
2.1. Вводные замечания	152
2.2. Операции над матрицами	153
2.3. Определитель	156
2.4. Основные свойства определителей	158
2.4.1. Свойства обратной матрицы	160
3. РАНГ МАТРИЦЫ	161

ГЛАВА VII ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО R^n	163
2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ	164
3. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ, ЗАДАННЫМИ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ	166
4. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ	167
5. СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ	167
6. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО СИСТЕМЕ ВЕКТОРОВ	169
7. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	171
8. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОРНИ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ	173

ГЛАВА VIII ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ R^n	175
1.1. Расстояние от точки до прямой	177
1.2. Нормированное уравнение прямой	178
2. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В R^3	179
2.1. Угол между двумя плоскостями	180
2.2. Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки, не лежащие на одной прямой	181
2.3. Нормированное уравнение плоскости. Отклонение точки от плоскости	181
3. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ R^3	182
4. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ. НЕРАВЕНСТВА	183
4.1. Неравенства	183
4.2. Выпуклые множества точек на плоскости	186
5. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ. НЕРАВЕНСТВА	188
5.1. Нестрогие линейные неравенства	188

ПРЕДИСЛОВИЕ

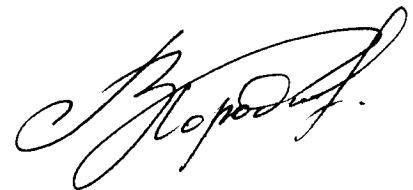
В основу настоящего курса положены тексты лекций, которые автор читает на экономическом факультете Донецкого государственного университета. В последнее время в преподавании математики на экономических специальностях наметилось ряд новых тенденций, которые направлены на повышение роли математического образования в специальном образовании студентов. Изменение потребностей математического образования подчинено современным требованиям решения экономических задач на основе использования новых математических моделей и методов в сочетании с большими возможностями вычислительной техники. Эти тенденции должны находить свое отражение в программах общего курса высшей математики.

Следует отметить, что автор не претендует на оригинальность изложения и в основном придерживался программы по высшей математике для экономистов. Однако, с другой стороны, сила и общность метода дифференциального и интегрального исчисления таковы, что не познав их нельзя понять все значение математики для экономических исследований.

Поэтому значительное место, в сравнительно небольшом курсе, уделяется этим разделам, а так же обращено внимание на раздел линейной алгебры и элементы аналитической геометрии.

Основная цель этого учебного пособия - оказать помощь студентам экономических специальностей в изучении высшей математики.

Автор благодарен В.И. Пайкову за ценные замечания и советы.



В в е д е н и е

Математика - наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, непрерывно расширяется, так что это общее определение математики постоянно наполняется новым содержанием.

В настоящее время в связи с возросшей ролью математики в современной науке и технике каждый специалист в области экономики нуждается в серьезной математической подготовке.

Курс высшей математики для экономистов ставит своей целью изложение основных понятий высшей математики и их приложений в различных областях экономики.

В последнее время, благодаря появлению быстродействующих вычислительных машин, произошел большой качественный скачок в использовании математических методов, которые стали применяться не только в тех областях, где математика использовалась уже давно (например, в механике, физике), но и в тех областях человеческого знания, где математика еще совсем недавно либо применялась мало, либо ее применение не представлялось возможным (медицина, экономика, лингвистика, социология и т.п.).

Задачей этого курса является не только сообщение известного запаса сведений (определений, теорем, их доказательств, связей между ними, методов решения задач) и обучение их применению. В его задачу входят развитие у учащихся логического мышления и математической культуры, необходимых для изучения математики, развитие математической интуиции. Наконец, курс высшей математики идейно готовит будущих специалистов к изучению других математических методов, других математических дисциплин. Для этого по меньшей мере необходимо получение правильного представления о том, что такое математика и математическая модель, в чем заключается математический подход к изучению явлений реального мира и экономических процессов в частности.

Программа курса состоит из шести разделов, три из которых мы изучим в первом и втором семестре - это дифференциальное исчисление; интегралы, дифференциальные уравнения и ряды; линейная алгебра. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование - изучаются на старших курсах. В первом семестре на лекции отводится 36 часов на практические занятия - 36; во втором - 54 и 38 плюс 32 часа на лабораторные работы по численным методам, некоторые из которых выполняются на ЭВМ.

С программой и содержанием курса можно ознакомиться на кафедре математики и математических методов в экономике (МММЭ).

Для успешного освоения курса высшей математики Вам необходимо правильно организовать систематическую самостоятельную работу над учебным материалом.

На первом этапе рекомендую ознакомиться с пособием “Методические указания к организации самостоятельной работы при изучении математических дисциплин” (авт. Породников В.Д.).

Следует отметить, что по всем основным разделам курса на кафедре МММЭ или в библиотеке университета, а также в методическом кабинете экономического факультета имеются методические разработки, которые Вы можете использовать при изучении курса.

1. Множества

Понятия *множества* и *элемента множества* являются первичными понятиями. Теория множеств как математическая дисциплина создана немецким математиком, Георгом Кантором в 1872 г. Он определил множество как «*объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью*».

В первом издании “Теории множеств” Бурбаки (1939г.) имеется следующее предложение: « *Множество образуется из элементов, обладающих некоторыми свойствами и находящихся в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств* ».

Первичным понятием является также понятие *пустого* множества. Пустое множество не содержит элементов. Объекты, сущности или элементы, составляющие множество, обозначаются строчными латинскими буквами: $x, a, b, \dots$; множество будем обозначать прописными латинскими буквами $E, N, \dots$. Знак $\in$ обозначает вхождение или принадлежность.

Под множеством $A = \{a, b, c, \dots\}$ понимается собрание (совокупность) некоторых элементов $a, b, c, \dots$. Если x есть элемент множества A , то пишут

$$x \in A$$

(читается: x принадлежит A); если y не является элементом множества A , то пишут

$$y \notin A$$

(читается: y не принадлежит множеству A).

2. Способы задания множеств

а) Множество может быть задано *перечислением* всех его элементов.

Пр и м е р ы :

1. Множество цифр: $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$;
2. Множество лиц, присутствующих на собрании:
 $B = \{\text{Иванов, Сидоров, Петров, Павлов}\}$

б) Обобщение первого способа состоит в том, что каждый элемент задаваемого множества определяется по некоторому элементу уже известного множества.

Пр и м е р ы : считая известным множество действительных чисел

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

определим множество степеней числа 10

$$D = \{\dots, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots\}$$

в) Другой способ состоит в описании ограничительного свойства, выделяющего элементы множества из другого более широкого или основного множества.

Пр и м е р ы : 1. Считая известным множество натуральных чисел

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\},$$

определим множество четных чисел

$$L = \{2, 4, 6, \dots, 2n+2, \dots\}, \text{ где } n \in N.$$

2. $[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$ - отрезок;

3. B - множество деревьев в парке;

4. Множество трехголовых людей пусто, т.е. оно не содержит ни одного элемента (обозначать это множество будем $\emptyset$).

д) Новые множества можно задавать при помощи некоторых операций над множествами.

3. Операции над множествами

Определение 3.1 Множество A , состоящее из части элементов множества B или совпадающее с ним, называется подмножеством

множества В; в этом случае пишут

$$A \subseteq B. \quad (3.1)$$

(читается: множество А содержится во множестве В либо равно В). Условимся считать, что пустое множество есть подмножество любого множества.

Будем изображать, для наглядности, множества при помощи *диаграммы Эйлера-Венна*, изображающие эти множества и наглядно демонстрируют некоторые свойства операций над множествами.

Если $\forall a \in B \Rightarrow a \in A$,
тогда $A = B$.

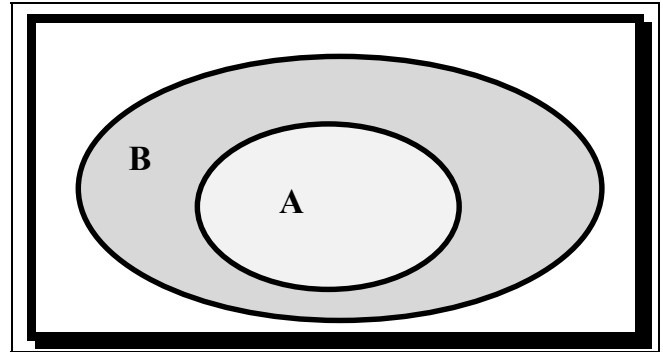


Рис.3.1.

Определение 3.2 Под объединением (суммой) двух множеств А и В понимается множество

$$C = A \cup B$$

($\cup$ - знак объединения), состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, т.е. входящих или в А, или в В, или и в А и в В одновременно.

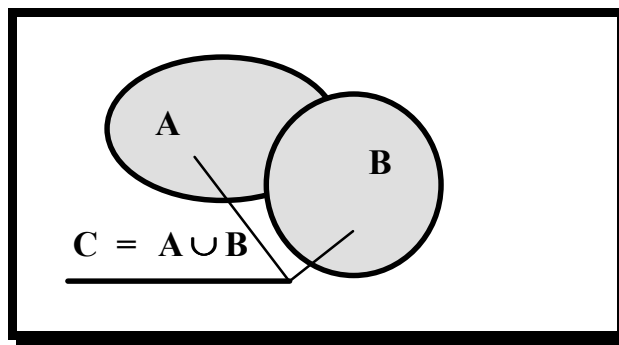


Рис. 3.2.

Аналогично определяется объединение большего числа множеств.

Пример : $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$.

Определение 3.3 Под пересечением (произведением) двух множеств А и В понимается множество

$$C = A \cap B$$

($\cap$ - знак пересечения), состоящее из элементов, принадлежащих как одному, так и другому множествам, т.е. входящих и в А, и в В.

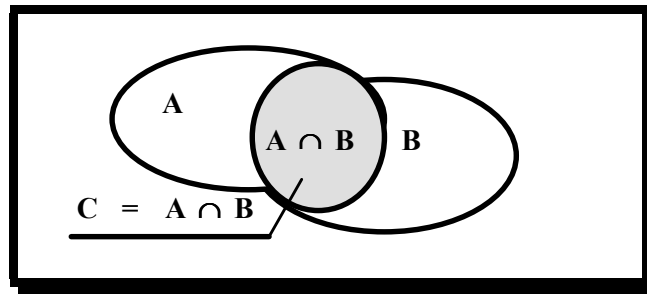


Рис. 3.3.

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечение пусто:
 $A \cap B = \emptyset$.

Аналогично определяется пересечение большего числа множеств.

Пример :

$$\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\} = C.$$

Определение 3.4 Под разностью двух множеств A и B понимается множество

$$C = A \setminus B$$

($\setminus$ - знак разности), состоящее из элементов, принадлежащих A , но не входящих в B ($C = B \setminus A$ -

аналогично).

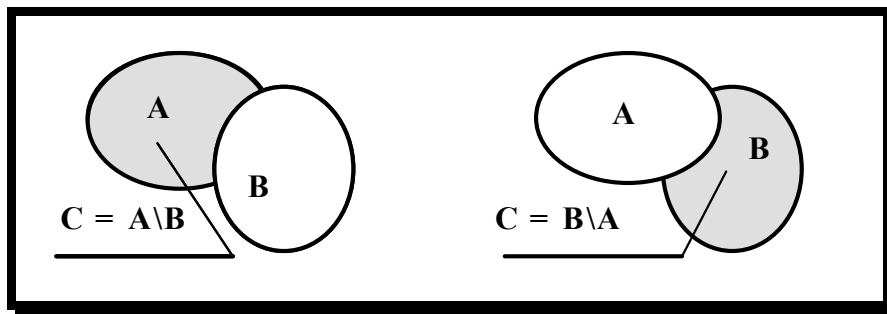
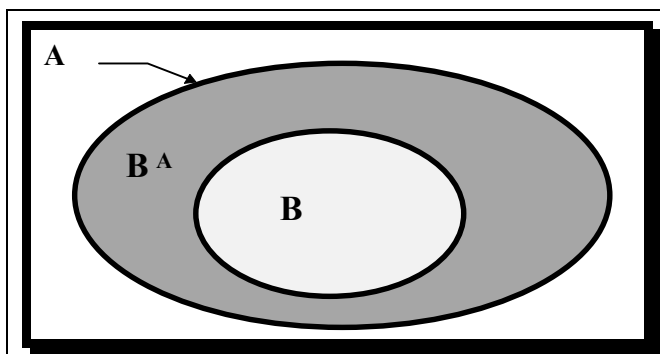


Рис. 3.4.



Если $B \subset A$, то множество $B^A = A \setminus B$ называется *дополнением* множества B до множества A .

$$\begin{aligned} \text{Очевидно, } B \cup B^A &= A, \\ B \cap B^A &= \emptyset. \end{aligned}$$

Рис. 3.5.

Кратко эти определения можно записать следующим образом:

$A \cup B = \{x: x \text{ - принадлежит по крайней мере одному из множеств } A \text{ или } B\};$

$A \cap B = \{x: x \in A \text{ и } x \in B\};$

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Если задана система множеств $\{A_i\}$ ($i=1 \div n$), то их объединение $\bigcup_{i=1}^n A_i$ и пересечение

$\bigcap_{i=1}^n A_i$, определяются соответственно по формулам:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x: x \text{ - принадлежит по крайней мере одному из множеств } A_i\};$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x: x \in A_i, \quad \forall i=1 \div n\}.$$

Глава I

Элементы аналитической геометрии

1. Прямоугольные координаты точки на плоскости

Положение точки на плоскости проще всего определить при помощи *прямоугольной системы координат* (декартовы координаты), которую мы определим следующим образом:

- 1) выберем две взаимно перпендикулярные прямые - две оси координат (ось абсцисс и ось ординат), точка их пересечения называется начало координат (обозначим буквой O);
- 2) на каждой оси выберем положительное направление;

3) для каждой оси выберем единицу длины.

Положение точки M относительно выбранной системы координат определяется двумя координатами - абсциссой x (число, равное длине OM_x) и ординатой y (длина OM_y). Эти два числа полностью определяют положение точки на плоскости.

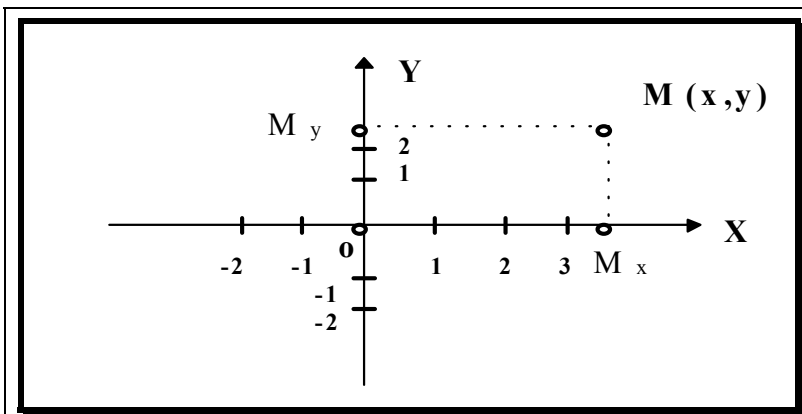


Рис. 1.1.

Отрезок, соединяющий начало координат с точкой M , называется ее *радиусом-вектором*.

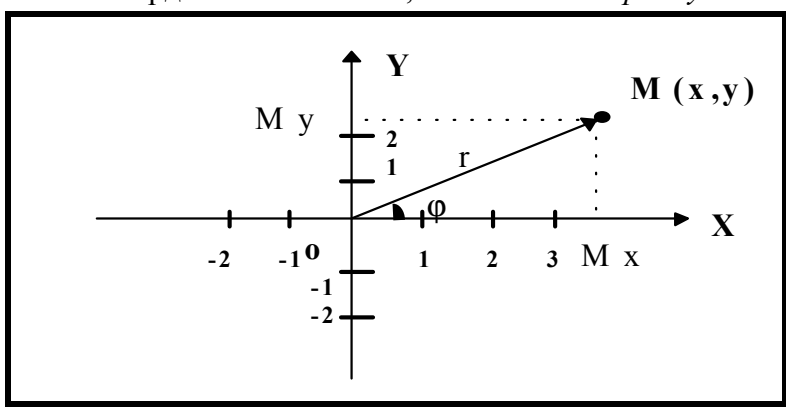


Рис. 1.2.

Обозначим через φ угол, образованный OM с положительным направлением оси Ox , и через r - его длину, тогда можно координаты точки определить следующим образом:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = r \sin \varphi \end{cases} \quad (1.1)$$

1.2. Расстояние между двумя точками на плоскости

Найдем сначала длину r -вектора, т.е. это будет расстояние точки $M(x,y)$ от начала координат $O(0,0)$. Расстояние $r = OM$, очевидно, является гипотенузой прямоугольного треугольника OMM_x с катетами $OM_x = |x|$ и $MM_x = |y|$. По теореме Пифагора получаем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.2)$$

В общем случае, пусть даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и требуется найти расстояние между ними ($\rho(A, B)$)

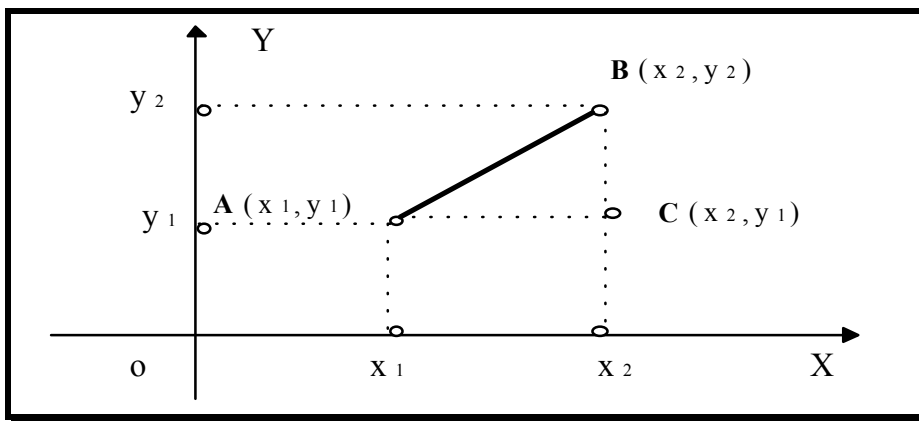


Рис. 1.3.

Так как длина $AC = |x_2 - x_1|$, а $BC = |y_2 - y_1|$, тогда, используя (1.2), получаем

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.3)$$

З а м е ч а н и е . Формула (1.3) дает возможность найти и длину отрезка АВ.

Самостоятельно. Деление отрезка в заданном отношении.

1.3. Линия как множество точек

Изучение свойств геометрических фигур с помощью алгебры носит название *аналитической геометрии*, а использовать при этом мы будем так называемый *метод координат*.

Линия на плоскости обычно задается как множество точек, которые обладают присущими только им свойствами. Тот факт, что координаты (числа) x и y точки, лежащей на этой линии, аналитически записываются в виде некоторого уравнения.

Определение 1.1. *Уравнением линии (уравнением кривой) на плоскости Oxy называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой другой точки, не лежащей на этой линии.*

Из определения 1.1 следует, что всякой линии на плоскости соответствует некоторое уравнение между текущими координатами (x,y) точки этой линии и наоборот, всякому уравнению соответствует, вообще говоря, некоторая линия.

Отсюда возникают две основные задачи аналитической геометрии на плоскости.

- Дана линия в виде множества точек. Нужно составить уравнение этой линии.
- Дано уравнение линии. Необходимо изучить ее геометрические свойства (форму и расположение).

1.4. Прямые в R^2

Пусть задана декартова система координат Oxy и через произвольную точку $M(x,y)$ проведена прямая l . Теперь пусть эта прямая, для определенности, образует угол φ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$) с положительным направлением оси Ox . Тогда прямая пересекает ось ординат в некоторой точке $B(0, b)$, а ордината текущей точки $M(x,y)$ равна NM , т.е. $y = NM = NC + CM$, где $NC=b$ есть величина постоянная для данной прямой, а вторая переменная и $CM=BC \cdot \operatorname{tg} \varphi = kx$.

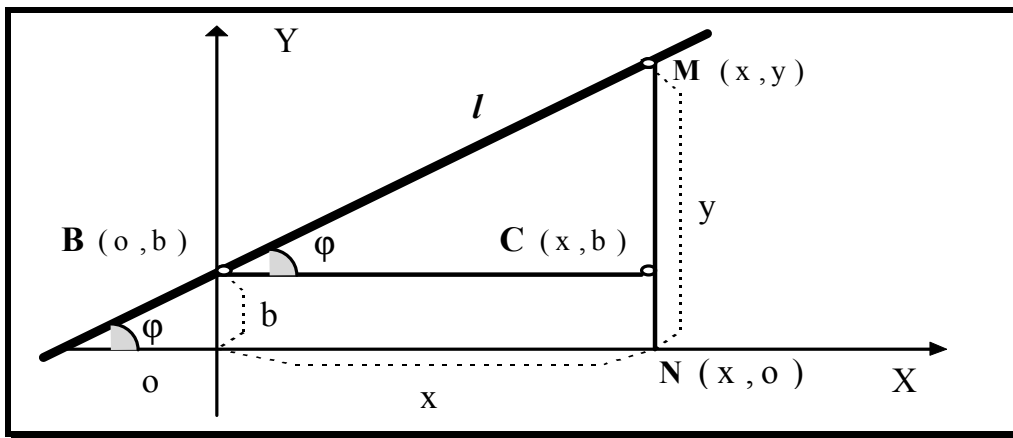


Рис. 1.4.

Таким образом,

$$y = kx + b \quad (1.4)$$

при $x \geq 0$. (Проверьте самостоятельно справедливость формулы (1.4) для $x < 0$). Так как координаты точки $M(x,y) \in l$, то они удовлетворяют уравнению (1.4).

Убедитесь в обратном. Пусть координаты точки $M(x_1, y_1)$ удовлетворяют уравнению (1.4), то точка обязательно лежит на прямой. Следовательно, уравнение (1.4) представляет собой уравнение прямой линии с угловым коэффициентом, где k и b - параметры, имеющие следующие значения: b - отрезок, который отсекает прямая от начала координат до точки пересечения прямой с осью Oy ; $k = \operatorname{tg} \varphi$ - угловой коэффициент.

Самостоятельно рассмотреть: $b < 0$, $b > 0$, $b = 0$; $\varphi = 0$, $\pi/2 < \varphi < \pi$, $\varphi = \pi/2$.

Теорема 1.1. Всякое невырожденное уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0) \quad (1.5)$$

представляет собой общее уравнение прямой на плоскости Oxy .

Доказательство: 1). Пусть $B \neq 0$. Тогда уравнение (1.5) запишем в каноническом виде

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

сравним с (1.4), получим $k = -A/B$; $b = -C/B$.

2). Пусть теперь $B=0$, а $A \neq 0$, имеем $Ax + C = 0$ и $x = -C/A$, (1.6)
получаем прямую параллельную оси Oy .

1.4.1. Взаимное расположение двух прямых в R^2

Пусть заданы две прямые

$$l: y = kx + b, \quad \text{где } k = \operatorname{tg} \alpha,$$

и

$$l_1: y = k_1x + b_1, \quad \text{где } k_1 = \operatorname{tg} \varphi.$$

Очевидно, что взаимное расположение этих прямых можно определить при помощи $\angle \beta$. (См. Рис. 1.5).

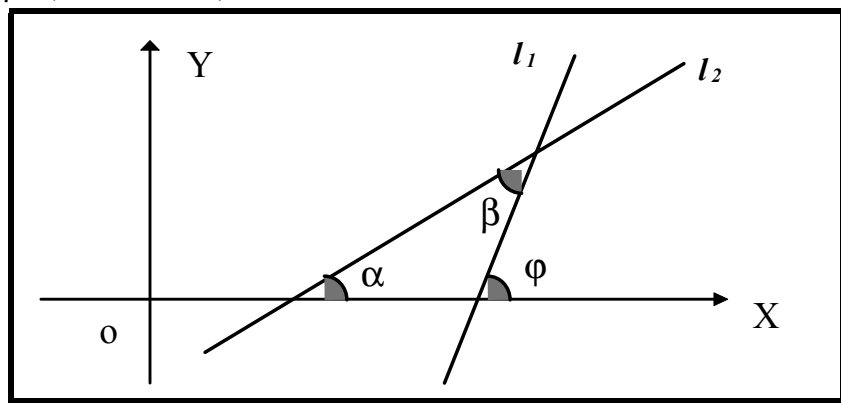


Рис. 1.5.

Из элементарной геометрии известно, что внешний угол $\varphi = \alpha + \beta$ или $\beta = \varphi - \alpha$. Отсюда на основании

$$\operatorname{tg}(\beta) = \operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{k_1 - k}{1 + k \cdot k_1}. \quad (1.7)$$

На основании формулы (1.7) получим условия параллельности и перпендикулярности двух прямых:

1. Если $k=k_1$, то прямые параллельны, т.к. $\alpha = \varphi$, а $\beta = 0$.
2. Если $k = -1/k_1$.

З а м е ч а н и е. Пусть заданы две прямые

$$(1): Ax + By + C = 0$$

$$(2): A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \text{тогда}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{A \cdot B_1 - A_1 \cdot B}{A \cdot A_1 - B \cdot B_1}$$

$$1). (1) \parallel (2) \Rightarrow \frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} - \text{условие параллельности двух прямых};$$

$$2). (1) \perp (2) \Rightarrow AA_1 + BB_1 = 0 - \text{условие перпендикулярности двух прямых}.$$

2. Линии второго порядка

2.1. Окружность

Пусть задана точка $C(x_0, y_0)$ и R - радиус. Тогда, если для любой точки $M(x, y)$ справедливо $|MC|=R$, то линия называется *окружностью*.

Уравнение получается из того, что

$$\rho(M, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

и называется *нормальным уравнением окружности*, т.е.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (2.1)$$

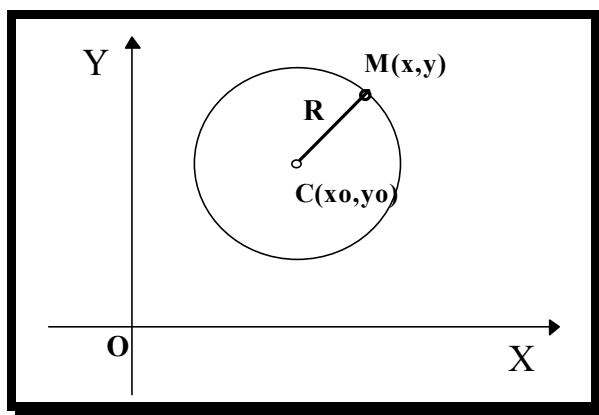


Рис. 2.1.

В частном случае $x_0 = 0, y_0 = 0$:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) можно записать в виде:

$$x^2 + y^2 + A \cdot x + B \cdot y + C = 0, \quad (2.3)$$

т.е. окружность является кривой второго порядка.

Определение 2.1. Линия называется *линией (или кривой) $n^{\text{го}}$ порядка* ($n=1,2, \dots$), если она определяется уравнением $n^{\text{й}}$ - степени относительно текущих прямоугольных координат.

Тогда общий вид кривых первого порядка есть

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.4)$$

где A и $B \neq 0$ одновременно.

Соответственно

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0, \quad (2.5)$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Тогда (2.5)- общий вид кривых второго порядка.

З а м е ч а н и е. Не всякому уравнению второго порядка соответствует действительная кривая.

Пример. Пусть задано уравнение второго порядка $x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0$,

Так как нет действительных чисел x, y , что удовлетворяют этому уравнению, то не существует и действительной кривой.

Таким образом, $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ является *общим* уравнением окружности.

Если $A \neq 0$, тогда разделим почленно, получим

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0,$$

что соответствует (2.3).

Тогда для того, чтобы действительная кривая второго порядка являлась окружностью, необходимо:

1. Равенство коэффициенты при квадратах текущих координат;
2. Отсутствие члена, содержащего произведение текущих координат.

2.2. Центральные кривые второго порядка

Рассмотрим уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

($A \neq 0, C \neq 0$, без члена, содержащего x, y).

Выделим в этом уравнении полный квадрат

$$A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + C \left(y + \frac{E}{2C} \right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F. \quad (2.6)$$

Теперь положим

$$x_0 = -\frac{D}{2A}, \quad y_0 = -\frac{E}{2C}, \quad \Delta = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F.$$

Получим

$$A(x-x_0)^2 + C(y-y_0)^2 = \Delta. \quad (2.7)$$

Точку $O'(x_0, y_0)$ назовем *точкой симметрии* кривой (2.7) (центром кривой).

Т.е. если точка $M_1(x_1, y_1) \in l$ точка $M_2(x_2, y_2)$, симметричная относительно O' , очевидно также лежит на l (2.7).

Параллельные осям координат Ox и Oy прямые $y = y_0, x = x_0$ являются *осями симметрии* кривой (2.7).

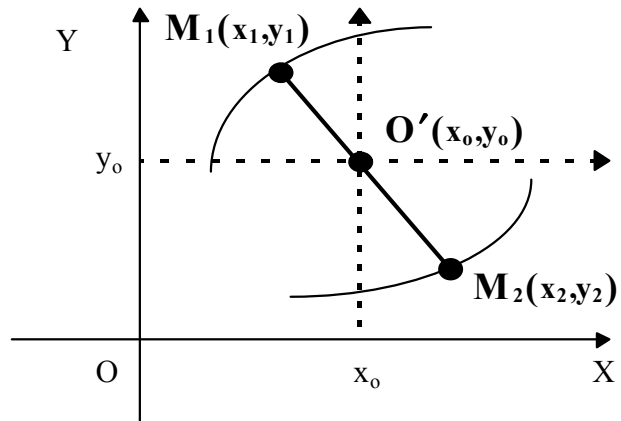


Рис.2.2.

Для простоты положим, что $O'(0,0)$ находится в начале координат. Тогда (2.7) принимает вид :

$$Ax^2 + Cy^2 = \Delta. \quad (2.8)$$

2.3. Кривые эллиптического и гиперболического типа

Определение 2.2. Кривая второго порядка (2.8) называется *эллипсом* (принадлежит эллиптическому типу), если коэффициенты A и C имеют одинаковые знаки, т.е.

$$A \cdot C > 0 \quad (2.9)$$

Пусть для определенности $A > 0, C > 0$

1). $\Delta > 0$ тогда будем иметь действительный эллипс;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (\text{каноническое уравнение}) \quad (2.10)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{\Delta}{A}}, \quad b = \sqrt{\frac{\Delta}{C}}.$$

Числа a, b называются *полуосями* эллипса. Обычно полагают $0 < b \leq a$.

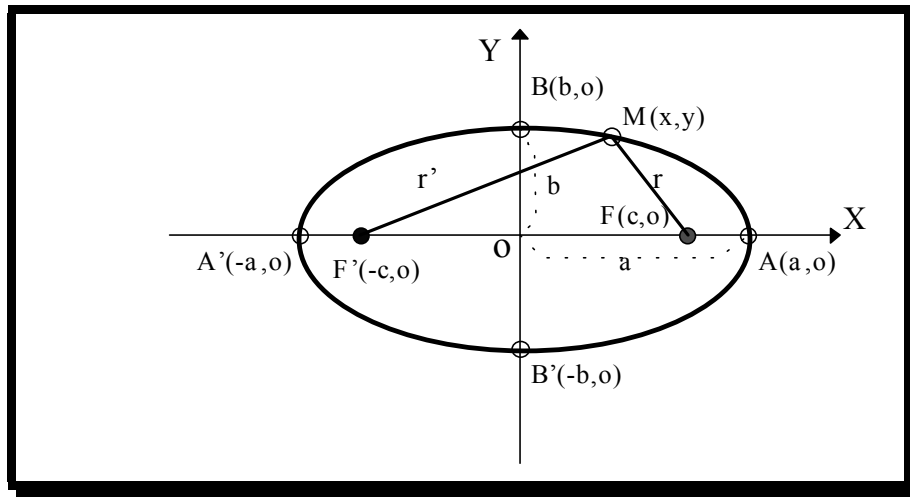


Рис.2.3.

Точки A', B', A, B - называются вершинами эллипса,

$AA' = 2a, BB' = 2b$ - называются его осями.

Отметим, что $|x| \leq a, |y| \leq b$, если $a = b$ и, тогда $x^2 + y^2 = a^2$ - окружность.

2). Если $\Delta = 0$, то $O(0,0)$ - вырожденный эллипс.

3). При $\Delta < 0$ (2.8) не имеет действительных точек и эллипс называется мнимым эллипсом.

Определение 2.3. Кривая второго порядка (2.8) называется *гиперболой* (кривой гиперболического типа), если A и C имеют противоположные знаки, т.е.

$$AC < 0 \quad (2.11)$$

Пусть $A > 0, C < 0$.

1. $\Delta > 0$ - имеем гиперболу с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.12)$$

где $a = \sqrt{\frac{\Delta}{A}}$ - действительная полуось, $b = \sqrt{\frac{\Delta}{-C}}$ - мнимая полуось.

Точки $A'(-a, 0), A(a, 0)$ - вершины гиперболы.

Отметим, что здесь $|x| \geq a$.

2. $\Delta = 0$ - будет пара пересекающихся прямых (вырожденная гипербола)

$$(\sqrt{A}x - \sqrt{-C}y) \cdot (\sqrt{A}x + \sqrt{-C}y) = 0.$$

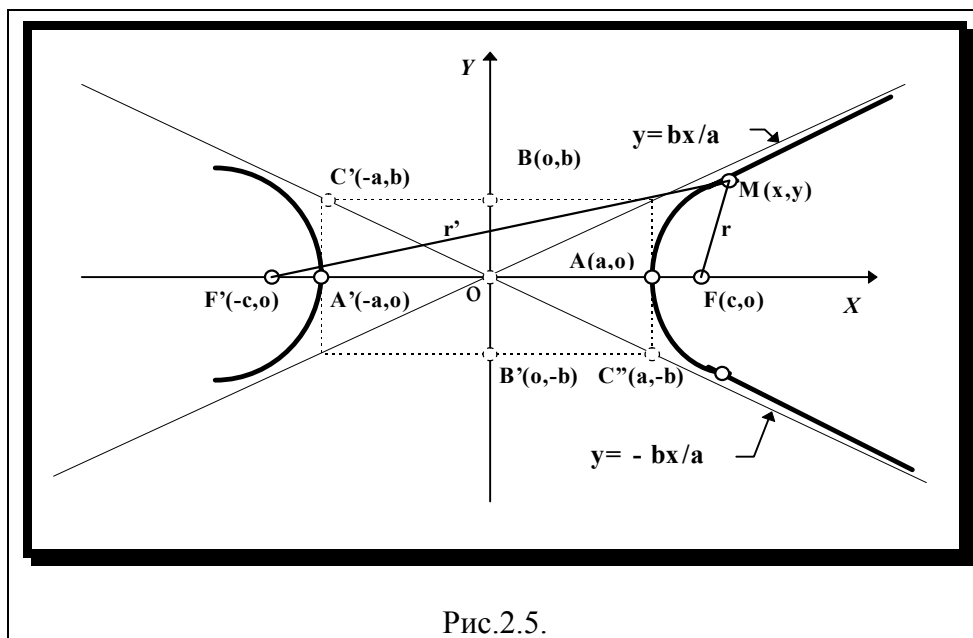


Рис.2.5.

3. $\Delta < 0$
получим гиперболу с
полуосями

$$a' = \sqrt{\frac{-\Delta}{A}} \quad \text{и} \quad b' = \sqrt{\frac{\Delta}{C}}.$$

Если $a' = a$ и $b' = b$, то гипербола

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = -1 \quad (2.13)$$

называется *сопряженной* к гиперболе (2.12) и ее вершинами будут точки $B(0, b)$ и $B'(0, -b)$.
Отрезок $AA' = 2a$ - *действительная ось*; $BB' = 2b$ - *мнимая ось* гиперболы.

2.4. Фокальные свойства центральных кривых второго порядка

Точки $F(c, 0)$ и $F'(-c, 0)$ называются *фокусами*,

где $c = \sqrt{a^2 \mp b^2}$ (“+” - для гиперболы, “-” - для эллипса). (2.14)

Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* центральной кривой второго порядка:

- 1) для эллипса $0 \leq \varepsilon < 1$;
- 2) для гиперболы $1 < \varepsilon < \infty$;
- 3) для окружности $\varepsilon = 0$.

Пусть имеем точку $M(x, y)$. Обозначим $r = MF$ и $r' = MF'$ (r, r' - фокальные радиусы).

Тогда имеем $r = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ и $r' = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$.

Так как

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{откуда} \quad y^2 = \pm b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad \text{с учетом (2.14) получим, что}$$

$$r = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 \pm b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{\left(1 \mp \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + (c^2 \pm b^2)} = \left| \frac{c}{a}x - a \right| = |\varepsilon x - a|. \quad (2.15)$$

Аналогично(самостоятельно):

$$r' = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 \pm b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = |\varepsilon x + a| \quad (2.16)$$

Тогда получаем:

1). Если кривая эллипс, то $0 \leq \varepsilon < 1$, $|x| \leq a$
 поэтому $r = a - \varepsilon x$, $r' = a + \varepsilon x$
 получим, что $r + r' = 2a$ (2.17)

Для каждой точки $M(x, y)$, принадлежащей эллипсу, сумма ее фокальных радиусов есть величина постоянная (*характеристическое свойство эллипса*).

2). Для гиперболы $\varepsilon > 1$, $|x| \geq a$
 $r = \pm (\varepsilon x - a)$, $r' = \pm (\varepsilon x + a)$.
 “+” соответствует правой ветви гиперболы ($x > 0$);
 “-” соответствует левой ветви ($x < 0$).
 $r' - r = \pm 2a$ (2.18)

(характеристическое свойство).

Для каждой точки $M(x, y)$, принадлежащей гиперболы, абсолютная величина разности ее фокальных радиусов есть величина постоянная.

2.5. Асимптоты гиперболы

Рассмотрим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или}$$

$$y = \pm \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{b}{a} x\right), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}\right) = 1 \Rightarrow y \approx \pm \frac{b}{a} x.$$

Тогда $y = \pm \frac{b}{a} x$ - называется *асимптотой* гиперболы.

Пусть, например, $x > 0$. Рассмотрим точки $M(x, y)$, принадлежащую гиперболы и $N(x, y')$ -прямой, тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - y') = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a} \left(\frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right) = ab \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

З а м е ч а н и е. Для равнобокой гиперболы ($a=b$)
 $x^2 - y^2 = a^2$

асимптоты $y = \pm x$ взаимно перпендикулярны.

2.6. Нецентральные кривые второго порядка

Если кривая второго порядка не имеет центра симметрии, то она называется *нецентральной*.

Пусть $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$,
 где $A \neq 0$ и $A^2 + C^2 \neq 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$.

Дополним в этом уравнении члены при y до полного квадрата

$$C \left(y - \frac{E}{2C} \right)^2 = -Dx - F + \frac{E^2}{4C}$$

или

$$x_0 = \frac{F}{D} + \frac{E^2}{4C}, \quad y_0 = -\frac{E}{2C}, \quad 2p = -\frac{D}{C}$$

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad (2.19)$$

Кривая (2.19) называется *параболой*.

$O'(x_0, y_0)$ - вершина параболы, p - параметр параболы, $y = y_0$ - ось симметрии параболы (ось параболы).

Пусть вершина параболы находится в $O'(0,0)$ тогда кривая имеет вид:

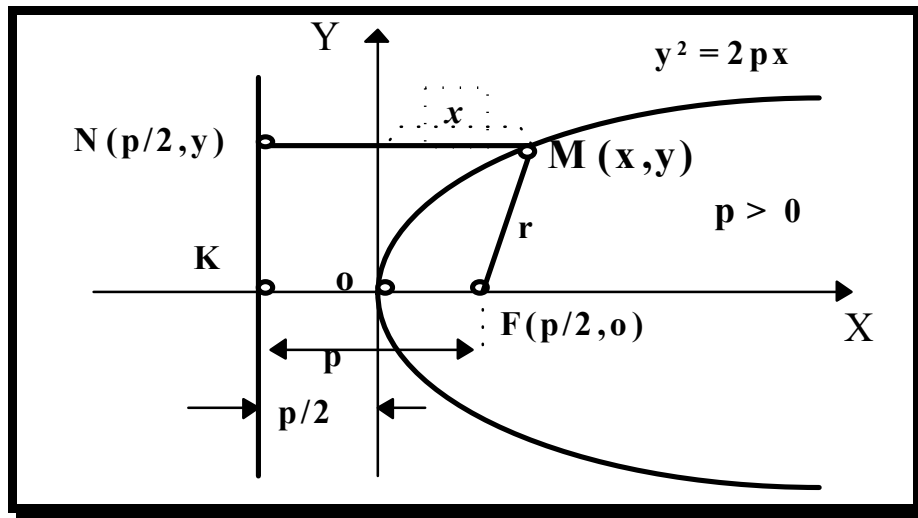


Рис.2.6.

2.7. Фокальное свойство параболы

$$y^2 = 2px \quad (p > 0).$$

Точка $F(p/2, 0)$ называется ее *фокусом*; а прямая $x = -p/2$ - *директрисой*.

Для точки $M(x, y)$ ее фокальный радиус $r = MF$ и вычисляется

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = x + \frac{p}{2}$$

С другой стороны расстояние этой точки от директрисы равно

$$MN = x + p/2 = r.$$

Таким образом, получаем определение параболы:

Определение 2.4. Парабола представляет собой множество точек плоскости, равноотстоящих от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы). (Это - характеристическое свойство).

Самостоятельно рассмотреть графики квадратного трехчлена

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Глава II

Дифференциальное исчисление

1. Сходимость в пространстве R^n

1.1. Окрестности и пределы последовательностей точек

Пусть на рассматриваемой нами плоскости или пространстве всегда фиксирована некоторая прямоугольная система декартовых координат. Точки будем обозначать большими латинскими буквами M, N, P, K , а их координаты - маленькими греческими, иногда с индексами, т.е. в случае плоскости $A(x_1, x_2), B(y_1, y_2)$, а в случае пространства $P(x_1, x_2, x_3), D(y_1, y_2, y_3)$. Расстояние между точками A и B будем обозначать символом $\rho(A, B)$.

Как известно, формула для расстояния между точками A, B в случае плоскости имеет вид:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

а в случае пространства:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Определение 1.1. Точкой P n -мерного пространства называется упорядоченная совокупность n вещественных чисел $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ или, короче, $P(x_i)$. Число x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) называется i -той координатой точки.

Расстояние между двумя точками $A(x_i)$ и $B(y_i)$ определим по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \quad (1.1)$$

Определение 1.2. Совокупность точек n -мерного пространства, для которых определено расстояние согласно (1.1), называется n -мерным евклидовым пространством и обозначается R^n или R_x^n .

З а м е ч а н и е.

В случае $n = 1$ получается прямая, при $n = 2$ - плоскость; при $n = 3$ - пространство с обычным расстоянием и в случае произвольного $n > 3$ не нужно искать в определении какого-то скрытого физического или геометрического смысла. Это есть просто построение математического аппарата, удобного для изучения функции многих переменных.

Расстояние между точками в n -мерном евклидовом пространстве обладает следующими свойствами:

1. $\rho(A, B) \geq 0$, причем $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
2. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$, $\forall A, B \in R^n$.
3. $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$, $\forall A, B, C \in R^n$.

Определение 1.3. Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое вещественное число a_n (причем разным натуральным числам n могут соответствовать и одинаковые числа). Совокупность элементов $a_n, n = 1, 2, K$ называется *числовой последовательностью* (или просто *последовательностью*); каждый элемент a_n называется членом последовательности, а число n - его номером.

Числовую последовательность a_n будем обозначать $a_n, n = 1, 2, K$, либо $\{a_n\}$. Согласно определения, последовательность всегда содержит бесконечное множество элементов.

Определение 1.4. Число A называется пределом данной оследовательности

$$\{a_n\}, \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \rightarrow |a_n - A| < \varepsilon \quad (1.2)$$

$$\text{При этом пишут } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ или } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A.$$

Отметим, что неравенство (1.2) эквивалентно

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \quad (1.2.1)$$

Последовательность, у которой существует предел, называется *сходящейся*.

Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется *расходящейся*.

Определение 1.5. Для заданного числа x всякий интервал вида $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε - окрестностью (или просто окрестностью) числа (точки) x на числовой прямой и обозначаются $O(x, \varepsilon)$.

Тогда можно дать другое определение предела.

Определение 1.4.1. Число A называется пределом данной последовательности $\{a_n\}$, если в любой его окрестности содержатся почти все члены последовательности, т.е. все члены последовательности за исключением их конечного числа.

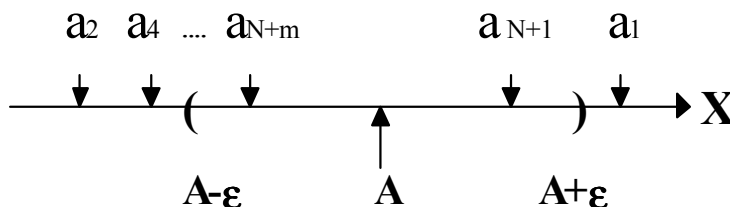


Рис. 1.1.

Следующие утверждения о числовых последовательностях нужно знать и уметь доказывать (самостоятельно):

1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;
5. Если $\{x_n\}, \{y_n\}$ сходятся и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n};$$

1.2. Определение бесконечно малой последовательности

Определение 2.1. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число b , что для любого n $a_n \leq b$ ($a_n \geq b$).

Определение 2.2. Последовательность $\{a_n\}$ называется монотонно возрастающей (монотонно убывающей), если $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$).

Теорема 2.1. (Вейерштрасса). Если последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, то она имеет предел.

Доказательство:

Пусть для определенности $\{a_n\}$ - возрастающая и ограничена сверху. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, а так как $\{a_n\}$ ограничена, то $\exists A: a_n \leq A, \forall n$ ($n = 1, 2, \dots$) и $\exists N: a_N > A - \varepsilon$. Тогда в силу монотонности заданной последовательности $\forall n \geq N$ в силу (1.2.1) $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$.

Поэтому $|A - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$, что по определению 2.4. означает $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Аналогично теорема доказывается для случая, когда $\{a_n\}$ - убывающая и ограничена снизу.

З а м е ч а н и е.

Теорема Вейерштрасса не имеет места в множестве Q - { рациональные числа }.

С л е д с т в и е.

Для того, чтобы монотонно возрастающая (убывающая) последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху (снизу).

Это следует из утверждения, что если последовательность имеет предел, то она ограничена, и из теоремы Вейерштрасса.

Теорема 2.2. Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, то она ограничена.

Доказательство:

Пусть $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$, а $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N: |a_n - A| < 1, \forall n \geq N$. Пусть d - наибольшее из чисел $1, |a_1 - A|, |a_{N-1} - A| \Rightarrow |a_n - A| \leq d, \forall n$, т.е. $A - d \leq a_n \leq A + d, \forall n$. По определению 2.6, $\{a_n\}$ -ограничена.

Пример 2.1. (Число e .) Пусть

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, K$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ сходится.

Раскрывая скобки согласно правилу бинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + K + \\ &+ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot K \cdot (n-k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot K \cdot k} \cdot \frac{1}{n^k} + K + \frac{n \cdot (n-1) \cdot K \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot K \cdot n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + K + \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \\ &+ K + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

При переходе от n к $n+1$ число слагаемых, которые все положительны,

возрастает, и кроме того, каждое слагаемое увеличивается:

$$1 - \frac{s}{n} < 1 - \frac{s}{n+1}, \quad s = 1, 2, K, \quad n-1, \quad \text{то } x_n < x_{n+1}.$$

Далее, замечая, что каждая из скобок вида $\left(1 - \frac{s}{n}\right) < 1$ и $\forall n \quad \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$, получим

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + K + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + K + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

В левой части неравенства - бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $S = 1, \quad S_n < S = 1$.

Следовательно,

$$2 < x_n < 3.$$

Но последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, а значит, имеет предел, который обозначим буквой e .

З а м е ч а н и е.

Число $e=2,718281828 \dots$ иррационально и трансцендентно, т.е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.

Определение 2.3. Последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon: \quad \forall n, m \quad n > n_\varepsilon, m > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Теорема 2.3. (Критерий Коши). Для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.

1.3. Сходимость последовательностей в пространстве

Определение 3.1 Пусть $X \in R^n$ и $E > 0$. Множество всех точек $Y \in R^n$: $\rho(x, y) < E$ называется n -мерным шаром с центром в точке X радиуса E или E -окрестностью.

Будем обозначать это множество

$$O(x, E) = \{Y: Y \in R^n, \rho(x, y) < E\};$$

Для $n = 1 \quad O(x, E) = \{Y: |X - Y| < E\};$

$n = 2 \quad X(x_1, x_2); \quad Y(y_1, y_2);$

$$O(x, E) = \{Y: (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < E^2\}.$$

Определение 3.2. Пусть каждому натуральному числу m поставлена в соответствие некоторая точка $X^{(m)} \in R^n$ (необязательно разные точки для разных m). Тогда множество $\{X^{(m)}, m = 1, 2, 3, \dots\}$, состоящее из точек пространства R^n с различными номерами, называется *последовательностью точек* в R^n и обозначается $X^{(m)}, m = 1, 2, 3, \dots$, или $\{x^{(m)}\}$.

Определение 3.3 Точка $X \in R^n$ называется *пределом последовательности* $\{x^{(m)}\}$ и пишется

$$X = \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)}, \quad (3.1)$$

$$\text{если } \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, X) = 0. \quad (3.2)$$

И, если $X = \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)}$, то будем говорить, что последовательность $\{x^{(m)}\}$ сходится к точке X .

Используя понятие окрестности, легко получаем, что

$$X = \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} \Leftrightarrow \forall E > 0 \quad \exists m_E: \quad \forall m \geq m_E \quad x^{(m)} \in O(x, E).$$

При $n=1$ определение 3.3 превращается в обычное определение предела числовой последовательности.

При $n=2$ сходимость последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек плоскости R^2 к точке $X \in R^2$ означает, что каков бы ни был круг с центром в точке X , начиная с некоторого номера, зависящего от радиуса этого круга, все члены данной последовательности лежат в этом круге.

В случае $n=3$ получаем сходимость в R^3 . Здесь в роли E -окрестности выступает шар. А это означает, что каков бы ни был шар с центром в точке X , начиная с некоторого номера,

зависящего от радиуса этого круга, все члены данной последовательности лежат в этом шаре, за исключением их конечного числа.

Понятие предела последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек пространства R^n может быть сведено к понятию предела числовых последовательностей, а именно, последовательностей координат точек $x^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$.

Теорема 3.1 Для того чтобы последовательность $\{x^{(m)}\}$
 $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \in R^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$
сходилась к точке $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^n$
 $\Leftrightarrow$ чтобы $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = x_i$, $i = 1 \div n$. (3.3)

Доказательство этой теоремы будет позже.

1.3.1. Различные типы множеств

Пусть точка $M \in G$, где G - множество, принадлежащее R^n ($G \subset R^n$).

Определение 3.4 Точка $M \in G$ называется *внутренней точкой* этого множества, если существует E - окрестность этой точки такой, что $O(M; E) \subset G$.

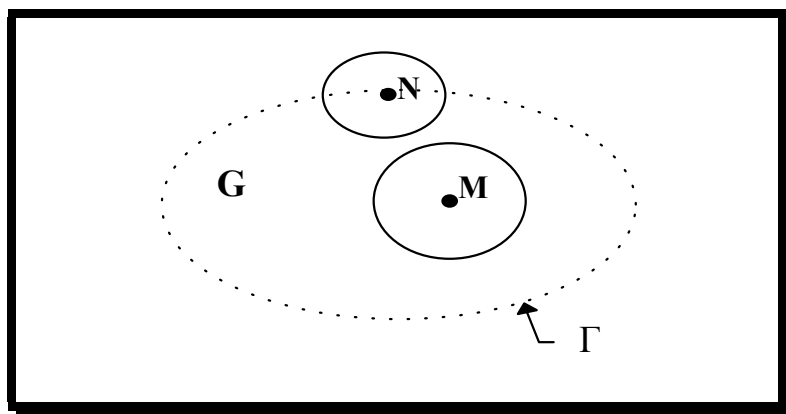


Рис. 3.4

Определение 3.5. Точка N называется *граничной* для множества G , если в любой ее полной окрестности имеются точки, как принадлежащие G , так и не принадлежащие ему. Сама точка N не обязательно принадлежит G .

Совокупность всех граничных точек множества G называется его *границей* (Γ).

Определение 3.6. Множество G будем называть *областью* (или *открытым множеством*), если все его точки внутренние.

Пример 3.1

$$K = \{x, y: x^2 + y^2 < 1\}$$

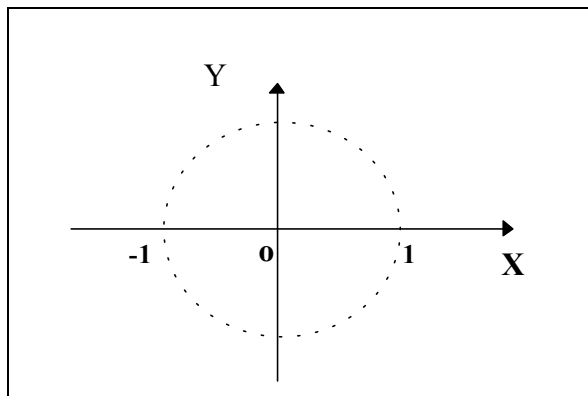


Рис. 3.5.

Всякое открытое множество, содержащее точку X , называется ее *окрестностью* и обозначается $O(x)$.

Обозначим $\bar{G} = G \cup \Gamma$, тогда множество $\bar{G}$ будем называть *замкнутой областью* (*замкнутое множество*).

Множество S называется *связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной линией, состоящей из точек данного множества.

Пример 3.2. Пусть $\Gamma = \{x, y: x^2 + y^2 = 1\}$ - граница множества K .

$$\bar{K} = K \cup \Gamma = \{x, y: x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Определение 3.7. Если у точки $x \in A$ существует окрестность, не содержащая никаких других точек множества A , кроме самой точки x , то эта точка называется *изолированной* точкой множества.

Определение 3.8. Точка $x \in R^n$ называется *предельной* точкой некоторого множества $A \subset R^n$, если $\forall \delta(x)$ содержит по крайней мере одну точку множества A , отличную от x .

З а м е ч а н и е. Очевидно, что предельная точка является граничной точкой. С другой стороны, всякая граничная точка множества A является либо ее изолированной точкой, либо предельной.

Пример 3.3. Пусть $n=1$ $E = (0, 1)$. Тогда каждая точка отрезка $[0, 1]$ является граничной и предельной точкой множества E , при этом точки $\{0\}, \{1\} \notin E$.

Пример 3.4. Пусть $A = (0,1) \cup \{2\}$, то точка $\{2\}$ является изолированной, а $\Gamma = [0,1] \cup \{2\}$.

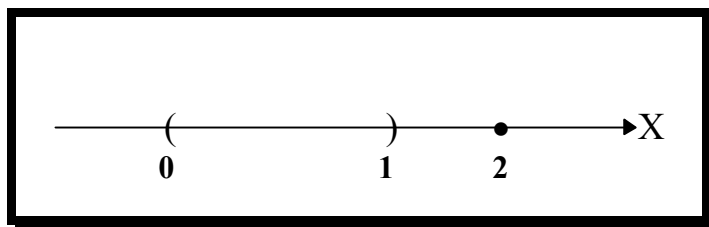


Рис. 3.6.

Определение 3.9. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если существует n -мерный куб $P(0,a)$ с центром в начале координат 0 , такой что $E \subset P(0,a)$.

З а м е ч а н и е. Всякий n -мерный параллелепипед $P(x, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n)$ называется прямоугольной окрестностью точки x , если $\bar{b}_1 = \bar{b}_2 = \bar{b}_3 = \dots = \bar{b}_n$, то получим n -мерный куб с центром в точке x .

$n = 1$ $P(x, \bar{b})$ - интервал с центром в точке x .

$n = 2$ $P(x, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$ - прямоугольник.

$n = 3$ $P(x, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ - n -мерный параллелепипед.

Пусть, например, $n = 2$ $P(x, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$

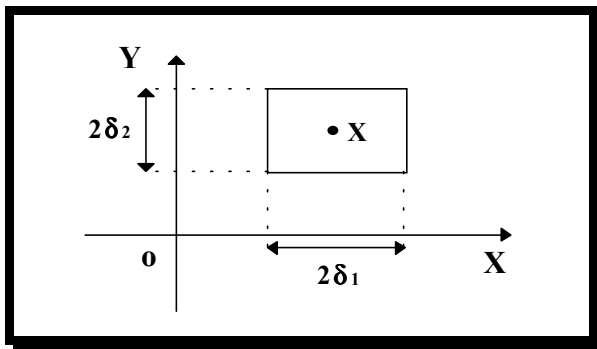


Рис. 3.7.

Теперь проведем доказательство теоремы 3.1.

Теорема 3.1 Для того чтобы последовательность $\{x^{(m)}\}$
 $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \in \mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3, \dots$
сходилась к точке $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
необходимо и достаточно чтобы $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = x_i, (i = 1 \div n). (3.3)$

Д о к а з а т е л ь с т в о : а). Необходимость условия 3.3.

Пусть $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$.

Зафиксируем $E > 0$, тогда $\exists m_E : x^{(m)} \in P(x, E), \forall m \geq m_E$, т.е.

$|x_i^{(m)} - x_i| < E, \forall i = 1, 2, \dots, n$ и при $m \geq m_E$, а это и означает, что

$\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = x_i, i = 1, 2, \dots, n$.

б). Достаточность условия 3.3.

Пусть $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = x_i, i = 1, 2, \dots, n$, и $P(x, E_1, E_2, \dots, E_n)$ - заданная прямоугольная окрестность точки x . Тогда для каждого $E_i > 0$

$i = 1, 2, \dots, n \exists m_i = m(E_i) : \forall m \geq m_i$ будет выполнено

$|x_i^{(m)} - x_i| < E_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

Обозначим $m_o = \max \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$,

Теперь при $m \geq m_o$ и $\forall i = 1, 2, \dots, n$ будет выполнено условие

$|x_i^{(m)} - x_i| < E_i, i = 1, 2, \dots, n$, и при $m \geq m_o$ будем иметь

$x \in P(x, E_1, E_2, \dots, E_n)$, что означает $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$.

2. Функция

2.1. Понятие функции

Пусть заданы два множества X и Y . Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, обозначаемый $f(x)$, и если каждый элемент $y \in Y$ при этом оказывается поставлен в соответствие хотя бы одному элементу $x \in X$, то говорится, что на множестве X задана *однозначная функция* $y = f(x)$. Множество X называется *областью ее определения*, а множество Y - *множество ее значений*. Элемент $x \in X$ называется *аргументом* или *независимой переменной*, а элементы $y \in Y$ - *значениями функции*, или *зависимой переменной*.

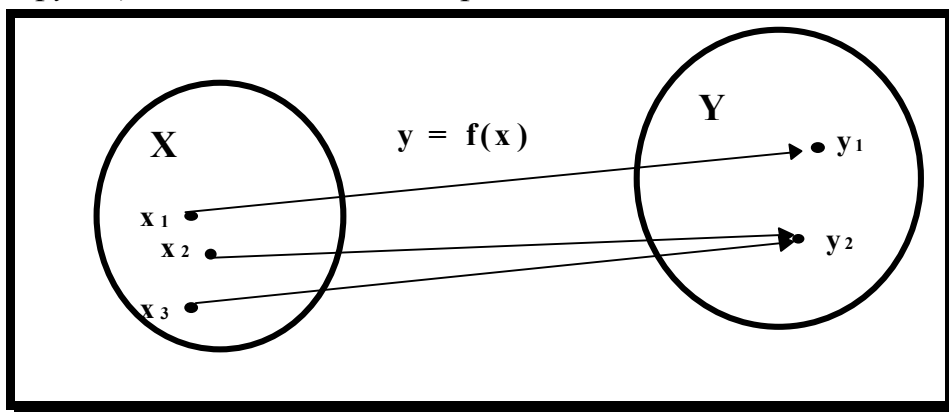


Рис. 2.1.

Элементы x и y рассматриваемых множеств могут иметь совершенно произвольную природу. Если значениями функции являются не числа, а другие элементы, часто вместо слова “функция” употребляют слово “отображение”.

Для того, чтобы задать функцию f , надо знать:

1. X - область определения (существования);
2. Y - область значений;
3. Закон соответствия, по которому определяется элемент $y \in Y$, соответствующий $x \in X$.

Пример 2.1. Вещественные, комплекснозначные и другие функции.

Пусть $\{x_n\}$ - последовательность, тогда $x_n = f(n)$.

$D(f) = \mathbb{N}$; $x_n \in \mathbb{R}^n$.

Над функциями, принимающими числовые значения (числовые функции), можно производить арифметические операции.

Пусть f и g - числовые функции, определенные на одном и том же множестве X , а c - const и $y = f(x)$, то

$$c \circ f(x) \Rightarrow c \circ f(x);$$

$$f + g \Rightarrow f(x) + g(x);$$

$$f \circ g \Rightarrow f(x) \circ g(x);$$

Если $g(x) \neq 0$,

$$\frac{f}{g} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)};$$

Выражения в правой части понимаются как функция, принимающая в каждой точке $x \in X$ значения: $c \circ f(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) \circ g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Определение 2.1. Функция f *ограничена* на множестве $X \Leftrightarrow \exists M > 0$:

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in X.$$

Т.е. если $\exists M > 0$, где $M - \text{const}$: $\forall x \in X$

а) $f(x) \leq M \Rightarrow f(x)$ - ограничена сверху;

б) $f(x) \geq M \Rightarrow f(x)$ - ограничена снизу.

Будем говорить, что числовая функция f , определенная на множестве X , принимает в точке $x_0 \in X$ *наибольшее* значение (*наименьшее*), если $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) $\forall x \in X$ и будем писать

$$f(x_0) = \max_N f; \quad (f(x_0) = \min_N f).$$

Иногда приходится иметь дело с $f(x)$, определенными на X , значениями которых являются некоторые подмножества множества Y , т.е. каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие некоторое множество $f(x) \subset Y$ и тем самым множество значений функции является совокупностью некоторых подмножеств множества Y . В этом случае говорят, что на множестве X задана *многозначная* функция $f(x)$ со значениями во множестве Y .

Определение 2.2. Пусть $y = f(x)$: $x \in X$ и Y - множество ее значений. Обозначим $f^{-1}(y)$ - полный прообраз элемента $y \in Y$, т.е. $f^{-1}(y) = \{x: x \in X, f(x) = y\}$. Тогда функция, определенная на Y и ставящая в соответствие каждому $y \in Y$ множество $f^{-1}(y) \subset X$, называется *обратной* к f и обозначается f^{-1} .

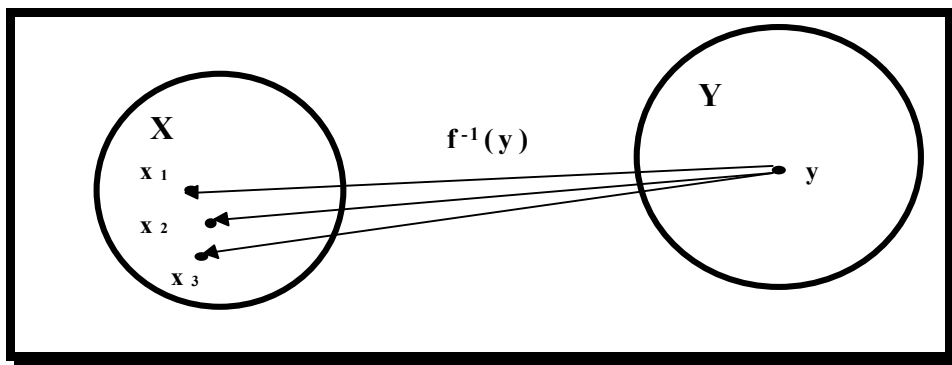


Рис. 2.2.

2.2. Способы задания функций.

1. Если функция задана выражением при помощи формулы, то говорят, что она задана *аналитически*. Для этого используется некоторый запас изученных и специально обозначенных функций, алгебраические действия и предельный переход.

Например, $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = \sin(x)$, $y = 1 + \sqrt[3]{\ln(\cos nx)}$.

Здесь f - это совокупность действий, которые нужно выполнить в определенном порядке над значениями аргумента x , чтобы получить соответствующее значение функции y (или, то же самое, $f(x)$).

Примеры:

$$1. y = f(x) = \text{Sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

2. Функция Дирихле:

$$y = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное}; \\ -1, & x - \text{иррациональное} \end{cases}$$

$$3. y = f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ x - 1, & x < 0. \end{cases}$$

2. Функцию можно задавать *таблично*, т.е. для некоторых значений x указать соответствующие значения переменной y .

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Данные такой таблицы могут быть получены как экспериментально, так и с помощью математических расчетов.

Примерами табличного задания функций могут быть: логарифмические таблицы, таблицы тригонометрических функций.

3. Аналитический и табличный способы задания функций страдают отсутствием наглядности.

$$y = f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ x - 1, & x < 0. \end{cases} \quad (*)$$

Графический способ задания функции - это геометрическое место точек на плоскости с координатами $(x, f(x))$, $x \in X$. Тогда график (*) см. Рис. 2.3.

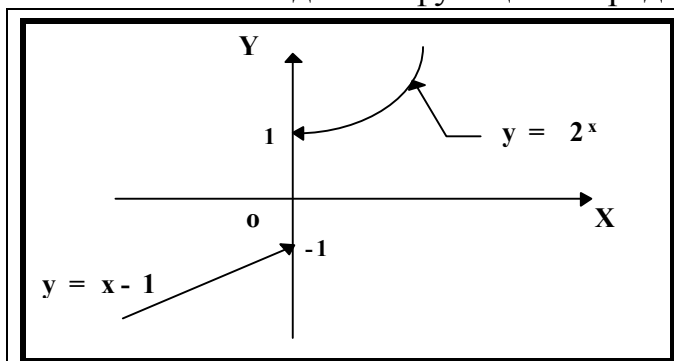


Рис. 2.3.

2.3. Понятие функции нескольких переменных.

Рассмотрим вещественные функции, определенные на множестве n -мерного евклидова пространства R^n , значениями которого являются вещественные числа.

Эти функции обозначаются одним символом, например, f, g, u, v, K , или указывая аргумент - $f(x)$, или $f(x_1, x_2, x_3, K, x_n)$ и называются функциями многих переменных. Здесь переменные x_1, x_2, K, x_n называются независимыми переменными или аргументами. Совокупность рассматриваемых их значений - областью определения (областью существования).

Областью существования функции двух переменных (x и y), вообще говоря, представляет собой некоторое множество точек плоскости Oxy , т.е.

$$u = f(x, y).$$

Аналогично $v = g(x, y, z)$ для $n=3$.

2.4. Неявные функции.

(Один из способов задания функции)

Определение 2.3. Функция u от аргумента x называется *неявной*, если она задана уравнением вида: $F(x, u) = 0$, (4.1)

т.е. задана функция $F(x, u)$ двух вещественных аргументов x и u (если они существуют), для которых выполняется (4.1).

Чтобы выразить функцию u в явном виде, достаточно разрешить (4.1) относительно u . Так как для данного значения аргумента x уравнение (4.1) может иметь несколько (и даже бесконечное множество) корней u , то в общем случае неявная функция является многозначной.

Например, функция u ($u > 0$), определяемая уравнением $x^2 + u^2 - 1 = 0$, является неявной. Явно заданная функция будет иметь вид: $u = \sqrt{1 - x^2}$.

2.5. Сложные функции

(Один из способов задания функции)

Пусть заданы две функции $y = f(x)$, $z = F(y)$, причем область задания функции F содержит область значений функции f , тогда $\forall x \in X$ из этой области определения f ставится в соответствие $z: z = F(y)$, где $y = f(x)$. Эта функция, определенная соответствием $z = F[f(x)]$, называется сложной функцией, или суперпозицией функций f и F .

Примеры:

1. $w = \sin(\lg(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}))$;
2. $z = 2^y$, $y = \log_2(1 + \sin^2 x)$.
 $z = 1 + \sin^2 x$ - явно задана.

2.6. Элементарные функции и их классификация.

Функции:

$y = x^a$	- степенная;
$y = a^x \quad (a > 0)$	- показательная;
$y = \log_a(x) \quad (a > 0, a \neq 0)$	- логарифмическая;
$\left. \begin{aligned} y &= \sin x \\ y &= \cos x \\ y &= \operatorname{tg} x \\ y &= \operatorname{ctg} x \end{aligned} \right\}$	- тригонометрические;
$\left. \begin{aligned} y &= \operatorname{arcsin} x \\ y &= \operatorname{arccos} x \\ y &= \operatorname{arctg} x \\ y &= \operatorname{arcctg} x \end{aligned} \right\}$	- обратные тригонометрические;
$y = c, \quad c - \text{Const}$	- постоянная.

Называются *основными элементарными функциями*.

З а м е ч а н и е.

Всякая функция, которая может быть явным образом задана с помощью формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называется *просто элементарной функцией*.

Элементарные функции обычно делят на классы:

1. *Многочлены (полиномы)* - это функции вида:

$$y = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n.$$

Если $a_n \neq 0$, то число n называется степенью данного полинома.

При $n=1$ многочлен первой степени и называется линейной функцией;

2. Класс *рациональных функций*:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ где } P(x), Q(x) - \text{полиномы};$$

3. *Алгебраические функции*:

Функции, заданные с помощью суперпозиций рациональных функций, степенных с рациональными показателями и четырех арифметических действий, называются алгебраическими.

Например:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x^3 + \sqrt{x}}}.$$

2.7. Трансцендентные функции.

Элементарные функции, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными* элементарными функциями.

Функции вида:

$$y = a^x \quad (a > 0) \quad - \text{показательная};$$

$$\log_a(x) \quad (a > 0, a \neq 0) \quad - \text{логарифмическая};$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \sin x \\ y &= \cos x \\ y &= \operatorname{tg} x \\ y &= \operatorname{ctg} x \end{aligned} \right\} \quad - \text{тригонометрические};$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \operatorname{arcsin}(x) \\ y &= \operatorname{arccos}(x) \\ y &= \operatorname{arctg}(x) \\ y &= \operatorname{arcctg}(x) \end{aligned} \right\} \quad - \text{обратные тригонометрические}.$$

Самостоятельно.

1. Графики основных элементарных функций;
2. Свойства функций (нечетность, четность, периодичность).

3. Предел функции

3.1. Определение предела функции

Определение 3.1. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (a, b) , кроме, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 , т.е.

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in (a, b)$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow$ (3.1)

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Таким образом, число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, при $x \rightarrow x_0$ тогда и только тогда, когда для любого $(\forall) \varepsilon > 0$ существует $(\exists)$ такая дельта окрестность $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ точки x_0 :

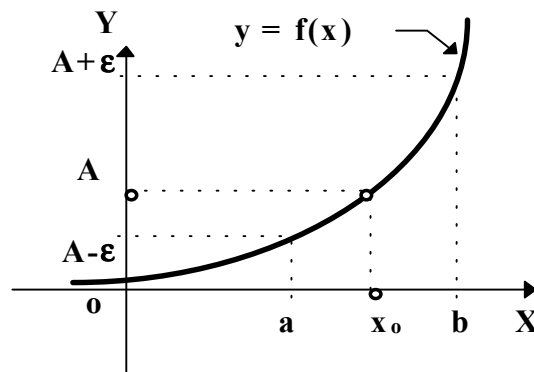


Рис. 3.1.

$$\forall x \in (a, b) : x \in O(x_0, \delta), \quad x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in O(A, \varepsilon).$$

З а м е ч а н и е. Понятие предела, естественно, переносится на функции нескольких переменных.

Пусть $f(x, y)$ - функция двух переменных, заданная на множество X плоскости Oxy .

Под окрестностью $O_{a,b}$ точки $M_0(a, b)$ (a и b - конечные) будем понимать внутренность любого прямоугольника $\{\alpha_1 < x < \beta_1, \alpha_2 < y < \beta_2\}$, построенного вокруг точки M_0 (т.е. $\alpha_1 < a < \beta_1, \alpha_2 < b < \beta_2$), из которого удалена сама точка M_0 .

В таком утверждении можно записать $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists O_{a,b} : \forall M(x, y) \in O_{a,b} \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

При этом предполагается, что в любой $O_{a,b} \exists M(x, y)$, в которых $f(x, y)$ имеет смысл (предельная точка).

3.2. Односторонние пределы функции

Введем понятие левой и правой окрестности точки x_0 - число.

Определение 3.2. Любой интервал $O_{x_0}^- = (\alpha, x_0)$ ($(O_{x_0}^+ = (x_0, \beta))$), правым (левым) концом которого является точка x_0 , назовем ее *левой (правой) окрестностью*.

Символически факт, что x принимает лишь значения, принадлежащие некоторой левой окрестности точки x_0 , будем обозначать

$$x \rightarrow x_0 - 0, \quad x < x_0.$$

$$\text{Аналогично} \quad x \rightarrow x_0 + 0, \quad x > x_0.$$

Определение 3.3. Число A называется пределом функции слева, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists O_{x_0}^- : \forall x \in X \cap O_{x_0}^- \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

И будем писать $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$, где X - область определения $f(x)$.

Аналогично $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = B$ - предел функции справа.

З а м е ч а н и е. Можно, конечно, ограничиться рассмотрением левых δ - окрестностей точки x_0 : $O_{x_0}^- = (x_0 - \delta, x_0)$, где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

$$O_{x_0}^+ = (x_0, x_0 + \delta), \text{ где } \delta = \delta(\varepsilon) > 0.$$

$$O(x_0 - 0, \delta) = \{x: x_0 - \delta < x \leq x_0\}, \delta > 0$$

$$O(x_0 + 0, \delta) = \{x: x_0 \leq x < x_0 + \delta\}, \delta > 0.$$

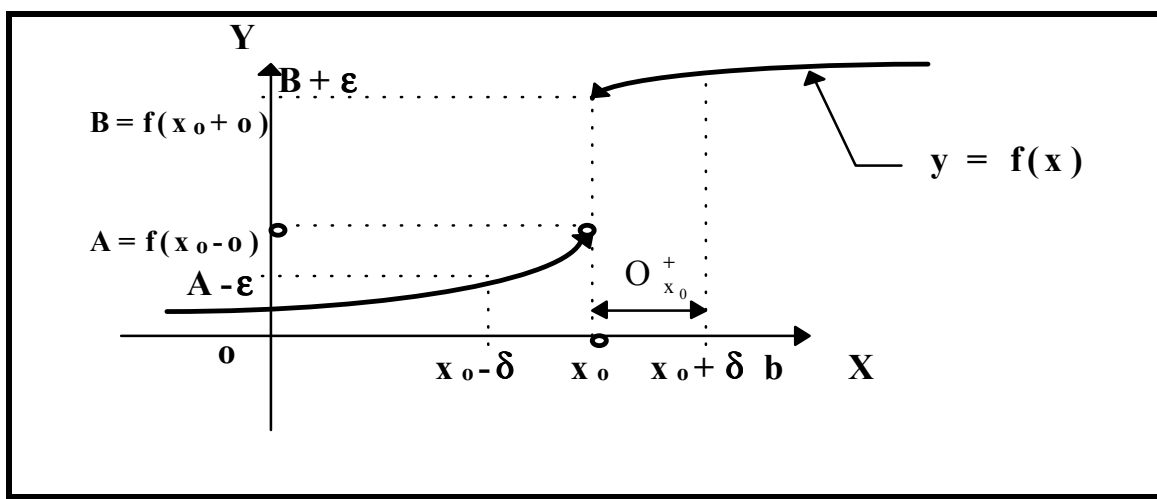
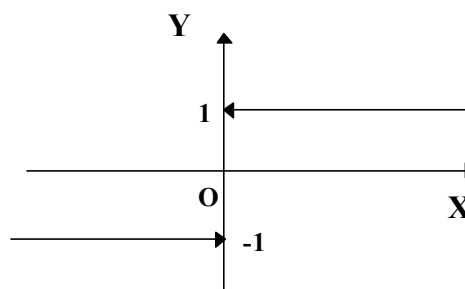


Рис.3.2.

Пример 3.1.

Пусть $f(x) = \operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$,

Определена для всех $x \neq 0$.



Здесь $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1$, а

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1.$$

Рис. 3.3.

Теорема 3.1. Для существования предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (x_0 - число) $\Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$,

тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$,

и следовательно $\exists O_{x_0}^- = (x_0 - \delta, x_0)$ и $O_{x_0}^+ = (x_0, x_0 + \delta)$:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \quad \text{и} \quad A = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

Обратно, если существуют пределы $A = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ и $A = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ и $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ такие, что, если $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ и, соответственно, $x_0 < x < x_0 + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Возьмем $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$. И тогда, согласно определения 3.1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Лемма 3.1. Если $f(x)$ имеет предел в точке x_0 , то существует окрестность этой точки (быть может, выброшенной точкой x_0), на которой функция ограничена.

Теорема 3.2. (Правило замены переменного для пределов функции)

Пусть существуют $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, $f(x) \neq y_0 \quad \forall x \neq x_0$ и $\lim_{y \rightarrow y_0} F(y)$
 $\Rightarrow$ при $x \rightarrow x_0$ существует предел сложной функции $F[f(x)]$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F[f(x)] = \lim_{y \rightarrow y_0} F(y)$$

3.3. Свойства пределов функции

Пусть все функции, рассматриваемые ниже, определены на (a, b) , кроме, быть может, фиксированной точки $x_0 \in (a, b)$, тогда верны следующие свойства:

- Если $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ и $A = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.
- Если $f(x) = C$ (const) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$.
- Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ сущ. $\Rightarrow \forall c - \text{const}$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, тогда:
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$;
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$;
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.

Все эти свойства доказываются одинаковым методом, основанным на соответствующих свойствах пределов последовательностей. Для доказательства этих свойств введем понятие бесконечно малых и бесконечно больших функций.

3.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 3.4. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется *бесконечно малой* функцией (или просто бесконечно малой) при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Лемма 3.2. Предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ существует и равен $A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая.

Доказательство: Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то, полагая

$f(x) - A = \alpha(x)$, получим $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - A = 0$.

обратно, если $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \Rightarrow A + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Из леммы 3.2. следует, что если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$, то в некоторой окрестности O_{x_0} знак $f(x)$ ($x \in X$) совпадает со знаком числа A .

Определение 3.5. Функция $f = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow x_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x)| > \varepsilon, \forall x : |x - x_0| < \delta, x < x_0$. В этом случае будем писать $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : f(x) > \varepsilon \quad (f(x) < -\varepsilon) \quad \forall x : |x - x_0| < \delta,$
 $x \neq x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty).$

По аналогии с конечными односторонними пределами определяются односторонние бесконечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$.

З а м е ч а н и е. Величина, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой.

Пусть $\alpha = \alpha(x), \alpha(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$ есть в бесконечно малой (или бесконечно большой) тогда $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая (бесконечно малая).

В дальнейшем будем использовать символические записи для любого числа $a > 0 : \frac{a}{+0} = +\infty, \quad \frac{a}{-0} = -\infty, \quad \frac{a}{0} = \infty, \quad \frac{a}{+\infty} = 0, \quad \frac{a}{-\infty} = -0, \quad \frac{a}{\infty} = 0$.

Рассмотрим свойства бесконечно малых.

- 1) Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых, определенная на общем множестве, есть величина бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.
- 2) Произведение ограниченной при $x \rightarrow x_0$ функции на бесконечно малых есть функция бесконечно малая.

2'') Произведение конечного числа бесконечно малого при $x \rightarrow x_0$ есть функция бесконечно малая.

3) $[\alpha(x)]^n$ - (n - целая положительная степень) $\alpha(x)$ – бесконечно малая тогда и $[\alpha(x)]^n$ – бесконечно малая.

4) Что касается отношения двух бесконечно малых

$$a(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0, \quad \beta(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

$\frac{\alpha(x)}{\rho(x)}$ - может быть функция произвольного поведения.

Но с помощью действия деления можно сравнить между собой бесконечно малые.

Определение 3.6. $\alpha(x), \beta(x)$ бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$ имеют одинаковый порядок, если их отношение имеет конечный предел, отличный от нуля, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K \neq 0$.

Определение 3.7. Порядок бесконечно малой $\beta(x)$ выше порядка бесконечно малой $\alpha(x)$, если отношение $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ есть бесконечно малое при $x \rightarrow x_0$, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$.

В этом случае пишут $\beta(x) = o[\alpha(x)]$ при $x \rightarrow x_0$.

Определение 3.8. Бесконечно малая $\beta(x)$ имеет предел n относительно бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha^n(x)} = K \neq 0.$$

3.5. Свойства пределов функции.

Докажем одно из свойств сформулированных в 1.5.3., например, свойство 4. Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Доказательство: Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$

Тогда имеем на основании 3.2. $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x), \beta(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$

Тогда $f(x) \cdot g(x) = A \cdot B + \gamma(x)$, где $\gamma(x) = A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)$ – есть бесконечно малая $\Rightarrow \gamma(x) \rightarrow 0$ бесконечно малая на основании свойств бесконечно малой функции.

Отсюда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Рассмотрим в качестве примера предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге.

Теорема. (Первый замечательный предел). Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство:

Пусть $x > 0$ и $x \rightarrow 0$, так что $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

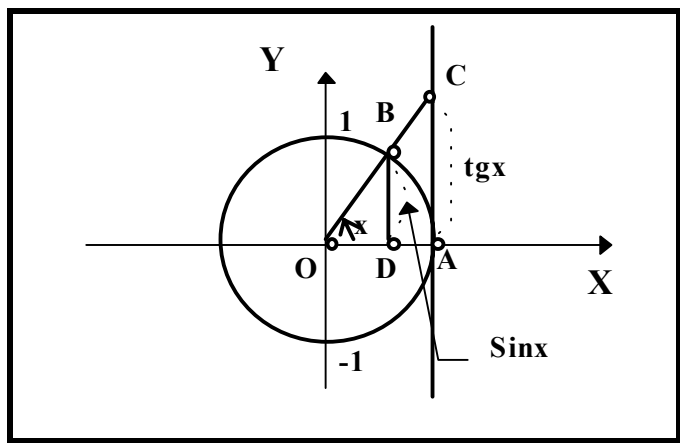


Рис.3.4.

В тригонометрическом круге $R = 1$ рассмотрим $S \Delta_{OAB}$, S сек. OAB , $S \Delta_{OAB}$

$$S \Delta_{OAB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |BO| = \frac{1}{2} \cdot \sin x < S \text{сек}_{OAB} = \frac{1}{2} x < S \Delta_{OAB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x$$

Получаем $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$

т.е. $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ разделим на $\sin x > 0$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{или} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Пусть теперь $x \rightarrow 0 + 0$, но $\lim_{x \rightarrow 0+0} \cos x = 1$ т.к. $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \rightarrow 0$

бесконечно малая по условию, то $\lim_{x \rightarrow 0+0} \cos x = 1$. Тогда функция $\frac{\sin x}{x}$ заключена между двумя функциями, имеющими предел, равный 1.

На основании свойства 1, получаем $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Если $x < 0$; имеем $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, где $-x > 0$.

Поэтому $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

З а м е ч а н и е. $\forall x \quad |\sin x| \leq |x|$, причем равенство имеет место при $x = 0$.

Второй замечательный предел. (Число e).

Ранее было доказано, что последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ имеет предел, заключенный между 2 и 3.

Можно доказать, что функция

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ при $x \rightarrow \infty$ стремится к e :

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Пусть $\frac{1}{x} = \alpha$ ($\alpha > -1$), тогда $e = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ или $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$,

где $e = 2,7182818284\dots$.

4. Непрерывность функции в точке

4.1. Точки непрерывности и точки разрыва функции

Определение 4.1. Функция $y = f(x)$, определенная на интервале (a, b) называется *непрерывной* в точке $x_0 \in (a, b)$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$,

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

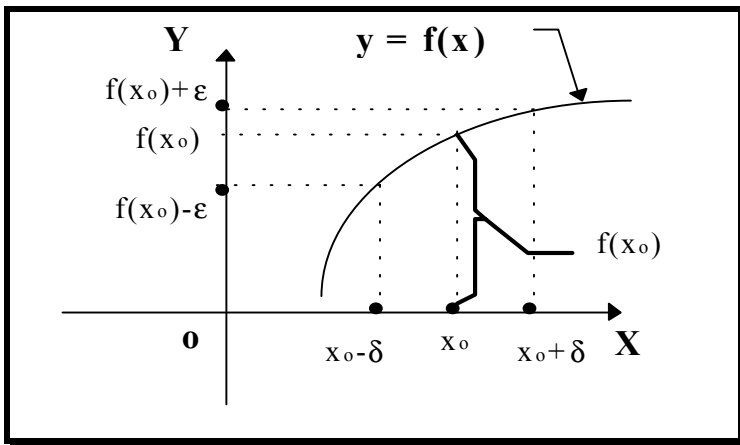


Рис.4.1.

Или, если ввести следующие обозначения:

$$\Delta x = x_0 - x, \quad \Delta y = f(x) - f(x_0)$$

Δx - приращение аргумента;

Δy - приращение функции.

Пусть $y = f(x)$,

где x - текущая точка из области определения.

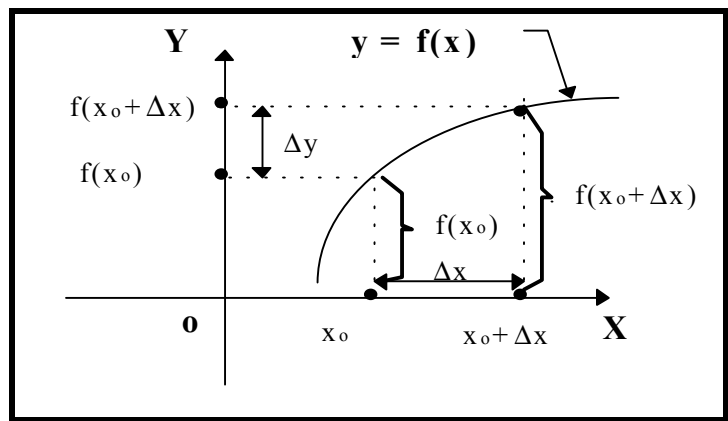


Рис.4.2.

Определение 4.2. Функция $f(x)$, определенная на X , называется *непрерывной* в точке $x = x_0$ ($x_0 \in X$).

1) функция в этой точке определена;

2) при $\Delta x = x_0 - x \rightarrow 0$ и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$,

т.е. функция называется непрерывной в данной точке, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$f(x)$ - непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta$, т.е. $0 < |\Delta x| < \delta$,
 $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определение 4.3. Функция называется непрерывной на данном множестве X , если

1) она определена на этом множестве, т.е.

$$\forall x \in X \exists f(x);$$

2) непрерывна в каждой точке этого множества, т.е.

$$\forall x \in X \text{ справедливо } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Определение 4.4. Точка, в которой нарушается непрерывность функции, называется точкой *разрыва* этой функции.

Пусть x_0 - точка разрыва функции f и существуют конечные пределы

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

тогда точка x называется *точкой разрыва первого рода*.

Величина $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком* функции f в точке x .

Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то x называется *точкой устранимого разрыва*.

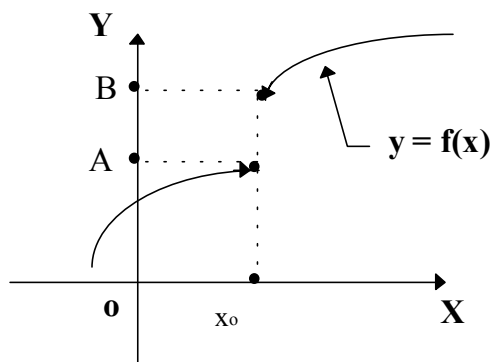
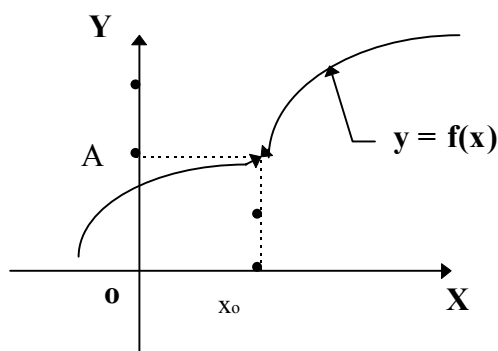
Если доопределить функцию таким образом, что

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x), \text{ то получим непрерывную функцию.}$$

Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется *точкой разрыва второго рода*. Таким образом, в точках второго рода по крайней мере один из пределов не существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

Примеры: Различные разрывы функции в точке представлены ниже.



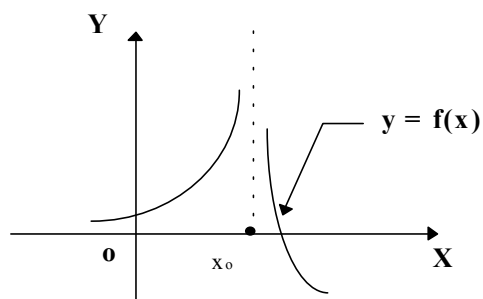


Рис.4.3

4.2. Основные теоремы о непрерывных функциях.

Теорема 4.1. Сумма конечного числа непрерывных функций, определенных на некотором множестве X , есть функция непрерывная.

Теорема 4.2. Произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

С л е д с т в и е. Целый полином $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ есть функция непрерывная.

Теорема 4.3. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, в которых делитель отличен от нуля.

Теорема 4.4. Непрерывная функция от непрерывной функции есть функция непрерывная.

Теорема 4.5. Если $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на промежутке $\langle a, b \rangle$, то существует обратная функция $x = \varphi(y)$, определенная на промежутке $\langle f(a), f(b) \rangle$, причем последняя также монотонна и непрерывна в том же смысле.

В качестве упражнения теоремы 4.1. - 4.5. - доказать самостоятельно.

Пример. Рассмотрим обратные функции к данным:

а) $y = \sqrt[4]{x}$; б) $y = \log_a x$.

Рассмотрим теперь непрерывность функции на множествах.

Определение 4.5. Пусть f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Функция f называется непрерывной в точке $x^{(0)} \in E$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$:

$$\forall x \in X, \text{ удовлетворяющих условию } \rho(x, x^{(0)}) < \delta \text{ выполняется неравенство } |f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon.$$

Примем без доказательства ряд простых, но важных теорем.

Теорема 4.6. (Кантора) Функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве, является равномерно непрерывной.

Определение 4.6. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ называется равномерно непрерывной на E , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x', x'' \in E$$

удовлетворяющих условию $\rho(x', x'') < \delta$ будет выполнено неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема 4.7. (Вейерштрасса) Всякая непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке как наибольшее, так и наименьшее значение.

Теорема 4.8. (Коши) Если f - непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, то

$$\forall A < C < B \quad \exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = C.$$

С л е д с т в и е. Если f - непрерывна на $[a, b]$, а на концах отрезка принимает значения переменных знаков (является знакопеременной), то $\exists$ точка $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$.

5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

5.1. Производная функции в точке

Определение 5.1. Пусть $y = f(x)$ определена в некоторой точке $O(x_0)$ и пусть x - такая точка : $x \in O(x_0) \quad x \neq x_0$. Если отношение

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

имеет предел при $x \rightarrow x_0$, то этот предел называется *производной* функции в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (5.1)$$

Если использовать обозначения $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = f(\Delta x + x_0) - f(x_0)$, тогда (5.1) запишем

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (5.2)$$

Если для некоторого значения x_0 выполняется условие

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm \infty,$$

то говорят, что для этого значения существует *бесконечная* производная.

Определение 5.2. Если f определена в односторонней области правой, (левой) точки x_0 и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad , \quad \left(\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right),$$

то o называется производной справа, (слева) и обозначается $f'_+(x_0)$, $(f'_-(x_0))$.

Операция вычисления производной от данной функции называется операцией *дифференцирования*.

Примеры :

1. $y = c$ (c - const), т.к. $\Delta y = c - c = 0$, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 = c'$.

2. $y = \sin x$, (самостоятельно);

3. $y = \cos x$, (самостоятельно);

4. $y = a^x$

Пусть необходимо определить $y' = (a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$, тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \right] = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Докажем, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a \quad (5.3)$$

Функция $y = a^x - 1$ строго монотонна и непрерывна

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$, поэтому обратная функция $x = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$ так же монотонна и

непрерывна при $y > -1$.

При $x = 0 \Rightarrow y = 0$, тогда условия $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ эквивалентны. Сделаем замену переменных в (5.3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \ln a}{\ln(1+y)} = \ln a \cdot \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}} = \ln a.$$

Следовательно,

$(a^x)' = a^x \ln a$, если $a = e \Rightarrow (e^x)' = e^x \ln e$, т.е. показательная функция с основанием e имеет производную, совпадающую с самой функцией.

5. $y = x^n$, n - положительное целое.

Используем разложение бинома :

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + K + (\Delta x)^n$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2} \cdot \Delta x + K + (\Delta x)^{n-1}$$

при $\Delta x \rightarrow 0$ получим, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = n \cdot x^{n-1} : \quad (x^n)' = n x^{n-1}.$$

В дальнейшем мы увидим, что эта формула справедлива, если n - вещественное число.

Теорема 5.1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке функция непрерывна. Обратное утверждение неверно : непрерывная функция может и не иметь производной.

Доказательство :

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , т.е.

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \quad (\Delta x \neq 0).$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x .

6. Дифференциал функции

Определение 6.1. Пусть $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть $\Delta x = x - x_0$. Функция f называется дифференцированной в точке x_0 , если приращение $\Delta y = f(\Delta x + x_0) - f(x_0)$ представимо в виде

$$\Delta y = A \Delta x + \alpha(\Delta x), \quad (6.1)$$

где $A = \text{const}$, $\alpha(\Delta x) = O(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Линейная функция $A \Delta x$ от (Δx) называется *дифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или dy .

Таким образом,

$$\Delta y = dy + O(\Delta x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0. \quad (6.2)$$

$$dy = A \Delta x. \quad (6.3)$$

З а м е ч а н и е. Дифференциал функции $dy = A \Delta x$ определен для

$\forall \Delta x \in (-\infty, +\infty)$, в то время как приращение функции $\Delta y = f(\Delta x + x_0) - f(x_0)$ можно рассматривать только для таких Δx , для которых $\Delta x + x_0 \in X$.

(X - область определения функции f).

Пусть β - бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$, если β представима в виде $\beta = \alpha + O(\alpha)$, где α - бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$, то бесконечно малая α называется главной частью бесконечно малой β .

Итак, если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $x - x_0$, она равна линейной

функции; иначе говоря, в этом случае функция f в окрестности точки x_0 ведет себя “почти как линейная функция”

$$y_0 + A(x - x_0), \quad (6.4)$$

причем погрешность при замене функции f линейной функцией (6.4) будет тем меньше, чем меньше разность $x - x_0$, и более того, отношение этой погрешности к разности $x - x_0$ стремится к нулю при $x \rightarrow x_0$.

Для большей симметрии записи дифференциала переменную Δx обозначим dx и назовем дифференциалом независимого переменного.

Тогда $dy = A dx$.

Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого интервала, то ее дифференциал является функцией двух переменных - точки x и переменной dx : $dy = A(x) dx$.

Пример:

Пусть $y = x^3$, тогда

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

главная часть при $\Delta x \rightarrow 0$ равна $3x^2 \Delta x$, поэтому $dy = 3x^2 dx$.

Теперь установим связь между дифференцируемостью функции в точке и ее производной в той же точке.

Теорема 6.2. Для дифференцируемости функции f в точке x_0 необходимо и достаточно чтобы она имела производную в этой точке, тогда в этом случае

$$dy = f'(x)dx.$$

Доказательство: (необходимость).

Пусть f дифференцируема в точке x_0 , т.е.

$$\Delta y = A \Delta x + O(\Delta x)$$

тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{O(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Поэтому производная $f'(x_0)$ существует и равна A . Отсюда $dy = f'(x_0) dx$.

(достаточность)

Пусть существует производная, т.е. существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0.$$

И тогда $\forall \Delta x \neq 0$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x \quad (6.5)$$

И так как $\varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x = O(\Delta x)$, то наличие равенства (6.5) означает дифференцируемость.

Из доказанного следует, что A - коэффициент в определении дифференциала - определен однозначно.

Из формулы (6.5) получаем новое обозначение для производной

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Примеры :

$$\begin{aligned} dC &= 0, & (C - \text{Const}); \\ d\sin(x) &= \cos(x)dx; \\ d\cos(x) &= -\sin(x)dx; \\ da^x &= a^x \ln a \, dx, & (de^x = e^x dx); \\ dx^n &= n x^{n-1} dx, & (n - \text{положительное число}). \end{aligned}$$

7. Геометрический смысл производной и дифференциала.

Понятие производной и дифференциала функции в данной точке связано с понятием касательной в этой точке.

Пусть $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) и непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$ и пусть $y_0 = f(x_0)$. Введем в рассмотрение точки:

$$M_0(x_0, y_0), \quad x_0 + h \in (a, b); \quad M_h(x_0 + h, f(x_0 + h)).$$

Проведем секущую $M_0 M_h$, тогда уравнение прямой, проходящей через две данные точки, можно записать

$$y = K(h)(x - x_0) + y_0,$$

$$\text{где } K(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (7.1)$$

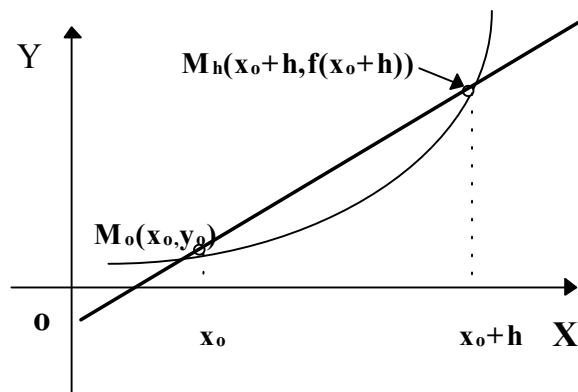


Рис. 7.1.

Покажем, что при $h \rightarrow 0$ расстояние $\rho(M_0, M_h) \rightarrow 0$, в этом случае будем говорить, что точка $M_h \rightarrow M_0$. Действительно, в точке x_0 функция f - непрерывна, следовательно,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0, \text{ а } \rho(M_0, M_h) = \sqrt{h^2 + [f(x_0 + h) - f(x_0)]^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

В силу равенства (7.1) существование предела функции $K(h)$ эквивалентно существованию производной (конечной или бесконечной), причем $\lim_{h \rightarrow 0} K(h) = K_0 = f'(x_0)$.

Определение 7.1. Если существует предел $\lim_{h \rightarrow 0} K(h) = K_0$, то прямая

$$y = K_0(x - x_0) + y_0, \quad (7.2)$$

которая получается из прямой $y = K(h)(x - x_0) + y_0$ при $h \rightarrow 0$ называется *наклонной касательной* к графику f в точке (x_0, y_0) .

Определение 7.2. Если $\lim_{h \rightarrow 0} K(h) = \infty$, то прямая $x = x_0$, (7.3)

которая получается из $\frac{y}{K(h)} = x - x_0 + \frac{y_0}{K(h)}$ при $h \rightarrow 0$, называется *вертикальной касательной* к графику f в точке (x_0, y_0) .

Предельное положение секущей $M_0 M_h$ при $h \rightarrow 0$ называется касательным к графику f в точке x_0 .

В результате мы пришли к следующей теореме.

Теорема 7.1. Пусть функция f непрерывная при $x = x_0$. В точке $(x_0, f(x_0))$ существует наклонная, касательная к графику функции f , тогда и только тогда, когда f имеет в точке x_0 производную. При этом уравнение касательной имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ и, значит, производная в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к оси OX , а дифференциал в точке x_0 равен приращению ординаты касательной.

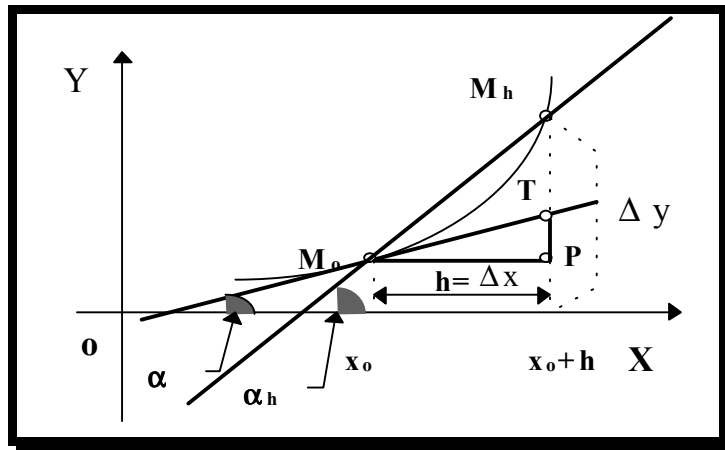


Рис.7.2.

$$\operatorname{tg} \alpha_h = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ тогда получим } K_0 = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{h \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \alpha_h = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$PT = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha = h \cdot \operatorname{tg} \alpha = y' \cdot dx = dy.$$

Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x_0 получает приращение Δx .

Заметим, что $\Delta y \neq dy$. То есть отсюда мы имеем приближенное равенство:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cong f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (7.4)$$

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (7.5)$$

Таким образом, наклонная касательная к графику функции обладает тем свойством, что разность ординат графика функции и этой касательной есть величина бесконечно малая по сравнению с приращением аргумента при $x \rightarrow x_0$.

8. Основные правила для дифференцируемых функций.

Теорема 8.1. Пусть $u = f_1(x)$ и $v = f_2(x)$ имеют производные в точке x_0 , тогда

$$1. (u + v)' = u' + v' ;$$

$$2. (u \cdot v)' = v' u + u' \cdot v ;$$

$$3. \text{ если } v = f_2(x) \neq 0 \text{ в точке } x_0$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}.$$

Доказательство. (Самостоятельно).

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы для $u = f(x)$,

$$c - \text{const, тогда } (c \cdot u)' = c \cdot u'.$$

Следствие 2. Пусть выполняется условие теоремы для последовательности

$$\text{функций } u_1 = f_1(x), u_2 = f_2(x), \dots, u_n = f_n(x)$$

$$\text{и } c_1, c_2, \dots, c_n - \text{const.}$$

$$\text{Тогда } (c_1 \cdot u_1 + \dots + c_n u_n)' = c_1 u_1' + \dots + c_n \cdot u_n'.$$

Свойства функции 1, 2, 3 переносятся на дифференциалы функции при тех же предположениях в точке x_0 .

$$1. d(u_1 + v_2) = du_1 + dv_2 ,$$

$$d(cu) = c \cdot du;$$

$$2. d(u_1 \cdot v_2) = v_2 du_1 + u_1 dv_2 ;$$

$$3. d\left(\frac{u_1}{v_2}\right) = \frac{v \cdot du - u dv}{v^2}$$

8.1. Производная обратной функции

Теорема 8.2. Пусть $y = f(x)$ - определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и пусть в точке x_0 существует производная

$\frac{df(x_0)}{dx} \neq 0$, тогда обратная функции $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$,

которая вычисляется
$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}} \quad (8.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Зафиксирована окрестность $O(x_0)$, в которой выполнены условия теоремы, тогда обратная функция определена, однозначна и непрерывна на некотором интервале, содержащем точку y_0 , а именно на образе указанной выше окрестности точки x_0 и, значит, если $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $y = f(x)$ то условия $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ эквивалентны.

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}, \quad \text{при } \Delta x \rightarrow 0$$

существует предел левой части, т.к. существует предел правой части

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}$$

Но $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{df^{-1}(y_0)}{\Delta y}$, поэтому $\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}$, что и требовалось доказать.

Геометрическая интерпретация доказательства очевидна.

Из геометрического смысла производной имеем $\frac{df(x_0)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$,

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \operatorname{tg} \beta.$$

Очевидно, что $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, поэтому

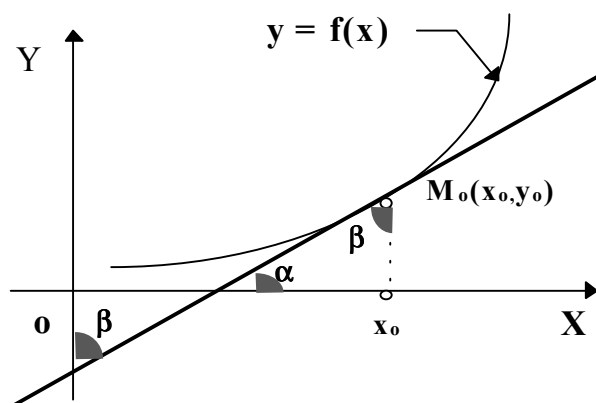


Рис. 8.1.

$$\frac{df'(y_0)}{dy} = \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta} = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}.$$

Примеры:

$$1. y = \arcsin x, \quad x = \sin y$$

$$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (\arcsin x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

так как $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos y \geq 0$, поэтому

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$2. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \text{- самостоятельно.}$$

$$3. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \text{- самостоятельно.}$$

$$4. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad \text{- самостоятельно.}$$

$$5. y = \log_a x, \quad x = a^y, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0, \quad y \in (-\infty; +\infty)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\log_a x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a};$$

$$\text{если } a = e \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

8.2. Производная и дифференциал сложной функции

Теорема 8.3. Пусть $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $z = f(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 имеет смысл сложная функция

$$\Phi(x) = F(f(x))$$

и эта функция имеет производную в точке x_0 , причем

$$\Phi'(x_0) = F'(y_0)f'(x_0), \quad (8.2)$$

или опуская значения аргументов, $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Доказательство: так как $y = f(x)$, $z = F(y)$ имеют производную в точке x_0 , то они непрерывны (см. теорему 5.1) соответственно в точке x_0 , y_0 и имеем сложную функцию $\Phi(x) = F[f(x)]$, которая дифференцируема в точке y_0

$$\Delta z = F'(y_0) \Delta y + \varepsilon(\Delta y) \cdot \Delta y, \quad (8.3)$$

где $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$, функция не определена при $\Delta y = 0$, но мы доопределим: при $\Delta y = 0$ положим $\varepsilon(0) = 0$, тогда $\varepsilon(\Delta y)$ будет непрерывна и при $\Delta y = 0$.

Поделим обе части уравнения (8.3) на $\Delta x \neq 0$.

Получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (8.4)$$

$$y = f(x) \text{ имеет производную в точке } x_0, \text{ т.е. существует } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

а из существующей производной $f'(x_0)$ следует непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0 : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

При $\Delta x = 0$ имеет $\Delta y = 0$, следовательно, Δy как функция от Δx , непрерывна в точке $\Delta x = 0$. Поэтому согласно правила замены переменных в пределах непрерывных функций имеем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$.

Теперь в (8.4), переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим (8.3).

Следствие 1. Инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных

$$dz = F'(y_0) dy = \Phi'(x_0) dx \quad (8.5)$$

Следствие 2. Эту теорему по индукции можно распространить на любое конечное число суперпозиций функции.

Пример: $z(y(x(t)))$ в случае дифференцирования $z(y)$, $y(x)$, $x(t)$ в соответствующих точках имеет место формула

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

В случае сложной функции для обозначения производной используется нижний индекс, указывающий, по какой из переменных берется производная

$$z'_x = z'_y \cdot y'_x$$

Примеры:

1. Пусть $y = x^\alpha$, $x > 0$

нужно определить $\frac{dy}{dx}$.

Пусть $x^\alpha = l^u$, где $u = \alpha \cdot \ln x$, тогда

$$\frac{du}{dx} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \frac{dx^\alpha}{dx} = \frac{dl^u}{dx} = \frac{dl^u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = l^u \cdot \frac{\alpha}{x} = l^{\alpha \cdot \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

2. $y = \ln^2 \arcsin \frac{1}{x}$

$$y' = 2 \ln \arcsin \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\arcsin \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{-2 \ln \arcsin \frac{1}{x}}{|x| \cdot \sqrt{x^2 - 1} \cdot \arcsin \frac{1}{x}}$$

3. Пусть $F(x, y) = 0$, т.е. функция задана неявно, нужно найти производную такой функции.

$F(x, y(x)) = 0$ рассмотрим как сложную функцию и определим $\frac{dy}{dx}$.

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Метод дифференцирования неявных функций может быть применен к выводу формул, полученных ранее.

Пусть $U = u(x)$ - дифференцируемая функция, то

$$(\sin U)' = U' \cdot \cos u; \quad (I^u)' = I^u \cdot u';$$

$$(\cos U)' = -U' \sin u; \quad (\ln U)' = \frac{U'}{U}, \quad (U > 0);$$

$$(\operatorname{tg} U)' = \frac{U'}{\cos^2 U}; \quad (\arcsin U)' = \frac{U'}{\sqrt{1 - U^2}};$$

$$(\operatorname{ctg} U)' = -\frac{U'}{\sin^2 U}; \quad (\arccos U)' = -\frac{U'}{\sqrt{1 - U^2}};$$

$$(U^2)' = \alpha U^{\alpha-1} \cdot U', \quad (U > 0); \quad (\operatorname{arctg} U)' = \frac{U'}{1 + U^2};$$

$$(\alpha^u)' = \alpha^u \cdot U' \ln \alpha; \quad (\operatorname{arcctg} U)' = -\frac{U'}{1 + U^2}.$$

Если $u = x$ тогда, получим производные основных элементарных функций.

9. Понятие о производных и дифференциалах высших порядков.

Производная $f'(x)$ от функции $F(x)$ называется производной первого порядка и представляет собой некоторую функцию. И, если эта функция тоже имеет производную, тогда производная от производной первого порядка называется производной второго порядка и обозначается $f''(x)$, т.е.

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Аналогично определяется производная $f^{(n)}(x)$ любого порядка $n=1, 2, \dots$; если существует производная $f^{(n-1)}(x)$ $n-1$ порядка (при этом под производной нулевого порядка подразумевается сама функция $f^{(0)}(x) = y = f(x)$).

Согласно определения производной в точке x_0 получим

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}, \quad n = 1, 2, \dots$$

З а м е ч а н и е. Когда говорят, что f имеет в точке x_0 производную порядка n , то это значит, что в некоторой окрестности точки x_0 у функции f существуют все производные низших порядков.

Пусть x - независимая переменная и $y = f(x)$ есть дифференцируемая функция на некотором интервале (a, b) . Тогда

$df(x) = f'(x) dx$; есть функция двух переменных: x и dx .

Будем предполагать, что dx - дифференциал независимой переменной x - имеет произвольное, но фиксированное значение.

Если существует вторая производная $f''(x)$, то $df(x)$ имеет дифференциал и он называется вторым дифференциалом.

Определение 9.1. Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) $d^2 f(x)$ функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции

$$d^2 f(x) = d [df(x)], \quad (9.6)$$

Аналогично, дифференциал третьего порядка

$$d^3 f(x) = d [d^2 f(x)].$$

Так последовательно определяются дифференциалы высших порядков.

Выведем формулу для дифференциала второго порядка. Пусть $f(x)$ - дважды дифференцируема (т.е. имеет вторую производную), т.к.

$df(x) = f'(x) dx$, тогда согласно (9.6) имеем $d^2 f(x) = d [df(x)]$.

Если x - независимая переменная, то dx , равный Δx , очевидно, не зависит от x по отношению к переменной x играет роль постоянной.

$d^2 f(x) = d [f'(x) dx] = dx \cdot d [f'(x)] = \{f'(x) - \text{ снова некоторая функция от } x\} = [f''(x) dx] dx = f''(x) dx^2$, где $dx^2 = (dx)^2$.

Таким образом, мы доказали теорему.

Теорема 9.3. Дифференциал второго порядка от данной функции равен произведению производной второго порядка этой функции на квадрат дифференциала независимой переменной.

Если положить $f(x) = y$, то $d^2 y = y'' dx^2$ и тогда

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (9.7)$$

З а м е ч а н и е. Формула $d^2 f(x) = f''(x) dx^2$, вообще говоря неверна, если x не является независимой переменной, т.к. dx нельзя рассматривать как множитель, не зависящий от x .

10. Приложения производной

10.1. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Теорема 10.1. (Ферма). Пусть функция f определена на некотором интервале (a,b) и в точке $\xi \in (a,b)$ принимает экстремальное значение (принимает наибольшее или наименьшее значение) на (a,b) . Если производная $f'(\xi)$ существует, то она равна нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Пусть для определенности f в точке ξ принимает наибольшее значение, т.е. $f(x) \leq f(\xi)$ для всех $x \in (a,b)$, тогда, если $x < \xi$

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0, \quad (10.1)$$

если $\xi < x$

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0. \quad (10.2)$$

Если существует производная $f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$, то в пределе при $x \rightarrow \xi$ из

(10.1) получим, что $f'(\xi) \geq 0$, а из (10.2) при $x \rightarrow \xi + 0 \Rightarrow f'(\xi) \leq 0$, что возможно лишь в случае $f'(\xi) = 0$.

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма состоит в том, что если в точке $\xi \in (a, b)$ функция f принимает наибольшее или наименьшее значение, то касательная в точке $(\xi, f(\xi))$ к графику функции параллельна оси Ox .

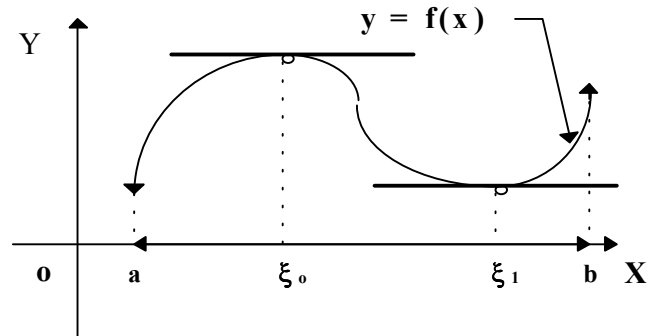


Рис. 10.1.

Теорема 10.2. (Ролль). Пусть функция f :

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2. имеет в каждой точке интервала (a, b) производную;
3. $f(a) = f(b)$.

Тогда существует точка ξ такая, что $f'(\xi) = 0$, $a < \xi < b$.

Доказательство:

Пусть f непрерывна на $[a, b]$ принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения в некоторых точках этого отрезка. Обозначим

$M = \max f(x)$, $m = \min f(x)$ тогда для всех $x \in [a, b]$ справедливо $m \leq f(x) \leq M$.

Если $m = M \Rightarrow f - \text{const}$ и, следовательно, $f' \equiv 0$.

Если $m \neq M \Rightarrow$ из условия $f(a) = f(b)$ следует, что хоть одно из значений m или M не принимается на концах $[a, b]$. Пусть, например, это будет точка M , т.е. существует $\xi \in (a, b)$, что $f(\xi) = M$. Тогда из теоремы 10.1 следует, что $f' = 0$.

Геометрически теорема Ролля означает, что если выполнены условия теоремы, то существует точка, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

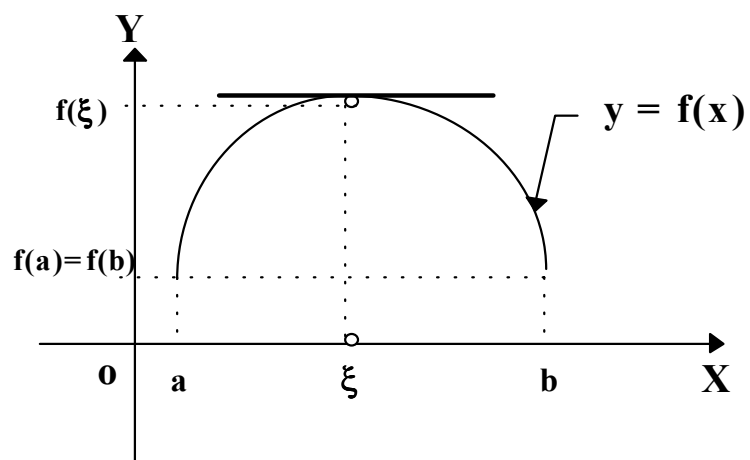


Рис. 10.2.

Другая формулировка теоремы Ролля.

Между двумя последовательными корнями дифференцируемой функции всегда содержится по крайней мере один корень ее производной.

З а м е ч а н и е. Все три условия теоремы существенны.

Если не выполняется одно из условий, то не существует такой точки $\xi \in (a,b)$, что $f'(\xi) = 0$.

Примеры:

1. $f(x)$ определена на $[0,1]$ и равна x .

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1); \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

f удовлетворяет условиям 2 и 3, но не удовлетворяет условию 1.

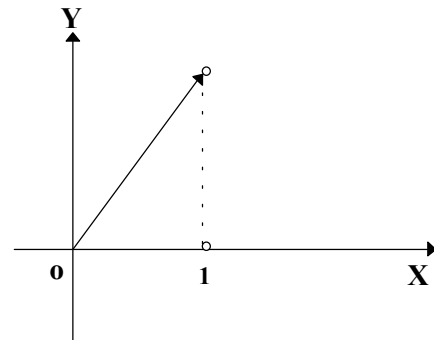


Рис.10.3.

2. $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$

f удовлетворяет условиям 1 и 3, но не удовлетворяет условию 2.

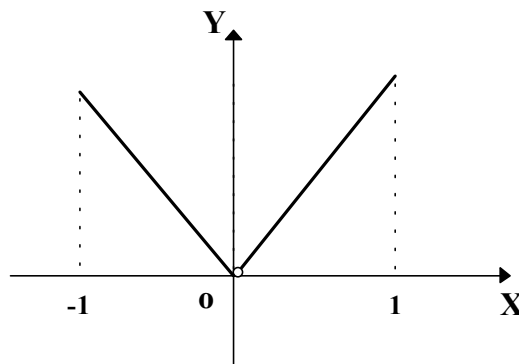


Рис.10.4.

3. $y = x$, $x \in [0,1]$

f удовлетворяет условиям 1 и 2, но не удовлетворяет условию 3.

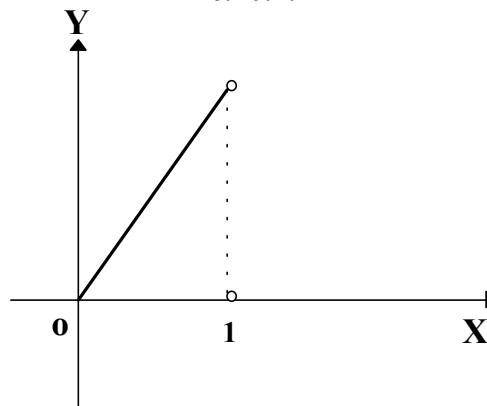


Рис. 10.5.

Обобщением теоремы Ролля является следующая теорема.

Теорема 10.3. (Лагранж). Пусть f непрерывна на $[a,b]$ и имеет производную в каждой точке интервала (a,b) . Тогда существует такая точка ξ , что:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \quad a < \xi < b \quad (10.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \lambda x, \quad (10.4)$$

где число λ выберем таким образом, чтобы $F(a) = F(b)$, т.е. чтобы $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$. Для этого достаточно взять

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (10.5)$$

Тогда для $F(x)$ выполнены условия теоремы Ролля: $F(x)$ - непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и принимает на концах одинаковые значения, поэтому существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $F'(\xi) = 0$. Тогда из (10.4) получаем $F'(x) = f'(x) - \lambda$, поэтому $f'(\xi) - \lambda = 0$ и из (10.5) получим

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (10.6)$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем.

Пусть $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ - точки графика функции f , AB - хорда, соединяющая точки A и B . Тогда отношение

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \alpha = f'(\xi).$$

Т.е. в условиях теоремы можно сказать, что найдется точка, возможно не одна, в которой касательная к графику параллельна хорде.

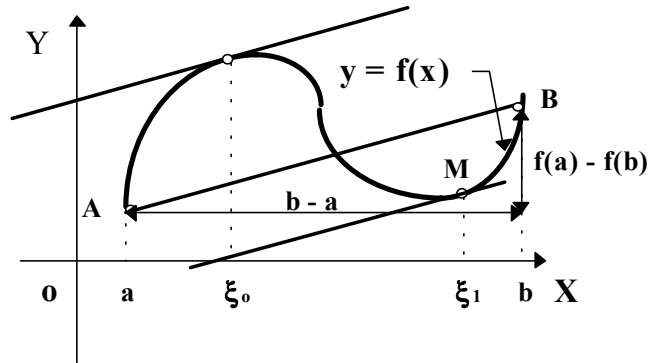


Рис. 10.6.

З а м е ч а н и е. Теорема Лагранжа найдет ряд важнейших приложений в дальнейшем.

Запишем другую форму (10.6)

$$f(a) - f(b) = f'(\xi) (a - b) \quad (10.7)$$

т.е. она справедлива для $a > b$ и $b > a$.

Следствие 1. Если $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x) = C - \text{const.}$

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Пусть $f'(x) = 0$ при $x \in (a, b)$ тогда для любого $x \in (a, b)$

$$f(x) - f(b) = 0 \cdot (x - b). \text{ Следовательно } f(x) = f(b) = \text{const.}$$

Следствие 2. Если $f(x)$, $g(x)$ - дифференцируемые на (a, b) и (в этих точках)

$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a, b)$, а на концах промежутка, если они входят в область определения, - непрерывны, то эти функции отличаются на $C - \text{Const}$:

$$f(x) - g(x) = C.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $f'(x) = g'(x)$ при $x \in \langle a, b \rangle$, тогда на этом промежутке $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x) = 0$. В силу следствия 1 имеем

$$F'(x) = 0 \Rightarrow F(x) = C, \text{ а здесь } F(x) = f(x) - g(x) = C.$$

10.2. Возрастание и убывание функции одной переменной.

Определение 10.1. Функция $f(x)$ *возрастает* на промежутке $\langle a, b \rangle$, если из того, что $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$. И $f(x)$ *убывает* на промежутке $\langle a, b \rangle$, если $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$.

Теорема 10.4. (необходимый признак возрастания (убывания) функции).

1. Если $f(x)$ возрастает и дифференцируема на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f'(x) \geq 0$
 $\forall x \in \langle a, b \rangle$.
2. Если $f(x)$ убывает и дифференцируема на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f'(x) \leq 0$
 для всех $x \in \langle a, b \rangle$.

Доказательство:

1). Пусть $f(x)$ - дифференцируема и возрастает на $\langle a, b \rangle$. Согласно определению производной,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если $x, x + \Delta x \in \langle a, b \rangle$, то в силу возрастания знак приращения функции $f(x + \Delta x) - f(x)$ совпадает со знаком приращения Δx (где $\Delta x \neq 0$). Следовательно,

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0. \quad (*)$$

Переходя в (*) к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, имеем $f'(x) \geq 0$.

2). Доказательство второй части теоремы аналогично.

Если f убывает, то согласно определению, $x_2 > x_1 \Rightarrow \Delta x > 0$ и $f(x + \Delta x) - f(x) \leq 0$ следовательно $f'(x) \leq 0$ (рис.10.7. b)).

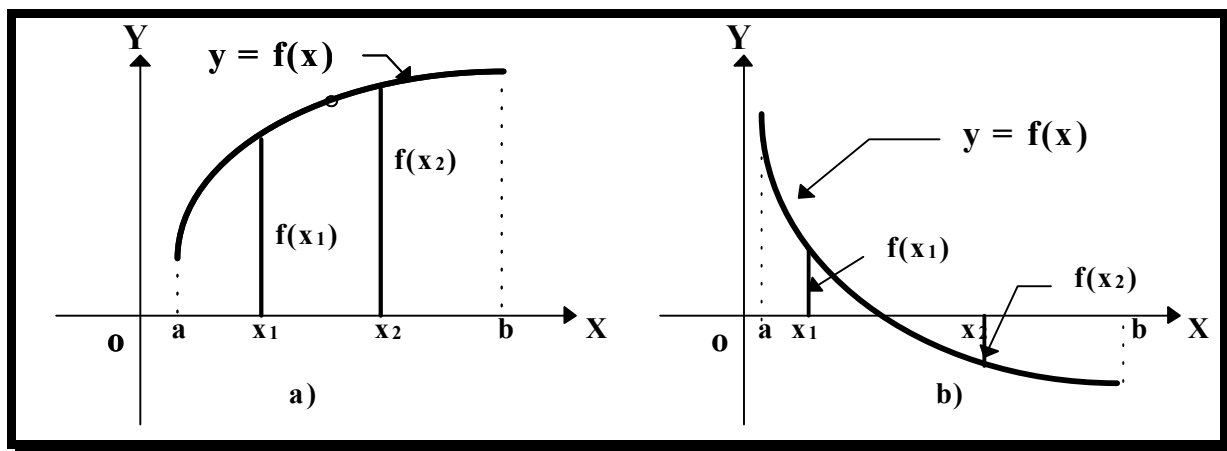


Рис.10.7.

Теорема 10.5. (достаточный признак возрастания и убывания функции).

1. Если $f'(x) > 0, \forall x \in \langle a, b \rangle$, тогда $f(x)$ возрастает на этом промежутке.
2. Если $f'(x) < 0, \forall x \in \langle a, b \rangle$, тогда $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Доказательство:

Пусть $f(x)$ такая, что $f'(x) > 0$ при $a < x < b$. В силу теоремы Лагранжа $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ можно записать $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $\xi \in (x_1, x_2)$, т.е. $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Но так как $f'(\xi) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$. По определению, $f(x)$ - возрастает.

2. Доказать самостоятельно.

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x)$ возрастает или $f(x)$ убывает, то она называется *монотонной*. Промежутки возрастания или убывания функции называются *промежутками монотонности*.

10.3. Понятие о правиле Лопиталю.

При определении предела некоторой функции, заданной аналитически, при $x \rightarrow a$ или ∞ , $+\infty$, $-\infty$, при формальной подстановке этой величины в качестве аргумента в формулу получаем неопределенности вида: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0 , 0^∞ или 1^∞ .

В этом случае нельзя судить о существовании предела. Наряду с основными методами раскрытия неопределенности при нахождении предела существуют и другие, которые носят название *правил Лопиталю*.

$$\text{Рассмотрим отношение } f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности $O(a)$ точки a , исключая, быть может, саму точку a . Может случиться, что при $x \rightarrow a$ $\varphi(x)$, $\psi(x) \rightarrow 0$ или ∞ или одновременно являются бесконечно малыми или бесконечно большими. Тогда говорят, что в точке a имеет место неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. В этом случае, используя производные $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ можно сформулировать простое правило для нахождения предела $f(x)$ при $x \rightarrow a$.

Теорема 10.6. (*Лопиталь*). Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношений их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$ для простоты еще предположим, что $\varphi(x)$, $\psi(x)$,

$\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ непрерывны в точке a и $\psi'(a) \neq 0$.

$$\text{Итак, пусть } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(a) = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \psi(a) = 0 \quad (2)$$

Разность $\varphi(x) - \varphi(a)$ можно рассматривать как приращение функции $\varphi(x)$ в точке a , соответствующее приращению $\Delta x = x - a$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(a), \quad (3)$$

Аналогично,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\psi(x) - \psi(a)}{x - a} = \psi'(a) \neq 0 \quad (4)$$

Учитывая (1), (2), при $x \neq a$ получим

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}{\frac{\psi(x) - \psi(a)}{x - a}},$$

переходя к пределу при $x \rightarrow a$ будем иметь

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \quad (5)$$

Но мы предположили, что $\varphi'(x), \psi'(x)$ непрерывны при $x \rightarrow a$, причем $\psi'(a) \neq 0$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \varphi'(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \psi'(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \quad (6)$$

Сопоставив (5) и (6), получим правило Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \cdot \ln 2}{\cos x} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

З а м е ч а н и е. Неопределенность вида $0 \cdot \infty, \infty - \infty$ нужно привести к виду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ или $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ и применить правило Лопиталя.

$$3) \lim_{x \rightarrow +0} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$$

Функции вида $f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)}$ сначала надо прологарифмировать, а затем применять правило Лопиталя.

Пример.

$$A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x},$$

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\ln \sin x] \cdot \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{Ctg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (-\sin x \cdot \cos x) = 0.$$

Окончательно $A = e^0 = 1$.

11. Формула Тейлора

11.1. Вывод формулы Тейлора для многочлена

Пусть данный многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \quad (11.1)$$

требуется разложить по степеням бинорма $x - x_0$, где x_0 - некоторое число.

Представим

$$P(x) = A_0 + A_1 \cdot (x - x_0) + A_2 \cdot (x - x_0)^2 + \dots + A_n \cdot (x - x_0)^n \quad (11.2)$$

т.е. пусть это наше искомое разложение и теперь определим коэффициент A_i ($i=0 \div n$). Для этого применим так называемый метод неопределенных коэффициентов.

Полагая $x = x_0$ в тождестве (11.2), получим $P(x_0) = A_0$.

Дифференцируя (11.2), будем иметь

$$P'(x) = A_1 + 2 \cdot A_2 \cdot (x - x_0) + \dots + n \cdot A_n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$

Положим $x = x_0$. Получим, что $P'(x_0) = A_1$.

После вторичного дифференцирования находим

$$P''(x) = 2! \cdot A_2 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot A_n \cdot (x - x_0)^{n-2}.$$

Откуда
$$A_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}.$$

Очевидно, что, используя этот прием, получим общую формулу:

$$A_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad (11.3)$$

где по определению полагают $P^{(0)}(x) = P(x)$ и $0! = 1$.

Эту формулу можно доказать методом математической индукции (самостоятельно).

Подставим теперь коэффициенты (11.3) в (11.2). Получим формулу Тейлора для многочлена

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n. \quad (11.4)$$

Или короче

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k. \quad (11.5)$$

З а м е ч а н и е. Нетрудно убедиться, что старшие коэффициенты в (11.1) и (11.2) совпадают. Поэтому справедливо равенство

$$\frac{1}{n!} \cdot P^{(n)}(x_0) = a_n$$

Если положить $x = 0$, то правая часть равенства (11.5) равна правой части (11.1), поэтому справедливы равенства

$$\frac{P^{(k)}(0)}{k!} = a_k \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

11.2. Бином Ньютона

Рассмотрим функцию $f(x) = (a+x)^n$, n - натуральное (11.6)

Полагая $x_0 = 0$ и используя формулу Тейлора, получим

$$(a+x)^n = A_0 + A_1 \cdot x + \dots + A_n \cdot x^n, \quad \text{где}$$

$$A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Так как из (11.6) получаем

$$f^{(k)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot [n - (k-1)] \cdot (a+x)^{n-k},$$

то $f(0)=a^n$ и $f^{(k)}(0) = n \cdot (n-1) \cdot K \cdot [n-(k-1)] \cdot a^{n-k}$ ($k = 1, 2, K, n$)

Таким образом, $A_0 = a^n$ и

$$A_k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot K \cdot [n-(k-1)]}{k!} \cdot a^{n-k} \quad (k = 1, 2, K, n)$$

A_k будем называть *биномиальным коэффициентом* и обозначать

$$C_n^k = A_k \quad (11.7)$$

Запишем теперь биномиальную формулу Ньютона

$$(a+x)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot a^{n-2} \cdot x^2 + K + x^n.$$

В частности, при $a = 1$

$$(1+x)^n = 1 + n \cdot x + K + x^n.$$

11.3. Формула Тейлора для функции

Пусть $y=f(x)$ имеет непрерывную производную N -го порядка ($f^{(N)}(x)$) (т.е. $\exists$ непрерывные производные на (a,b) $f(x) = f^{(0)}(x), f^{(1)}(x), \dots$) в интервале (a,b) и $x \in (a,b)$. Воспользуемся многочленом Тейлора (11.5) степени $n, n \leq N$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k.$$

Многочлен $P_n(x)$ можно рассматривать как некоторое приближение (аппроксимацию) данной функции. Обозначим через $R_n(x)$ соответствующую ошибку (так называемый остаточный член), тогда будем иметь $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

Покажем, что при $x \rightarrow x_0$ остаточный член $R_n(x)$ будет бесконечно малой порядка выше n .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + K + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n \right]}{(x-x_0)^n}$$

Очевидно, что имеем неопределенность вида $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Применяя правило Лопиталья последовательно n раз и учитывая непрерывность производной $f^{(n)}(x)$, находим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - \left[f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0) + K + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x-x_0)^{n-1} \right]}{n \cdot (x-x_0)^{n-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - \left[f''(x_0) + K + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!} \cdot (x-x_0)^{n-2} \right]}{n \cdot (n-1) \cdot (x-x_0)^{n-2}} = K = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - [f^{(n)}(x_0)]}{n \cdot (n-1) \cdot K \cdot 1} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$.

Таким образом, мы получим локальную формулу Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + o[(x-x_0)^n]. \quad (11.8)$$

З а м е ч а н и е. В частности, в случае $a < x < b, x=0$ будем иметь формулу *Маклорена*:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o(x^n). \quad (11.9)$$

Пример: Пусть $f(x) = \sin x$; аппроксимировать в окрестности точки $x=0$ многочленом Тейлора $P(x)$. Имеем

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x.$$

Отсюда $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$. На основании формулы (11.9) имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

11.4. Экстремум функции одной переменной .

Определение 11.1. Будем говорить, что $f(x)$ имеет максимум в некоторой точке $x=x_1$, если в некоторой окрестности $O(x_1)$ (возможно, весьма малой) выполнено неравенство $f(x_1) > f(x)$, ($x \neq x_1$).

Аналогично определим минимум функции $f(x)$. Если при $x=x_2$ $f(x_2) < f(x)$ ($x \neq x_2$) в некоторой окрестности точки $O(x_2)$, то в точке x_2 $f(x)$ имеет минимум.

Максимум или минимум функции называется *экстремумом* функции. Те точки, где $f(x)$ достигает своих экстремальных значений, назовем *точками экстремума* функции.

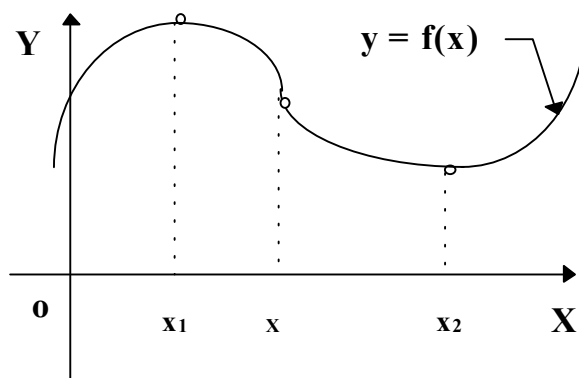


Рис. 11.1.

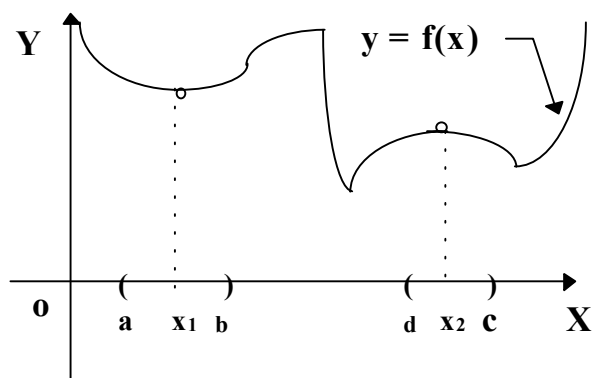


Рис. 11.2.

Из определения следует, что экстремум функции носит локальный характер. То есть может оказаться, что минимум функции принимает большее значение, чем максимум.

Здесь речь идет о *двустороннем экстремуме* (в дальнейшем мы под словом экстремум будем всегда понимать двусторонний экстремум). Ниже мы введем понятие односторон-

ного (*краевого*) экстремума.

Теорема 11.1. (Необходимое условие экстремума функции).

В точке экстремума (двустороннего) дифференцируемой функции производная ее равна нулю.

(Это есть теорема Ферма, которая доказана ранее)

С л е д с т в и е. Непрерывная функция может иметь экстремум лишь в тех точках, где производная равна нулю или не существует.

Рассмотрим теперь достаточные условия экстремума. Из того, что $f'(x_0) = 0$, вовсе не следует, что $f(x)$ имеет экстремум при $x = x_0$.

Пример. Пусть $y = x^3$. При $x_0 = 0$ $f'(x) = 3 \cdot x^2 \big|_{x=0} = 0$, но $f(0)$ не является экстремальным значением.

Определим достаточное условие экстремума.

Теорема 11.2. (*Первое правило*). Если $f(x)$ дифференцируема и для некоторого $x = x_0$ $f'(x_0) = 0$, а также $f'(x)$ меняет свой знак при переходе через это значение, то число $f(x_0)$ является экстремумом функции $f(x)$, причем:

1. $f(x)$ имеет $\max$ при $x=x_0$, если $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-”.
2. $f(x)$ имеет $\min$ при $x=x_0$, если $f'(x)$ меняет знак с “-” на “+”.

Доказательство.

1). Пусть $f(x) = 0$, причем $f'(x) > 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, где ε - достаточно малое положительное. Но если $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает, т.е. $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ $f(x_0) > f(x)$, а для $\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ $f(x_0) < f(x)$, но тогда в точке x_0 $f(x)$ имеет максимум.

2). Самостоятельно.

Теорема 11.2'. Если производная дифференцируемой функции $f(x)$ в некоторой точке $x=x_0$ обращается в нуль, но при переходе не меняет свой знак, то $f(x)$ в данной точке не имеет экстремума.

Доказательство. Самостоятельно.

Теорема 11.3. (*Второе правило*). Если дифференцируемая функция в некоторой точке x_0 имеет первую производную, равную нулю, а вторая производная существует и отлична от нуля ($f'(x_0)=0$, $f''(x_0) \neq 0$), то в этой точке функция $f(x)$ имеет экстремум, а именно

1. если $f''(x_0) > 0$, тогда $f(x_0)$ - $\min$,
2. если $f''(x_0) < 0$, тогда $f(x_0)$ - $\max$.

Доказательство.

1). Пусть $f'(x_0)=0$, $f''(x_0) > 0$ и $x=x_0+\Delta x_0$ - точка, близкая к x_0 .

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x_0) - f'(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0},$$
 (так как $f'(x_0)=0$). Таким образом, величина $\frac{f'(x)}{x - x_0}$ стремится к пределу $f''(x_0) \neq 0$, а значит, начиная с некоторого момента, эта величина

имеет знак своего предела (см. теорему 5.2, следствие). У нас “+”. Поэтому $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ при 0

$< |x - x_0| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Отсюда получаем, что числитель и знаменатель имеют один знак, и, следовательно,

$f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$,

$f'(x) < 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, а при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет знак с “-” на “+”.

На основании теоремы 11.2 $f(x_0)$ - минимум функции $f(x)$.

2). Доказать самостоятельно.

12. Исследование поведения функции

12.1. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Определение 12.1. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вверх* (или *выпуклым вниз*) в промежутке $< a, b >$, если соответствующая часть кривой $y = f(x)$ ($x \in < a, b >$) расположена выше касательной, проведенной в любой ее точке $M(x, f(x))$.

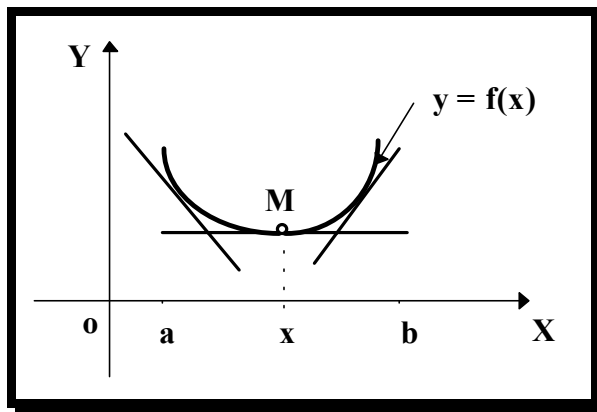


Рис. 12.1.

Определение 12.1' $y = f(x)$ ($x \in < a, b >$) называется *выпуклым вверх* (или *вогнутым вниз*) в промежутке $< a, b >$, если соответствующая часть кривой $y = f(x)$ расположена ниже касательной, проведенной в любой точке $M(x, f(x))$.

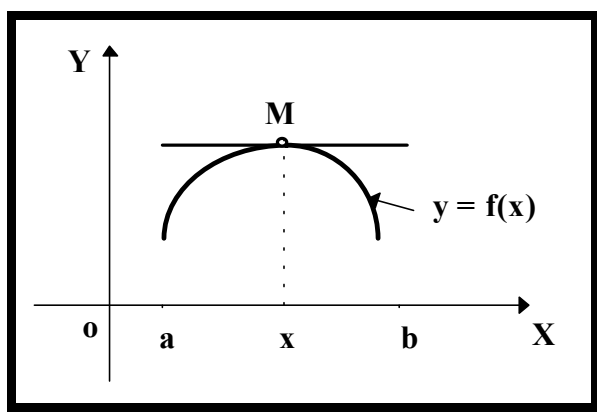


Рис. 12.2.

Теорема 12.1. (Достаточные условия выпуклости графика)

1. Если для дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то график этой функции выпуклый вниз в данном промежутке.

2. Если $f''(x) < 0 \quad (x \in (a, b))$, то график $y = f(x)$ выпуклый вверх.

Доказательство: Пусть $f''(x) > 0$ при $a < x < b$ и $x_0 \in (a, b)$. Сравним ординату в точке x функции $y = f(x)$ с ординатой $\bar{y}$ ее касательной в точке x_0

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (12.1)$$

$$\text{Рассмотрим} \quad \delta = y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \quad (12.2)$$

Используя теорему Лагранжа, будем иметь

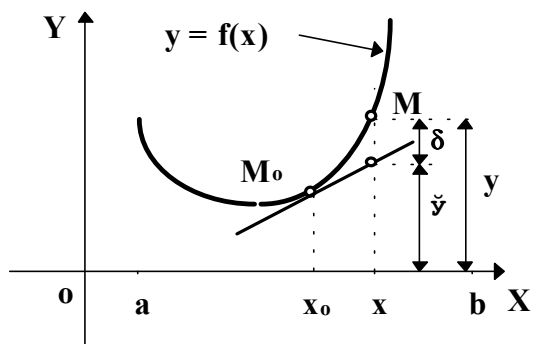
$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0), \text{ где } \xi \in (x_0, x),$$

тогда получаем

$$\delta = (x - x_0) [f'(\xi) - f'(x_0)] \quad (12.3)$$

Далее, $f''(x) = [f'(x)]' > 0 \Rightarrow f'(x)$ возрастает.

Пусть $x < x_0$, тогда $\xi < x_0$ и, следовательно, в силу возрастания $f'(x)$ имеем $f'(\xi) < f'(x_0)$ из (12.3) имеем, что $\delta > 0$.



Если теперь $x > x_0 \Rightarrow \xi > x_0$, поэтому $f'(\xi) > f'(x_0)$, но $\delta > 0$ снова.

То есть при $x \neq x_0$ имеем $\delta = y - \bar{y} > 0$, то есть $y > \bar{y}$ так как x_0 - произвольная точка, то при $\forall x \in (a, b)$ кривая $y = f(x)$ расположена выше своих касательных и, значит, график $y = f(x)$ выпуклый вниз.

(2. Доказать самостоятельно)

Рис. 12.4.

Определение 12.2. Точкой перегиба графика

дифференцируемой функции

$y = f(x)$ называется его точка, при переходе через которую кривая меняет свою вогнутость на выпуклость или наоборот.

Теорема 12.2. Если для функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 $f''(x_0) = 0$ и при переходе через эту точку меняет свой знак на обратный, то точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба функции.

Доказательство: Пусть $f''(x_0) = 0$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ меняет свой знак, для определенности, с "+" на "-". Тогда левее точки x_0

$(x < x_0) \quad f''(x) > 0$, а поэтому при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ график этой функции выпуклый вниз.

Для $x > x_0$, т.е. при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ $y = f(x)$ выпукла вверх ($\cap$).

Таким образом, в точке M кривая $y = f(x)$ меняет

вогнутость; согласно

определения M - точка перегиба.

З а м е ч а н и е. В точке перегиба x_0 функции $y = f(x)$ $f''(x)$ может также не существовать; например, обращаться в бесконечность.

Пример. (Кривая Гаусса).

$$y = e^{-x^2}.$$

Тогда $y' = -2xe^{-x^2}$ и

$y'' = 4(x^2 - \frac{1}{2})e^{-x^2}$, решая уравнение

$y'' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2} = 0$ получим $x_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}},$

$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

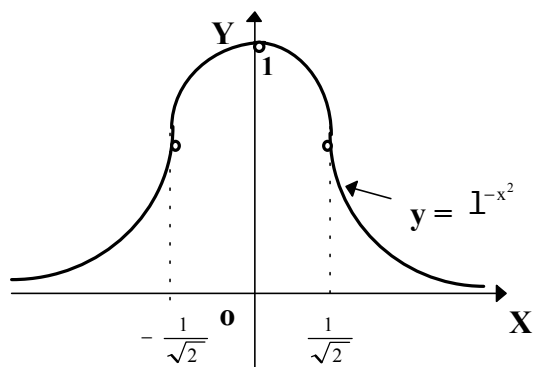


Рис. 12.5.

Таблица 12.1.

x	$(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty)$
y''	+	0	-	0	+

Следовательно, точки $A\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right), B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ точки перегиба

12.2. Асимптоты

Определение 12.3. Пусть $y = f(x)$ определена для всех $x > a$ (соответственно, $x < a$). Если существуют такие k, l : $f(x) - kx - l = 0$ (1) при $x \rightarrow +\infty$ (соответственно, $x \rightarrow -\infty$), то прямая

$$y = kx + l$$

называется *асимптотой* функции при $x \rightarrow +\infty$ (соответственно, $x \rightarrow -\infty$).

Рассмотрим геометрический смысл асимптоты.

Пусть точка $M(x, f(x))$ точка графика функции f . Тогда расстояние $MP \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, но в этом случае и $MQ \rightarrow 0$ т.е. эти два условия эквивалентны.

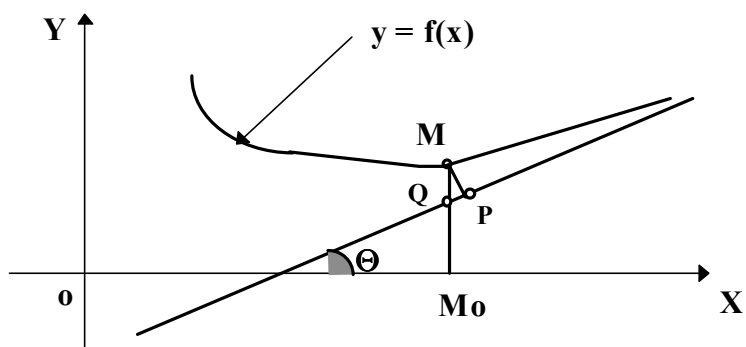


Рис. 12.6.

Рассмотрим способ отыскания асимптоты, т.е. метод определения коэффициентов k, l .

Пусть $x \rightarrow +\infty$ (аналогично $x \rightarrow -\infty$) и пусть $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = kx + e$. Тогда по определению 12.3.

$$f(x) = kx + l + o(1). \quad (12.4)$$

Разделим обе части уравнения на x и перейдем к пределу при $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \quad (12.5)$$

Определив k по формуле (12.5) из (12.4), теперь можно определить

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) \quad (12.6)$$

Т.е. отыскание уравнения касательной сводится к отысканию пределов (12.5) и (12.6). Более того, мы показали, что если существует представление функции f в виде (12.4), то k и l определяются по (12.5) и (12.6). Таким образом, представление (12.4) единственно.

Определение 12.4. Пусть f определена в некоторой окрестности точки x_0 (быть может односторонней) и пусть $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$, или $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$,

или то и другое. Тогда прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой*.

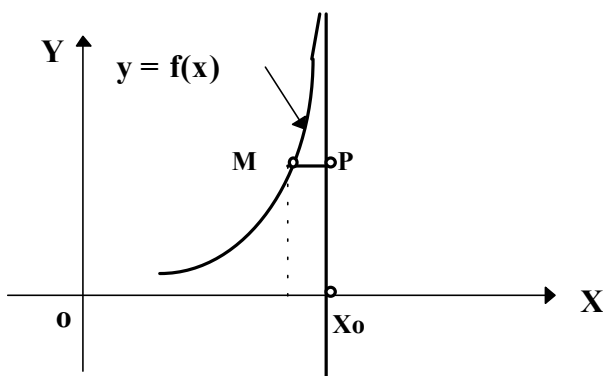


Рис. 12.7.

Пример: $y = \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$.

Так как $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1} = \infty$, то прямая $x = -1$ вертикальная асимптота.

12.3. Построение графиков.

Изучение заданной функции и построение ее графика с помощью развитого нами аппарата можно проводить, например, в следующем порядке.

1. Определить область существования функции, область непрерывности, точки разрыва. Полезно также выяснить симметрию графика (четность, нечетность,

периодичность и т.п.). Исследовать поведение функции в точках разрыва $x \rightarrow a$, $x \rightarrow b$, где a и b граничные точки области существования. Решить уравнение $f(x) = 0$, найти точки пересечения с осями координат ($y = f(0)$).

2. Найти асимптоты.

3. Приблизительно, вчерне, нарисовать график функции.

4. Вычислить $f'(x)$, если нужно $f''(x)$, решая последовательно уравнения $f'(x) = 0$ и $f''(x) = 0$. Находим критические значения аргумента для функции. Изучая затем значение $f'(x)$ в каждом из промежутков между критическими значениями, определяем промежутки возрастания, убывания и выясняем характер этих критических значений.

5. Решая $f''(x) = 0$ и рассматривая поведение $f(x)$ на промежутках существования, определить выпуклость ($\cup$, $\cap$) графика функции, максимумы, точки перегиба, если они есть в наличии.

6. Составить таблицу значений функции ее характеристических точек (граничные точки области существования, точки разрыва, точки пересечения с осями координат, точки экстремума, точки перегиба и т.д.).

7. Окончательно вычертить график.

Пример. Построить график функции

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}.$$

Эта функция определена и непрерывна для всех $x \neq -1$. Она имеет асимптоты $y = x - 4$ и $x = -1$, причем $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = -\infty$.

Представим функцию $f(x) = x - 4 + \frac{2}{x + 1}$, тогда очевидно, что $f(x) > x - 4$ при $x > -1$ (график находится над асимптотой) и при $x < -1$ $f(x) < x - 4$ (график находится под асимптотой).

График функции $f(x)$ пересекает ось Ox в точках, в которых $x^2 - 3x - 2 = 0$, т.е. при $x_1, x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$. Ось Oy график пересекает в точке $y = -2$.

Определим теперь точки экстремума, перегиба и интервалы выпуклости функции вверх или вниз. Для этого найдем y' и y'' :

$$y' = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}, \quad y'' = \frac{4}{(x + 1)^3}.$$

Отсюда видно, что $y' = 0$ в точках $x = -1 - \sqrt{2} \cong -2,4$ и $x = -1 + \sqrt{2} \cong 0,4$. В точке $x = -1$ производные не существуют.

Выполнив последовательно все пункты, указанные выше, занесем их в таблицу.

Таблица 12.2.

x	$(-\infty; -1 - \sqrt{2})$	$-1 - \sqrt{2}$	$(-1 - \sqrt{2}; -1)$	-1	$(-1; -1 + \sqrt{2})$	$-1 + \sqrt{2}$	$(-1 + \sqrt{2}; +\infty)$
y'	+	0	-	нет	-	0	+
y''	-	-	-	нет	+	+	+

Найден общий характер поведения функции, а это позволяет нарисовать график.

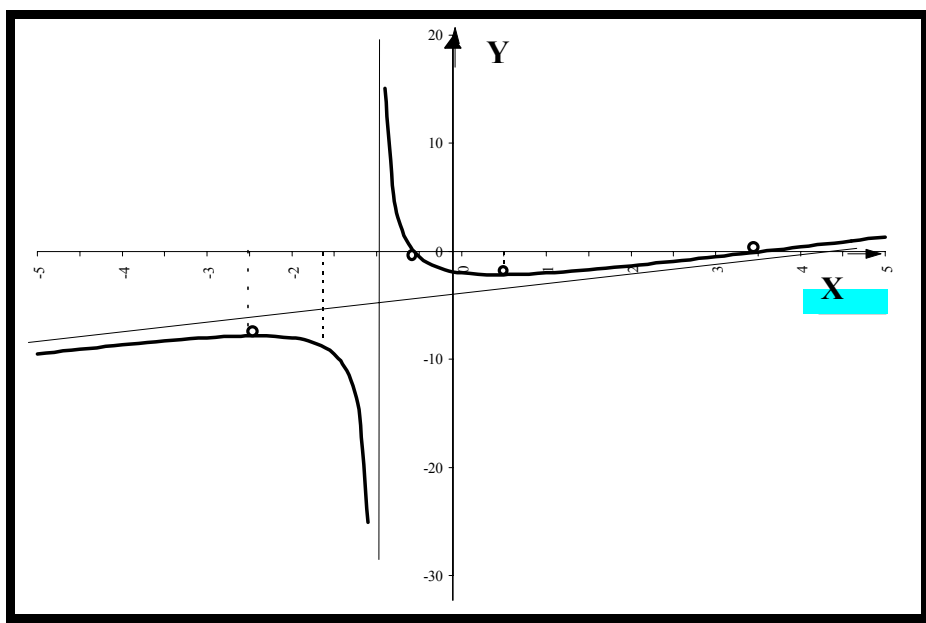


Рис. 12.8.

13. Дифференциальное исчисление функции многих переменных

13.1. Частные производные первого порядка

Пусть задана функция $Z = f(x, y)$. Для простоты будем предполагать существование функции в некоторой окрестности рассматриваемой точки $M(x, y)$.

Рассмотрим отношение частного приращения $\Delta_x Z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ по переменной x к приращению Δx , т.е.

$$\frac{\Delta_x Z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (13.1)$$

Теперь устремим $\Delta x \rightarrow 0$. Если предел в (13.1) существует, то назовем его *частной производной* (первого порядка) функции $Z = f(x, y)$ по x и будем обозначать

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f'_x(x, y),$$

т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Определение 13.1. Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при условии, что последнее стремится к нулю.

Заметим, что если от функции $Z = f(x,y)$ берется производная $\frac{\partial Z}{\partial x}$, то y считается

постоянным; если же находится $\frac{\partial Z}{\partial y}$, то x - постоянной. Поэтому частная производная

функции нескольких переменных равна производной той функции одной переменной, которая получится, если все независимые переменные данной функции, кроме соответствующей одной, считать постоянными, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx} [f(x,y)], \text{ где } y - \text{const и т. д.}$$

Пример 13.1. Пусть $Z(x,y) = x^3 \cdot \sin y + y^4$.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 3 \cdot x^2 \cdot \sin y, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = x^3 \cdot \cos y + 4 \cdot y^3.$$

Пример 13.2. Пусть $U = f(x,y,z) = x^5 + 4 \cdot y^3 + 2 \cdot z^4$.

$$\text{Тогда } \frac{\partial U}{\partial x} = 5 \cdot x^4; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 12 \cdot y^2; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 8 \cdot z^3.$$

13.2. Геометрический смысл частных производных

$$\text{Пусть } Z = f(x,y); \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = f'_x(x,y); \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = f'_y(x,y).$$

Изобразим $Z = f(x,y)$ - получим некоторую поверхность.

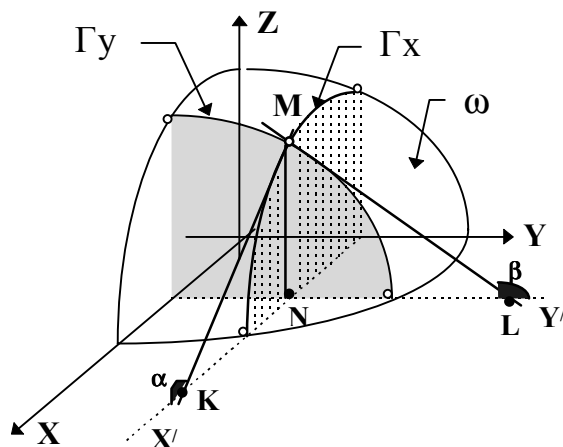


Рис. 13.1.

Возьмем точки $M(x,y,z)$, $N(x,y,0)$ - проекция точки M на плоскость XOY . Полагая $y - \text{const}$, мы получаем плоскую кривую Γ_x , представляющую собой сечение поверхности ω соответствующей плоскостью, параллельной Oxz . Пусть MK - касательная к кривой Γ_x в точке $M(x,y,z)$ и α - угол, образованный с положительным направлением оси Ox . Так как

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \left[\frac{dZ}{dx} \right]_{y - \text{const}},$$

на основании смысла обычной производной

$$\text{имеем } \frac{\partial Z}{\partial x} = \text{tg } \alpha, \text{ аналогично } \frac{\partial Z}{\partial y} = \text{tg } \beta.$$

13.3. Полный дифференциал функции

Пусть $Z = f(x,y)$ - функция двух независимых переменных x и y . Полное приращение этой функции

$$\Delta Z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \quad (13.2)$$

представляет разность значений данной функции в точках $M(x,y)$ и $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Тогда

$$\rho = \rho(M, M') = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Если $\rho \rightarrow 0$, можно подобрать независимые от Δx и Δy величины A и B такие, что величина (выражения) $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ будет отличаться от Δz на величину высшего порядка

малости по сравнению с ρ , и тогда это выражение будет называться главной частью полного приращения функции, т.е.

$$\Delta Z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \gamma \rho, \quad (13.3)$$

где $\gamma \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ (или, то же самое, $\gamma \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$).

Выражение (13.3) можно записать и в другом виде.

$$\text{Поскольку } \Delta x = \rho \cdot \cos \varphi,$$

$$\Delta y = \rho \cdot \sin \varphi,$$

$$\rho = \Delta x \cdot \cos \varphi + \Delta y \cdot \sin \varphi.$$

Отсюда

$$\Delta Z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \quad (13.4)$$

где $\alpha = \gamma \cdot \cos \varphi \rightarrow 0$ и $\beta = \gamma \cdot \sin \varphi \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, т.е. $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, и обратно.

Обобщая определение дифференциала функции одной переменной на случай функции двух независимых переменных, приходим к следующим определениям:

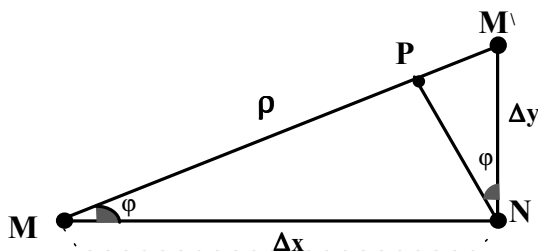


Рис. 13.2.

Определение 13.2. Под дифференциалом независимой понимается приращение этой переменной, т.е. $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

Определение 13.3. Полным дифференциалом функции $Z = f(x, y)$ двух независимых переменных x и y называется главная линейная часть полного приращения этой функции.

Это определение распространяется на функции любого числа переменных. Обозначая дифференциал

$$dZ = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y,$$

где A и B не зависят от Δx и Δy и, более того,

$$\Delta Z - dZ = \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где α, β бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$.

Функция, имеющая дифференциал в данной области, называется дифференцируемой в этой области. Если она дифференцируема, то имеет место (13.3) или (13.4).

Если $Z = f(x, y)$ дифференцируема, она непрерывна. Действительно, переходя к пределу в (13.3), получим $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta Z = 0$, т.е. Z - непрерывна.

Пример 13.3. Пусть $Z = x \cdot y$. Определить полный дифференциал dZ .

Функцию Z можно рассматривать как площадь прямоугольника.

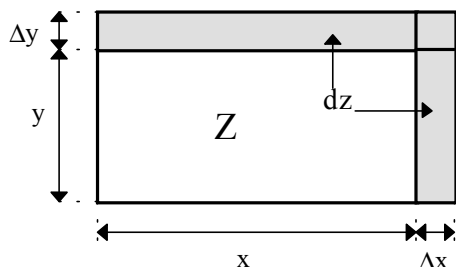


Рис. 13.3.

Дадим приращения Δx и Δy . Тогда ΔZ есть площадь заштрихованной области:

$$\Delta Z = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - x \cdot y = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y.$$

Главная часть этого приращения есть дифференциал

$$dZ = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y$$

Теорема 13.1. Дифференциал функции равен сумме произведений частных производных этой

Доказательство:

Пусть $Z = f(x, y)$ - дифференцируема, т.е. имеет место

$$dZ = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y \quad (13.5)$$

Для определения A и B запишем полное приращение

$$\Delta Z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \quad (13.6)$$

где α, β бесконечно малы при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$.

Полагая $\Delta y = 0$ в (13.6), получим частное приращение

$$\Delta_x Z = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta y.$$

Отсюда
$$\frac{\Delta_x Z}{\Delta x} = A + \alpha.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x Z}{\Delta x} = \frac{\partial Z}{\partial x} = A$$

Аналогично, если $\Delta x = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y Z}{\Delta y} = \frac{\partial Z}{\partial y} = B.$

То есть $A = \frac{\partial Z}{\partial x}$, $B = \frac{\partial Z}{\partial y}$. Подставляя A и B в (13.5), получим

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy \quad (13.7).$$

С л е д с т в и е. Данная функция имеет единственный дифференциал.

Это следует из теоремы. Если дифференциал функции $Z=f(x,y)$ существует, то он выражается формулой (13.7).

Теорема 13.2. (Достаточное условие дифференцируемости функции).

Если $Z = f(x,y)$ обладает непрерывными частными производными $\frac{\partial Z}{\partial x} = f'_x(x,y)$ и

$\frac{\partial Z}{\partial y} = f'_y(x,y)$ в данной области, то эта функция дифференцируема в этой области и ее дифференциал выражается формулой (13.7).
(Без доказательства).

Пример 13.4. Пусть дано $Z = x^y$. Необходимо определить полный дифференциал dZ .

Найдем $\frac{\partial Z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$; $\frac{\partial Z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$.

Тогда

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy = y \cdot x^{y-1} dx + x^y \cdot \ln x dy.$$

З а м е ч а н и е. Если $u = f(x,y,z)$ имеет непрерывные частные производные, то дифференциал этой функции выражается формулой

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

где $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, $\Delta z = dz$.

Пример 13.5. Найти дифференциал функции $u = \frac{x}{y} \cdot e^z$.

Находим $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot e^z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \cdot e^z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x}{y} \cdot e^z$.

Следовательно $du = e^z \cdot \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy + \frac{x}{y} dz \right)$.

При малых приращениях Δx и Δy приращение дифференцируемой функции $\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ приближенно можно заменить $df(x,y)$, где $df(x,y) = f'_x(x,y) \cdot \Delta x + f'_y(x,y) \cdot \Delta y$. То есть имеем приближенное равенство $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx f'_x(x,y) \cdot \Delta x + f'_y(x,y) \cdot \Delta y$, которое будет тем относительно точнее, чем меньше $|\Delta x|$, $|\Delta y|$.

14. Понятие о производной функции по данному направлению

14.1. Производная по направлению

Пусть $u = f(x,y)$ - функция, определенная в области ω . Рассмотрим точку $M(x,y) \in \omega$ и некоторое направление l , определяемое направляющими косинусами $\cos \alpha$ и $\cos \beta = \sin \alpha$ (т.е. $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ - косинусы углов, образованных лучом l с положительным направлением осей координат Ox и Oy).

При перемещении в данном направлении l точки $M(x,y)$ в точку $M'(x+\Delta x, y+\Delta y) \in \omega$ функция $u=f(x,y)$ получает приращение

$$\Delta_l u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y), \quad (14.1)$$

которое называется *приращением* функции u в данном направлении.

Если $MM' = \Delta l$ есть величина перемещения точки M , то из $\triangle MPM'$ получаем

$$\begin{cases} \Delta x = \Delta l \cdot \cos \alpha; \\ \Delta y = \Delta l \cdot \cos \beta. \end{cases} \quad (14.2)$$

Следовательно, $\Delta_l u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

Определение 14.1. Под производной $\frac{\partial u}{\partial l}$ функции u в данном направлении к величине перемещения при условии, что последняя стремится к нулю, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}. \quad (14.3)$$

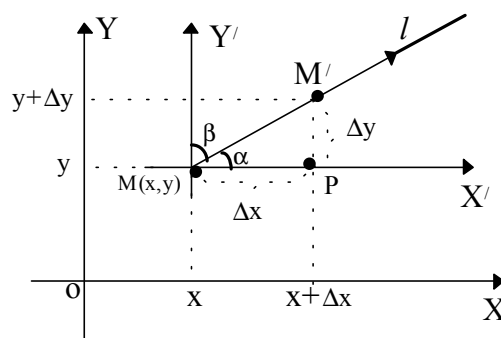


Рис. 14.1.

Тогда частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ можно рассматривать как производные функции u в положительных направлениях осей координат Ox и Oy . Производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ дает скорость изменения функции в направлении l .

Пусть $u = f(x, y)$ - дифференцируема. Тогда, используя формулу полного дифференциала, будем иметь

$$\Delta_1 u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y,$$

где $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$. Тогда в силу соотношений (14.2) получаем

$$\frac{\Delta_1 u}{\Delta l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos \beta \right) \cdot \frac{\Delta l}{\Delta l} + (\varepsilon_1 \cdot \cos \alpha + \varepsilon_2 \cdot \cos \beta) \cdot \frac{\Delta l}{\Delta l}$$

и, переходя к пределу при $\Delta l \rightarrow 0$, что то же самое, что и $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos \beta. \quad (14.4)$$

З а м е ч а н и е. Пусть $u = f(x, y, z)$. Ее производная в направлении

$l = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ будет $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos \gamma$.

14.2. Градиент и его свойства

Определение 14.2. Говорят, что в данной области ω определено *скалярное поле*, если для каждой точки $M \in \omega$ задан некоторый скаляр (т.е. число)

$$U = f(M). \quad (14.5)$$

Следовательно, U есть числовая функция точки.

Примерами скалярных полей являются:

- температурное поле (т.е. распределение температуры в нагретом теле);
- концентрация вещества в растворе.

Пусть ω (т.е. область) расположена на плоскости Oxy ; тогда любая ее точка определена координатами (x, y) .

При этом плоское скалярное поле (14.5) может быть записано в виде

$$U = f(x, y), \quad ((x, y) \in \omega).$$

Аналогично в пространстве O_{xyz}

$$U = f(x, y, z), \quad ((x, y, z) \in \omega)$$

Таким образом, понятие скалярного поля представляет собой физическую трактовку функции нескольких переменных.

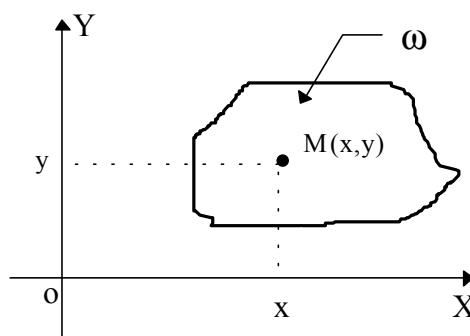


Рис. 14.2.

Определение 14.3. Будем говорить, что в данной области ω определено векторное поле, если для каждой точки $M \in \omega$ задан некоторый вектор

$$\vec{a} = F(M) \quad (14.6)$$

Примеры.

1. Поле скоростей в данный момент времени точек потока жидкости.

2. Силовое поле, создаваемое некоторым притягивающим центром.

Для плоского векторного поля (14.6) мы будем иметь вектор-функцию

$$a = F(x,y), \quad ((x,y) \in \omega) \quad (14.7)$$

Отсюда, переходя к координатам вектора a , получим

$$a_x = F_1(x,y), \quad a_y = F_2(x,y).$$

Таким образом, задание плоского векторного поля (14.7) равносильно заданию двух скалярных полей.

Аналогично для случая пространственного векторного поля

$$\begin{aligned} a &= F(x,y,z), \quad ((x,y,z) \in \omega); \\ a_x &= F_1(x,y,z), \\ a_y &= F_2(x,y,z), \\ a_z &= F_3(x,y,z). \end{aligned} \quad (14.8)$$

В этом случае векторное поле эквивалентно трем скалярным полям.

Множество точек M , для которых скалярное поле (14.5) сохраняет постоянное значение $f(M) = \text{const}$, называется *поверхностью* (или *линией*) *уровня* скалярного поля (*изоповерхностью*).

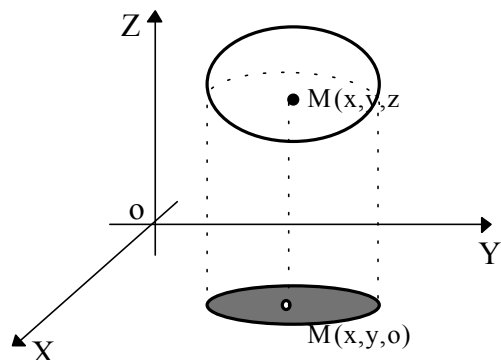


Рис. 14.3.

т.е. *изоповерхность* - это множество всех точек пространства O_{xyz} , где данная

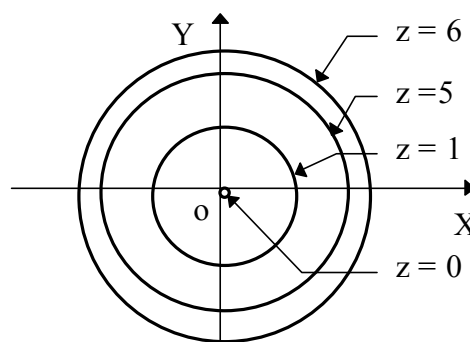


Рис. 14.4.

функция имеет одно и то же значение.

Определение 14.4. Пусть $U=f(x,y)$ - дифференцируемая плоское скалярное поле (функция двух переменных). Тогда вектор

$$\text{grad } U = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right\} \quad (14.9)$$

называется *градиентом поля*.

Или подробнее $\text{grad } U = i \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + j \cdot \frac{\partial U}{\partial y}$, где i, j - единичные вектора, направленные по осям Ox и Oy (координатные орты).

Аналогично для пространства.

Пусть $U=f(x,y)$ - пространственное скалярное поле, тогда его градиент есть вектор $\text{grad } U = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$.

Таким образом, скалярное поле порождает векторное поле - поле градиентов.

Под производной скалярного поля в данном направлении l понимаем

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \cos \gamma$$

Производная $\frac{\partial U}{\partial l}$ представляет собой скорость изменения поля в данном направлении.

14.3. Частные производные высших порядков

Пусть $z=f(x,y)$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$ - частные производные по переменным x и y . В некоторых случаях существуют снова от этих функций частные производные, называемые частными производными *второго порядка* (или просто вторыми производными):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xx}(x,y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yx}(x,y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yy}(x,y) \text{ и т. д.}$$

Можно определить частные производные любого порядка, если все рассматриваемые функции непрерывны как функции своих независимых переменных, при этом результат частного дифференцирования не зависит от последовательности дифференцирования.

Например, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ непрерывны, то имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Пример. Пусть $z = x^y$, ($x > 0$).

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y \cdot x^{y-1}; & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x + x^{y-1}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^y \cdot \ln x; & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x + \frac{x^y}{x}. \end{aligned}$$

14.4. Признак полного дифференциала

Если $u = f(x, y)$ - дифференцируема, то полный дифференциал имеет вид:

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (14.10)$$

где $P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Возникает обратная задача: при каких условиях выражение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (14.11)$$

где функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны со своими производными первого порядка, является полным дифференциалом функции u .

Теорема 14.1. (Необходимое условие) Для того, чтобы (14.11) являлось в некоторой области G полным дифференциалом некоторой функции $u = F(x, y)$, необходимо, чтобы в этой области

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y} \quad (x, y \in G) \quad (*)$$

(*) - условие полного дифференциала.

Доказательство:

Пусть (14.11) - полный дифференциал функции $u = F(x, y)$. Имеем

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy. \quad (14.12)$$

Отсюда в силу единственности дифференциала получим

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Дифференцируя первое по y , а второе - по x , будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Но, так как для непрерывных функций результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования, то получаем (*)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}.$$

С л е д с т в и е. Если условие (*) не выполнено, то выражение (14.4) не является полным дифференциалом.

Пример:

а) $ydx - xdy$

б) $ydx + xdy$

Проверить, являются ли полными дифференциалами а) и б).

а) $\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$ - не является.

$$\text{б) } P=y, Q=x, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$d(xy) = ydx + xdy.$$

15. Экстремумы функции нескольких переменных

15.1. Максимум и минимум функции нескольких переменных

Напомним, что под окрестностью точки плоскости понимается внутренность любого прямоугольника, окружающего эту точку, исключая саму точку (проколота окрестность).

В пространстве это будет произвольный параллелепипед, содержащий эту точку за вычетом самой точки.

Определение 15.1. Максимумом (строгим) функции $f(x, y)$ называется такое значение $f(x_1, y_1)$ этой функции, которое больше всех ее значений $f(x, y)$, принимаемых данной функцией в точках некоторой окрестности точки $O(x_1, y_1)$. (Окрестность может быть весьма малой по своим линейным размерам).

Определение 15.2. Минимумом (строгим) функции $f(x, y)$ называется такое значение $f(x_2, y_2)$, которое меньше всех ее значений $f(x, y)$, принимаемых данной функцией в точках некоторой окрестности $O(x_2, y_2)$.

Максимум или минимум функции $f(x, y)$ называется *экстремумом* этой функции. Точка, в которой достигается экстремум, называется *точкой экстремума* (точка минимума, точка максимума).

Аналогично определяется экстремум функции $f(x, y, z)$ и т.д.

Теорема 15.1. (*Необходимый признак экстремума функции нескольких переменных*). В точке экстремума функции нескольких переменных каждая ее частная производная первого порядка либо равна нулю, либо не существует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u = f(x, y)$ и $f(x_0, y_0)$ - ее максимум (для минимума рассуждения аналогичны). Зафиксируем одну из переменных, например, y , полагая $y = y_0$, тогда получим функцию одной переменной $U_1 = f(x, y_0)$, которая, очевидно, будет иметь максимум при $x = x_0$. Отсюда, на основании теории экстремума одной переменной, получаем,

что $\left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0) = 0$ или $f'_x(x_0, y_0)$ не существует.

Пусть теперь $y=y_0$, а x_0 - фиксируем, тогда $f'_y(x_0, y_0) = 0$ или не существует.

С л е д с т в и е. В точке экстремума $M_0(x_0, y_0)$ дифференцируемой функции $f(x, y)$ выполнены равенства $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Для $U = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ будет выполнено условие $f'_x(x_0, y_0, z_0) = f'_y(x_0, y_0, z_0) = f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$.

З а м е ч а н и е. Точку, в которой частные производные первого порядка либо не существуют, либо равны нулю, называют *критической*.

Т.е. экстремумы функции нескольких переменных могут достигаться лишь в критических точках.

Пример 15.1. Покажем, что указанные выше условия не являются достаточными. Пусть $z = f(x, y) = x \cdot y$ тогда имеем $f'_x(x, y) = y$, $f'_y(x, y) = x$.

Следовательно, $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Однако точка $0(0,0)$ не является точкой экстремума, т.к. в любой окрестности точки $0(0,0)$ имеются точки

$$A(\varepsilon, \varepsilon) \text{ и } B(-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0 :$$

$$f(A) = \varepsilon^2 > 0 = f(0) \text{ и } f(B) = -\varepsilon^2 < f(0).$$

15.2. Абсолютный экстремум

Определение 15.3. Наименьшее или наибольшее значение функции в данной области называется *абсолютным экстремумом* функции. (Соответственно, абсолютный минимум, абсолютный максимум).

Теорема 15.2. (*Вайерштрасс*) Функция, непрерывная в ограниченной и замкнутой области, достигает в этой области своего наименьшего и своего наибольшего значения. (Без доказательства)

Теорема 15.3. Абсолютный экстремум функции в данной области достигается либо в критической точке функции, принадлежащей этой области, либо в граничной точке области. (Без доказательства)

Пример 15.2. Для функции $z = x \cdot y$ найти абсолютный экстремум в треугольной области S с вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,2)$.

Определим $\frac{dz}{dx} = y$, $\frac{dz}{dy} = x$.

Критическая точка $O(0,0) \in S$. На участке OA имеем $y = 0$ ($0 \leq x \leq 1$) и тогда $z = 0$.

Аналогично OB : $x = 0$ ($0 \leq y \leq 2$) $\Rightarrow z = 0$.

Наконец, отрезок AB имеет уравнение $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$ или $y = 2 - 2x$ ($0 \leq x \leq 1$).

Отсюда $z = x \cdot y = 2x - 2x^2$.

Имеем $\frac{dz}{dx} = 2 - 4x = 0$, т.е. при

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1$ и т.к. $\frac{d^2z}{dx^2} = -4 < 0$, то в

точке $D\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ функция Z достигает своего наибольшего значения

$M = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ на отрезке AB .

Итак, наименьшее значение z в S есть $m=0$ и оно реализуется в точках отрезков OB и OA , составляющих часть границы Γ .

$M = \frac{1}{2}$ достигает в точке $D\left(\frac{1}{2}, 1\right) \in \Gamma$.

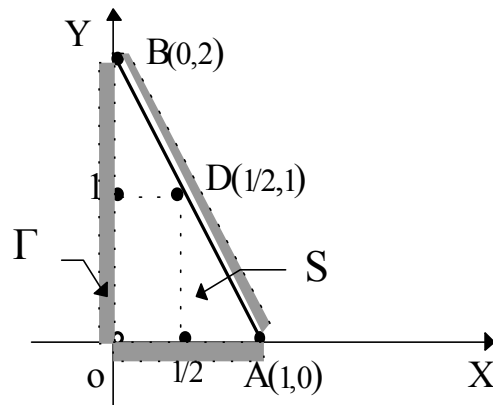


Рис. 15.1.

15.3. Метод наименьших квадратов

В различных исследованиях по данным результатов исследований, часто возникает необходимость построения эмпирических формул, составленных по этим наблюдениям.

Одним из наилучших способов получения таких формул является метод (способ) *наименьших квадратов*.

Пусть по результатам опыта нам нужно установить зависимость между двумя величинами x и y , где, например,

x - стоимость строительства объекта;

y - накладные расходы.

По результатам наблюдения составим таблицу:

X_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Y_i	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Нужно теперь установить функциональную зависимость $y = f(x)$.

Нанесем результаты наблюдений на координатную плоскость.

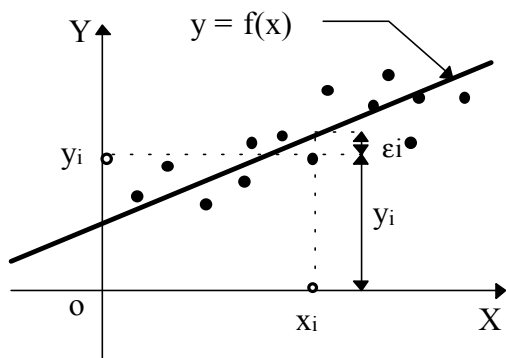


Рис. 15.2.

В данном случае естественно предположить, что зависимость линейная (т.е. все точки расположены около прямой).

$$\text{Т.е. } y = ax + b \quad (*)$$

где a и b - некоторые постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

$$\text{представим } (*) \text{ в виде } ax + b - y = 0 \quad (**)$$

Так как точки лежат приблизительно на этой прямой, то эта зависимость приближенная. И, если подставить точки наблюдений в (**), то получим равенства:

$$\begin{cases} ax_1 + b - y_1 = \varepsilon_1 \\ ax_2 + b - y_2 = \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots \\ ax_i + b - y_i = \varepsilon_i \\ \dots\dots\dots \\ ax_n + b - y_n = \varepsilon_n \end{cases} \quad (15.2)$$

где числа ε_i ($i=1 \div n$) называются погрешностями и, вообще говоря, не равные нулю.

Способ наименьших квадратов состоит в том, что нужно подобрать a и b таким образом, чтобы ε_i были бы по возможности малыми по абсолютной величине, а лучше сказать, чтобы сумма квадратов погрешностей была бы минимальной. Т.е. потребуем, чтобы

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad (15.3)$$

тогда $S(a, b)$ можно рассматривать как функцию двух переменных по a и b и можно ее исследовать на экстремум (определить минимум), т.е.

$$\begin{cases} \frac{ds}{da} = 0, & \frac{ds}{db} = 0. \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{ds}{da} &= -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] x_i \\ \frac{ds}{db} &= -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (15.4)$$

Приравняв эти частные производные к нулю, получаем линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными a и b :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n \end{cases} \quad (15.5)$$

Система (15.5) называется нормальной системой способа наименьших квадратов.

Решая эту систему относительно a и b , находим числа a и b и затем подставляем их в (*).

Пример:

Пусть имеем результаты наблюдений:

X_i	-2	0	1	2	4
Y_i	0.5	1	1.5	2	3

Определим a и b в уравнении $y = ax + b$

$$\sum_{i=1}^5 y_i x_i = 16.5; \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 25; \quad \sum_{i=1}^5 x_i = 5; \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 8$$

Нормальная система

$$\begin{cases} 25a + 5b = 16.5 \\ 5a + 5b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0.425 \\ b = 1.175 \end{cases}. \text{ Тогда } y = 0.425x + 1.175.$$