ТЕМА 4. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ СИСТЕМ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Общие положения. Понятие системы одновременных структурных уравнений

Рассмотренные ранее модели представляли собой зависимости, в которых одна зависимая переменная являлась функцией от одной или более независимых переменных, то есть рассматривались односторонние связи между показателями, включенными в модель. На самом деле между большинством экономических показателей существуют еще и обратные связи. Таким образом, наряду с зависимостями типа

$$y = f(x)$$

мы имеем еще и зависимости типа

$$x = f(y).$$

Данная ситуация влечет за собой нарушение предположения о независимости переменных x и величин остатков u:

$$\operatorname{cov}(x, u) \neq 0 .$$

В подобных случаях одного уравнения недостаточно для того, чтобы проиллюстрировать взаимосвязь между переменными y и x. Приходится использовать системы уравнений, в которых y и x выступают как в роли экзогенных, так и эндогенных переменных.

Определение *Система уравнений, которая описывает взаимную зависимость между переменными, носит название* ***системы одновременных уравнений****.*

Примеры систем одновременных уравнений

Для иллюстрации приведенной ситуации рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть необходимо оценить спрос на некоторый продукт. Общеизвестно, что потребность в каком-либо товаре зависит как от его цены, так и цен на другие товары, и дохода. Учитывая этот факт, размер спроса может быть представлен в виде функции

$$D = a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 I + u,$$

где P_1 – средняя цена на продукт;

P_2 – цены на другие продукты;

I – размер дохода;

u – величина остатка.

Наряду с тем, что спрос есть функция от цены, цена также определяется спросом. Отсюда цену на рассматриваемый продукт можно представить в виде

$$P_1 = b_0 + b_1 D + b_2 R + \varepsilon,$$

где R можно рассматривать как индекс погодных условий.

Используя ранее представленную зависимость, можем получить выражение для цены на искомый продукт

$$P_1 = b_0 + b_1 (a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 I + u) + b_2 R + \varepsilon.$$

Из полученного выражения видно, что P_1 является функцией от величины остатка u, а это является нарушением классического предположения их независимости для регрессионных моделей.

2. Другим примером, иллюстрирующим вышеуказанное несоответствие, является модель, описывающая зависимость между денежной массой и уровнем доходов. В общем виде эта модель выглядит так

$$M = b_0 + b_1 I + u,$$

где M – денежная масса,

I – уровень реального дохода.

Уровень реального дохода, в свою очередь, является функцией от денежной массы, инвестиционных решений и других факторов

$$I = \alpha_0 + \alpha_1 M + \alpha_2 K + \ldots + v,$$

где K – инвестиции.

Поступая также как и в примере 1, получаем

$$I = \alpha_0 + \alpha_1 (b_0 + b_1 I + u) + \alpha_2 K + \ldots + v,$$

что снова подтверждает тот факт, что переменная I является функцией от величины остатков u и, следовательно, $\operatorname{cov}(I,u) \neq 0$.

3. Следующим примером, иллюстрирующим необходимость использования системы уравнений, является *кейнсианская модель определения дохода.*

Функция потребления может быть рассмотрена как

$$C = a_0 + a_1 I + u\ , \quad 0 < a_1 < 1\ ,$$

где I – величина дохода.

В то же время

$$I_t = C_t + K_t\ ,$$

где C_t – затраты на потребление,

K_t – инвестиции,

t – время.

Величина K_t может также рассматриваться как сбережения S_t (накопления)

$$K_t = S_t\ .$$

Параметры a_0 и a_1 необходимо оценить.

Первое уравнение представляет собой стохастическую функцию потребления, а второе – выражение национального дохода.

Таким образом, можно заключить, что величины C и I являются взаимозависимыми, а это влечет за собой зависимость между I и остатками u. Следовательно, классический метод наименьших квадратов здесь неприменим для оценки параметров a_0 и a_1.

4. В модели Филипса «зарплата-цена», которая описывается системой

$$\begin{cases} W_t^0 = a_0 + a_1 UN_t + a_2 P_t^0 + u_{1t} \\ P_t^0 = b_0 + b_1 W_t^0 + b_2 R_t^0 + b_3 M_t^0 + u_{2t} \end{cases},$$

где W^0 – норма изменения зарплаты в денежном выражении,

UN – уровень безработицы, %,

P^0 – норма изменения цены,

R^0 – норма изменения затрат капитала,

M^0 – норма изменения цен на импортируемое сырье,

t – время,

u – остатки

переменные W^0 и P^0 взаимозависимы. Так как они коррелируют с соответствующими случайными величинами u, то 1МНК применим быть не может.

5. Модель равновесия на рынке товаров описывается следующей системой уравнений и тождеств:

функция потребления

$$C_t = a_0 + a_1 I_{dt}, \qquad 0 < a_1 < 1,$$

функция налогов

$$T_t = b_0 + b_1 I_t, \qquad 0 < b_1 < 1,$$

функция инвестиций

$$K_t = \gamma_0 + \gamma_1 r_t,$$

государственные расходы

$$G_t = \overline{G},$$

национальный доход

$$I_t = C_t + K_t + G_t,$$

чистый доход

$$I_{dt} = I_t - T_t,$$

где I – национальный доход,

C – затраты на потребление,

K – запланированные или желаемые чистые инвестиции,

G – затраты государственного сектора,

T – налоги,

r – ставка процента,

I_d – чистый доход.

Путем подстановки уравнений с последующими преобразованиями получаем так называемую IS-модель

$$I_t = \pi_0 + \pi_1 r_t,$$

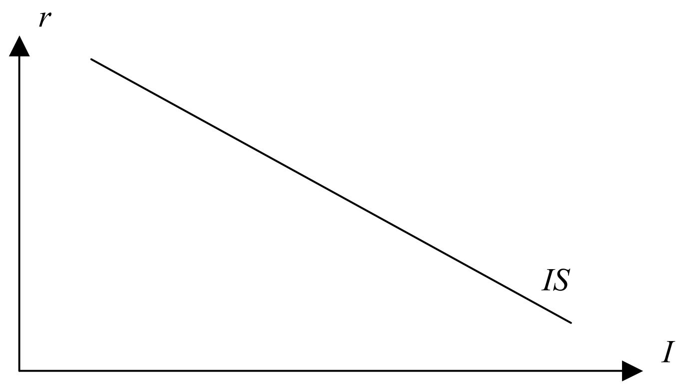
где

$$\pi_0 = \frac{a_0 - b_0 a_1 + \gamma_0 + \overline{G}}{1 - a_1(1 - b_1)},$$

$$\pi_1 = \frac{1}{1 - a_1(1 - b_1)},$$

которая описывает условие равновесия на рынке товаров. Она позволяет найти комбинацию величины процентной ставки и дохода, обеспечивающую равновесие рынка товаров.

Графически IS-модель выглядит следующим образом:



Если оценивать функцию потребления изолированно, то невозможно будет получить эффективные, несмещенные оценки. Отсюда оценка параметров модели должна бы осуществлена комплексно и метод 1МНК здесь не применим.

6. LM-модель позволяет определить соотношение процентной ставки и уровня доходов, при котором обеспечивается равновесие на рынке денег. Соотношения модели записываются следующим образом:

функция спроса на деньги

$$M_t^d = a + bI_t - cr_t,$$

функция предложения денег

$$M_t^s = \overline{M},$$

условие равновесия

$$M_t^d = M_t^s,$$

где I – доход,

$\overline{M}$ – средний уровень предложения денег,

r – процентная ставка.

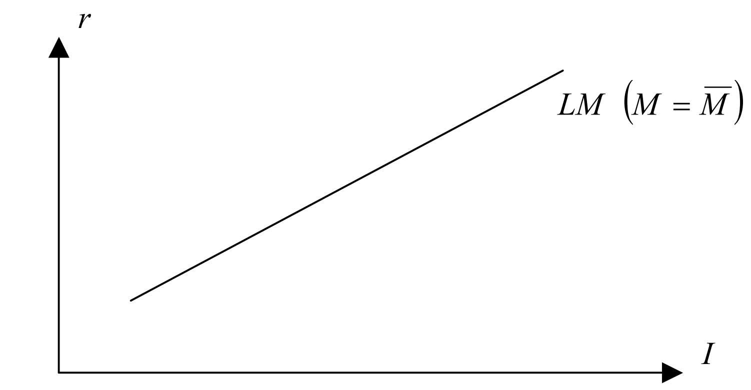
После преобразований LM -модель выглядит следующим образом:

$$I_t = \lambda_0 + \lambda_1 M + \lambda_2 r_t \,,$$

где

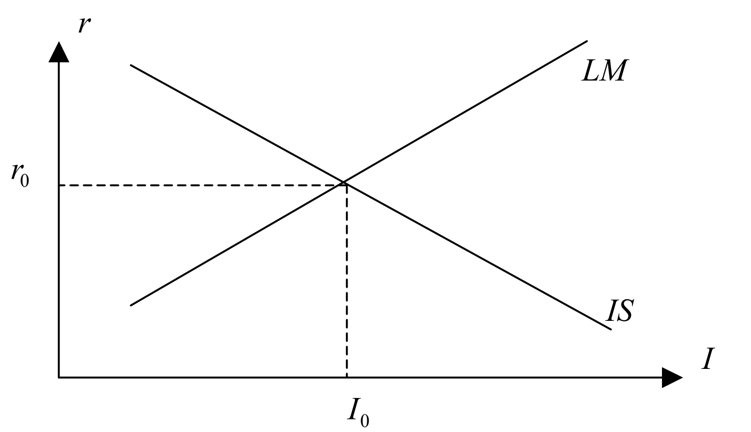
$$\lambda_0 = -\frac{a}{b}\,,\ \lambda_1 = \frac{1}{b}\,,\ \lambda_2 = \frac{c}{b}\,.$$

Для заданного $M = \overline{M}$ кривая LM выглядит следующим образом:



Кривые IS и LM, соответственно, показывают, что все множество процентных ставок согласуется с равновесием на рынке товаров и рынке денег.

Естественно, что только одна процентная ставка и один уровень дохода будут одновременно удовлетворять условию равновесия на этих рынках



7. Эконометрическая модель Лоренса Клейна. Данная модель (модель Клейна 1) является одной из первых эконометрических моделей, построенных на базе одновременных уравнений. Модель имеет вид

функция потребления

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 \left(W + W^{/}\right)_t + \beta_3 P_{t-1} + u_{1t}\,,$$

инвестиционная функция

$$K_t = \beta_4 + \beta_5 P_t + \beta_6 P_{t-1} + \beta_7 D_{t-1} + u_{2t} \,,$$

спрос на труд

$$W_t = \beta_8 + \beta_9 \left(I + T - W^{/}\right)_t + \beta_{10} \left(I + T - W^{/}\right)_{t-1} + \beta_{11} t + u_{3t} \,,$$

тождества

$$I_t + T_t = C_t + K_t + G_t \,,$$

$$I_t = W_t + W_t^{/} + P_t \,,$$

$$D_t = D_{t-1} + K_t \,,$$

где C – затраты на потребление,

K – инвестиции,

G – затраты государственного сектора,

P – прибыль,

W – зарплата в частном секторе,

$W^{/}$ – зарплата в государственном секторе,

D – запасы капитала,

T – налоги,

I – доход после уплаты налогов,

t – время,

u_1, u_2, u_3 – случайные величины.

В модели переменные C, K, W, I, P и D рассматриваются как взаимозависимые или эндогенные, а P_{t-1}, D_{t-1} и I_{t-1} – как заранее определенные.

Применение 1МНК здесь также невозможно. Смещение оценок, которое здесь имеет место, носит название **смещения одновременных уравнений**. Основная причина – нарушение условия $\operatorname{cov}(x,u) = 0$.

8. Если рассмотреть размер валового внутреннего продукта как функцию от производственных ресурсов, основных производственных фондов, рабочей силы и материальных ресурсов, то целесообразно представить данное соотношение в виде следующей системы:

$$X_t = a_0 F_t^{a_1} L_t^{a_2} u_t \,,$$

$$M_t = b_0 + b_1 X_t + v_t \,,$$

$$I_t = X_t - M_t \,,$$

где I_t – внутренний валовой продукт,

X_t – выпуск продукции,

M_t – материальные ресурсы,

F_t – основные производственные фонды,

L_t – рабочая сила,

t – время,

u_t, v_t – случайные переменные (остатки),

a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 – параметры модели, которые необходимо определить.

Представленная система состоит из двух регрессионных уравнений и одного тождества. Одно из регрессионных уравнений является нелинейной функцией. Решение по модели может быть получено только решая всю систему уравнений одновременно.

Приведенная модель может быть модифицирована, если принять во внимание, что объемы производства в данный период зависят от их объемов в предыдущем периоде времени. В этом случае в модель вводится лаговая переменная X_{t-1}:

$$X_t = a_0 X_{t-1}^{a_1} F_t^{a_2} L_t^{a_3} u_t ,$$

$$M_t = b_0 + b_1 X_t + v_t ,$$

$$I_t = X_t - M_t .$$

В такой формулировке переменные X_t и u_t становятся зависимыми, что приводит к смещенности оценок, если их рассчитывать методом 1МНК.

9. Общеизвестно, что себестоимость продукции снижается, если растет производительность труда. Вместе с тем имеет место также и изменение уровня заработной платы. Соотношение между указанными показателями может быть представлено в виде модели

$$T_c = \alpha_0 T_n^{\alpha_1} T_з^{\alpha_2} u ,$$

$$T_n = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m + u_1 ,$$

$$T_з = b_0 + b_1 x_1^/ + b_2 x_2^/ + \ldots + b_m x_m^/ + u_2 ,$$

$$T_c = kT_з ,$$

где T_c – индекс снижения себестоимости продукции,

T_n – темп роста производительности труда,

$T_з$ – темп роста заработной платы,

x_i, $x_i^{/}$ – факторы, влияющие на производительность труда и заработную плату.

Модель представлена тремя регрессионными уравнениями, одно из которых нелинейное, и тождеством. Нахождение параметров модели должно быть осуществлено при одновременном решении всех уравнений системы.

Обобщая вышеприведенные примеры можно заключить, что эконометрическая модель представляет собой совокупность соотношений, которые описывают взаимосвязи между экономическими показателями. Эти взаимосвязи могут иметь как стохастический, так и детерминированный характер. Системы одновременных структурных уравнений включают, как правило, линейные соотношения. Нелинейности чаще всего аппроксимируются линейными уравнениями.

В общем виде эконометрическая модель на основе системы одновременных структурных уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} y_{1t} = a_{11}y_{1t} + \ldots + a_{1k}y_{kt} + b_{10}x_{0t} + \ldots + b_{1m}x_{mt} + u_{1t} \\ y_{2t} = a_{21}y_{1t} + \ldots + a_{2k}y_{kt} + b_{20}x_{0t} + \ldots + b_{2m}x_{mt} + u_{2t} \\ \vdots \\ y_{kt} = a_{k1}y_{1t} + \ldots + a_{kk}y_{kt} + b_{k0}x_{0t} + \ldots + b_{km}x_{mt} + u_{kt} \end{cases}.$$

В модели $x_{0t} = 1$, некоторые $a_{11},\ldots,a_{kk},b_{10},\ldots,b_{km}$ могут быть равны нулю. В матричной форме данная система уравнений имеет вид

$$Y = AY + BX + u\ .$$

Переменные, находящиеся в правой части, являются заданными или экзогенными, в левой – эндогенными. Переменные y, являясь эндогенными для одного уравнения, в то же время являются экзогенными для другого.

Определение *Эконометрическая модель в виде системы уравнений непосредственно отражает структуру связей между переменными и поэтому носит название **структурной формы эконометрической модели**.*

Решая систему структурных уравнений относительно переменных y, получим следующую систему:

$$\begin{cases} Y_{1t} = r_{10}x_{0t} + r_{11}x_{1t} + \ldots + r_{1m}x_{mt} + v_{1t} \\ Y_{2t} = r_{20}x_{0t} + r_{21}x_{1t} + \ldots + r_{2m}x_{mt} + v_{2t} \\ \vdots \\ Y_{kt} = r_{k0}x_{0t} + r_{k1}x_{1t} + \ldots + r_{km}x_{mt} + v_{kt} \end{cases}.$$

Произведем преобразование исходной системы в матричной форме относительно Y

$$Y - AY = BX + u\,,$$

$$(E - A)Y = BX + u\,,$$

$$Y = (E - A)^{-1}BX + (E - A)^{-1}u\,,$$

$$Y = RX + v\,,$$

где

$$R = (E - A)^{-1}B\,,$$

$$v = (E - A)^{-1}u\,.$$

Определение *Эконометрическая модель, представленная системой уравнений относительно переменных Y, носит название **приведенной** или **усеченной,** или **редуцированной формы модели**.*

Параметры структурной модели оценивают прямое влияние заранее определенных переменных на эндогенные переменные. Что же касается параметров редуцированной модели, то они оценивают и прямое, и непрямое влияние на эндогенные переменные. В этом смысле параметры усеченной модели удобно использовать для прогнозирования и анализа экономической деятельности, так как они дают оценку как общего, так и прямого и непрямого влияния экзогенных переменных на зависимые переменные.

Имеются, по крайней мере, четыре причины для использования редуцированной формы уравнений:

1. Так как уравнениям в редуцированной форме не присуще свойство одновременности, они не нарушают классического предположения о независимости экзогенных переменных x и ошибок u. Следовательно,

данные уравнения могут быть оценены методом 1МНК без необходимости иметь дело с проблемами одновременных уравнений.

2. Иногда коэффициенты редуцированной модели могут быть использованы для расчета коэффициентов структурной модели. Для этих целей используется (довольно редко) непрямой метод наименьших квадратов.
3. Интерпретация коэффициентов редуцированной формы как мультипликаторов (коэффициентов эластичности) позволяет использовать их при интерпретации экономических показателей.
4. Возможно, наиболее важной причиной является то, что уравнения в редуцированной форме играют важную роль при использовании двушагового метода наименьших квадратов (2МНК) для оценки параметров одновременных уравнений.

<u>Оценка смещения параметров модели</u>

Для того чтобы проиллюстрировать наличие смещения оценок, получаемых с помощью метода 1МНК, воспользуемся кейнсианской моделью определения дохода

$$C = a_0 + a_1 I + u\ , \quad 0 < a_1 < 1\ ,$$

$$I_t = C_t + K_t\ .$$

Рассмотрим оценку параметра a_1. Она рассчитывается по формуле

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum\left(C_t - \overline{C}\right)\left(I_t - \bar{I}\right)}{\sum\left(I_t - \bar{I}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sum\left(a_0 + a_1 I_t + u_t - \overline{C}\right)\left(I_t - \bar{I}\right)}{\sum\left(I_t - \bar{I}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sum\left(a_0 + a_1 I_t - \overline{C}\right)\left(I_t - \bar{I}\right) + \sum u_t\left(I_t - \bar{I}\right)}{\sum\left(I_t - \bar{I}\right)^2} =$$

$$= a_1 + \frac{\sum u_t\left(I_t - \bar{I}\right)}{\sum\left(I_t - \bar{I}\right)^2}.$$

Оценка уравнения называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно самой оценке

$$M\left(a_1\right) = \hat{a}_1\ .$$

Для нашего случая имеем

$$M(a_1) = \hat{a}_1 + M\left[\frac{\sum u_t(I_t - \bar{I})}{\sum (I_t - \bar{I})^2}\right].$$

Оценить выражение $\frac{\sum u_t(I_t - \bar{I})}{\sum (I_t - \bar{I})^2}$ прямым способом не представляется возможным. Однако если показать, что отношение $\frac{\sum u_t(I_t - \bar{I})}{\sum (I_t - \bar{I})^2}$ не является нулем, то полученная оценка параметра a_1 является смещенной.

Допустим, что размер выборки растет до бесконечности. Найдем граничное значение отношения $\frac{\sum u_t(I_t - \bar{I})}{\sum (I_t - \bar{I})^2}$, используя правило сходимости по вероятности (в основе лежит теорема Бернулли). Считается, что оценка является смещенной, если ее сходимость по вероятности не равна истинному значению $\hat{a}_1$.

Сходимость по вероятности $p \cdot \lim(\hat{a}_1)$ =

= *сходимость по вероятности* $\hat{a}_1$ + *сходимость по вероятности* $\left[\frac{\sum u_t(I_t - \bar{I})}{\sum (I_t - \bar{I})^2}\right]$ =

$$= p \cdot \lim(\hat{a}_1) + p \cdot \lim\left[\frac{\sum u_t(I_t - \bar{I})}{\sum (I_t - \bar{I})^2}\right] =$$

$$= \hat{a}_1 + p \cdot \lim\left[\frac{\sum u_t(I_t - \bar{I})}{\sum (I_t - \bar{I})^2}\right],$$

$$p \cdot \lim(\hat{a}_1) = \hat{a}_1 + \frac{1}{1 - \hat{a}_1}\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_I^2}\right).$$

Учитывая, что $0 < \hat{a}_1 < 1$ и $\sigma^2 > 0$, и $\sigma_I^2 > 0$, то имеет место переоценка параметра a_1 и $\frac{1}{1 - \hat{a}_1}\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_I^2}\right)$ является величиной смещения.

<u>Методы оценки параметров систем одновременных уравнений</u>

1. Метод непрямых наименьших квадратов;
2. Метод инструментальных переменных;

3. Двушаговый метод наименьших квадратов;
4. Метод наибольшей вероятности ограниченной информации;
5. Метод смешанного оценивания;
6. Трехшаговый метод наименьших квадратов;
7. Метод наибольшей вероятности полной информации.

Первые пять методов относятся к классу методов одного уравнения, так как они применяются к одному уравнению системы. Последние два – к системным, так как они имеют дело со всей системой уравнений.

Двушаговый метод наименьших квадратов (2МНК)

Данный метод является наиболее часто применяемым для решения систем одновременных структурных уравнений. Нарушения условия независимости переменных x и остатков u можно избежать, если сумеем найти такую переменную, которая

1) является хорошей заменой для эндогенной (зависимой) переменной;
2) не коррелирует с ошибками (остатками) модели.

Подставляя данную переменную вместо эндогенной в уравнение системы мы, тем самым, обеспечиваем выполнение необходимого условия

$$\operatorname{cov}(x,u) = 0 .$$

Данный обобщенный подход носит название инструментальных переменных.

Рассмотрим некоторую систему одновременных уравнений

$$y_{1t} = \beta_0 + \beta_1 y_{2t} + \beta_2 x_t + u_{1t} ,$$

$$y_{2t} = \alpha_0 + \alpha_1 y_{1t} + \alpha_2 z_t + u_{2t} .$$

Если мы найдем переменную, которая сильно коррелирует с переменной y_2, но не коррелирует с u, то мы сможем подставить ее в первое уравнение системы и, тем самым, избежать нарушения классического предположения.

Двушаговый метод дает возможность найти аппроксимацию данной проблемы.

Для достижения поставленной цели (замены эндогенных переменных в правой части уравнений инструментальными) метод 2МНК использует редуцированную форму уравнений. Вся процедура разбивается на два шага.

1 шаг. *Применение метода 1МНК к каждому из редуцированных уравнений по каждой из эндогенных переменных.*

Так как независимые переменные, к числу которых относят также и лаговые переменные, не коррелируют с ошибками в редуцированных уравнениях, то получаемые оценки r_s методом 1МНК уравнений в редуцированной форме являются несмещенными.

Эти оценки могут быть использованы для расчета оценок эндогенных переменных

$$\widehat{y}_{1t} = r_0 + r_1 x_t + r_2 z_t ,$$

$$\widehat{y}_{2t} = r_3 + r_4 x_t + r_5 z_t .$$

Переменные $\widehat{y}_i$ будут использованы в качестве заместителей переменных y_i в структурных уравнениях системы.

Следует однако учитывать, что оценки r_s не являются некоррелируемыми с остатками u. В связи с этим рассматриваемая процедура обеспечивает лишь приближенное нахождение инструментальных переменных, состоятельных для случая больших выборок и смещенных для малых, необходимых для оценки коэффициентов структурных одновременных уравнений.

2 шаг. *Замена переменных y_i на инструментальные переменные $\widehat{y}_i$ только в правых частях структурных одновременных уравнений. Оценка преобразованных структурных уравнений методом 1МНК.*

Таким образом, на втором шаге производится оценка параметров системы уравнений

$$y_{1t} = \beta_0 + \beta_1 \widehat{y}_{2t} + \beta_2 x_t + u_{1t} ,$$

$$y_{2t} = \alpha_0 + \alpha_1 \widehat{y}_{1t} + \alpha_2 z_t + u_{2t}$$

методом 1МНК.

Метод 2МНК может быть обобщен и на случай большего числа уравнений и переменных.

Метод 2МНК имеет ряд особенностей, которые сводятся к следующему:

1. Оценки 2МНК все еще смещенные, но уже состоятельные. Чем больше выборка, тем более точные оценки системы одновременных уравнений мы получаем, тем меньше вариация получаемых оценок.
2. Смещение оценок, получаемых с помощью 2МНК для малых выборок, имеет противоположный знак по отношению к смещению оценок, получаемых с помощью 1МНК.
3. Если получаемые инструментальные переменные слабо подходят в качестве замены эндогенным переменным (R^2 имеет низкое значение), то метод 2МНК не подходит для решения проблемы одновременных уравнений.
4. Если объясняющие (независимые) переменные сильно коррелируют друг с другом, то 2МНК не дает хороших результатов. Мультиколлинеарность ведет к смещению оценок.
5. t-статистики для оценки значимости параметров, получаемых с помощью 2МНК, являются более точными по сравнению с их аналогами, получаемыми методом 1МНК.

В качестве **примера** рассмотрим наивную линейную кейнсианскую макроэкономическую модель экономики США. Она описывается следующей системой уравнений и тождеств:

$$(1) \qquad I_t = C_t + K_t + G_t + NX_t,$$

$$(2) \qquad C_t = \beta_0 + \beta_1 ID_t + \beta_2 C_{t-1} + u_{1t},$$

$$(3) \qquad ID_t = I_t - T_t,$$

$$(4) \qquad K_t = \beta_3 + \beta_4 I_t + \beta_5 ra_t + u_{2t},$$

$$(5) \qquad ra_t = \frac{r_t + r_{t-1}}{2},$$

$$(6) \qquad r_t = \beta_6 + \beta_7 I_t + \beta_8 M1_t + u_{3t},$$

где I_t – валовой внутренний продукт в году t,

C_t – общее личное потребление в году t,

K_t – общие валовые частные домашние инвестиции в году t,

G_t – правительственные расходы (покупка товаров и услуг) в году t,

NX_t – чистый экспорт товаров и услуг (экспорт минус импорт) в году t,

T_t – налоги в году t,

r_t – ставка процента в году t,

$M1_t$ – предложение денег (денежная масса $M1$) в году t,

ID_t – доход, доступный для использования в году t,

ra_t – среднее между r_t и r_{t-1} (ставка процента с лагом в 6 месяцев).

В модели экзогенными переменными являются G_t, NX_t, T_t и $M1_t$, а также лаговые переменные r_{t-1} и C_{t-1}. К эндогенным переменным, определяемым из модели, относятся I_t, C_t, K_t, ID_t, r_t и ra_t.

Данные за 1964-1988 гг. для расчетов представлены в табл. 4.1. Значения лаговых переменных за 1963 г. составляют: $C_{1963} = 1108{,}3$, $r_{1963} = 4{,}26$.

Таблица 4.1. Данные для построения макроэкономической модели (Источник: *The Economic Report of the President, 1989*)

Год	C	K	r	I	ID	$M1$	G	NX
1964	1170,7	325,9	4,40	1973,3	1291,0	160,4	470,8	5,9
1965	1236,3	367,0	4,49	2087,6	1365,7	167,9	487,0	–2,7
1966	1298,9	390,5	5,13	2208,3	1431,3	172,1	532,6	–13,7
1967	1337,7	374,4	5,51	2271,4	1493,2	183,3	576,2	–16,9
1968	1405,9	391,8	6,18	2365,6	1551,3	197,5	597,6	–29,7
1969	1456,7	410,3	7,03	2423,3	1599,8	204,0	591,2	–34,9
1970	1492,1	381,5	8,04	2416,2	1668,1	214,5	572,6	–30,0
1971	1538,8	419,3	7,39	2484,8	1728,4	228,4	566,5	–39,8
1972	1621,8	465,4	7,21	2608,5	1797,4	249,4	570,7	–49,4
1973	1689,5	520,8	7,44	2744,1	1916,3	263,0	565,3	–31,5
1974	1674,0	481,3	8,57	2729,3	1896,6	274,4	573,2	0,8
1975	1711,9	383,3	8,83	2695,0	1931,7	287,6	580,9	18,9
1976	1803,9	453,5	8,43	2826,7	2001,0	306,5	580,3	–11,0
1977	1883,7	521,3	8,02	2958,6	2066,6	331,4	589,1	–35,5
1978	1961,0	576,9	8,73	3115,2	2167,4	358,7	604,1	–26,8
1979	2004,5	575,2	9,63	3192,4	2212,6	386,1	609,1	3,6
1980	2000,3	509,3	11,94	3187,1	2214,3	412,2	620,5	57,0
1981	2024,2	545,5	14,17	3248,8	2248,6	439,1	629,7	49,4
1982	2050,7	447,3	13,79	3166,0	2261,5	476,4	641,7	26,3
1983	2146,0	504,0	12,04	3279,1	2331,9	522,1	649,0	–19,9
1984	2249,3	658,4	12,71	3501,4	2469,8	551,9	677,7	–84,0
1985	2354,8	637,0	11,37	3618,7	2542,8	620,1	731,2	–104,3
1986	2455,2	643,5	9,02	3721,7	2640,9	725,4	760,5	–137,5

1987	2520,9	674,8	9,38	3847,0	2686,3	744,2	780,2	–128,9
1988	2592,2	721,8	9,71	3996,1	2788,3	776,0	782,3	–100,2

Изо всех уравнений системы только (2), (4) и (6) являются стохастическими и их параметры необходимо оценить. Эндогенные переменные совместно определяются системой. Для того чтобы убедиться в том, что все они взаимозависимы, достаточно зафиксировать одну из них в качестве константы и дать возможность остальным изменяться.

Рассмотрим содержание стохастических структурных уравнений. Функция потребления (2) относится к типу функций дистрибутивного лага Койка.

Согласно Л.М.Койку, модель дистрибутивного лага предполагает, что коэффициенты лаговых переменных уменьшаются в геометрической прогрессии в соответствии с порядком (длиной) лага:

$$\beta_i = \beta_0 \lambda^i,$$

где i – порядок (длина) лага, $i = 1,2,\ldots,p$, $0 < \lambda < 1$.

Так

$$\beta_3 = \beta_0 \lambda^3.$$

Например, если мы имеем дело с моделью

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_p x_{t-p} + u_t,$$

то вместо коэффициентов β_i, $i = 1,2,\ldots,p$ можно подставить их выражение $\beta_i = \beta_0 \lambda^i$. В результате получим:

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 \left(x_t + \lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + \ldots + \lambda^p x_{t-p} \right) + u_t.$$

Вопросы оценки величины λ в настоящей теме не рассматриваются.

Инвестиционная функция (4) включает упрощенный мультипликатор и стоимость компонентов капитала. Мультипликатор β_4 измеряет стимул к инвестированию, который генерируется ростом ВВП. Таким образом, ожидается, что в кейнсианской модели β_4 будет иметь знак «+». С другой стороны, чем выше стоимость капитала, тем меньше ожидается приток инвестиций в основном потому, что ожидаемая норма возврата капитала не является достаточной для покрытия высокой его стоимости. Отсюда можно предположить, что β_5 будет отрицательным.

Для того чтобы планировать инвестиции и осуществить инвестиционный проект, необходимо время, в связи с этим ставка процента рассматривается с лагом в шесть месяцев. Уравнение для ставки процента решается в предположении о равновесии на рынке денег. Рост ВВП при постоянном уровне предложения денег должен увеличить потребность в перемещении денег (в совершении сделок), стимулируя рост ставки процента. Поэтому ожидается, что β_7 будет положительным. Если предложение денег возрастет при постоянном уровне ВВП, то ожидается, что ставка процента будет снижаться, поэтому β_8 должно быть отрицательным.

И, наконец, не надо забывать, что в наивной кейнсианской модели цены предполагаются неизменными.

Применим метод 2МНК.

Несмотря на то, что в модели шесть эндогенных переменных, только три из них представлены в правых частях стохастических уравнений. Таким образом, только три редуцированных уравнения нам нужны для оценки их с помощью 2МНК.

1 шаг.

Найдем инструментальные переменные $\widehat{I}_t$, $\widehat{I}\widehat{D}_t$ и $\widehat{r}\widehat{a}_t$ с целью их использования на втором шаге метода 2МНК вместо соответствующих эндогенных в правых частях стохастических уравнений.

Так, для $\widehat{I}\widehat{D}_t$ выражение выглядит следующим образом:

$$\widehat{I}\widehat{D}_t = 232{,}6 - 0{,}6G_t - 0{,}73NX_t + 0{,}08T_t + 1{,}17C_{t-1} + 9{,}8r_{t-1} - 0{,}27M1_t .$$

Для данного уравнения

$$R^2 = 0{,}998,\ t_1 = -2{,}5,\ t_2 = -4{,}3,\ t_3 = 0{,}6,\ t_4 = 17{,}8,\ t_5 = 2{,}7,\ t_6 = -2{,}1,\ DW = 2{,}51 .$$

Так как $R^2 = 0{,}998$, то можно заключить, что данная редуцированная форма прекрасно подходит, чтобы использовать ее в качестве замены искомой эндогенной переменной ID_t. Несмотря на высокую мультиколлинеарность и статистическую незначимость коэффициента при T_t, используем полученное уравнение, а также аналогичные уравнения для $\widehat{I}_t$ и $\widehat{r}\widehat{a}_t$ с тем, чтобы найти 25 наблюдений каждой из переменных.

2 шаг.

Используем найденные значения инструментальных переменных для того, чтобы рассчитать параметры уравнений (2), (4) и (6). Для этого восползуемся методом 1МНК. Получим следующие три уравнения регрессии (для сравнения запишем также уравнения, полученные прямым расчетом методом 1МНК без применения процедуры замены переменных, используемой в методе 2МНК (табл. 4.2)).

Таблица 4.2. Сравнительные данные по двум методам

Метод 2МНК	Метод 1МНК
$\widehat{C}_t = -52{,}2 + 0{,}61\widehat{ID}_t + 0{,}37C_{t-1}$ $R^2 = 0{,}996$, $t_1 = 2{,}8$, $t_2 = 1{,}6$, $DW = 0{,}71$	$\widehat{C}_t = -55{,}3 + 0{,}64ID_t + 0{,}34C_{t-1}$ $R^2 = 0{,}996$, $t_1 = 3{,}8$, $t_2 = 1{,}9$, $DW = 0{,}69$
$\widehat{K}_t = -72{,}0 + 0{,}24\widehat{I}_t - 13{,}9\widehat{ra}_t$ $R^2 = 0{,}924$, $t_1 = 13{,}4$, $t_2 = -3{,}8$, $DW = 1{,}74$	$\widehat{K}_t = -70{,}4 + 0{,}23I_t - 13{,}1ra_t$ $R^2 = 0{,}924$, $t_1 = 13{,}4$, $t_2 = -3{,}6$, $DW = 1{,}77$
$\widehat{r}_t = -10{,}2 + 0{,}008\widehat{I}_t - 0{,}015M1_t$ $R^2 = 0{,}585$, $t_1 = 3{,}4$, $t_2 = -2{,}0$, $DW = 0{,}49$	$\widehat{r}_t = -9{,}8 + 0{,}0082I_t - 0{,}014M1_t$ $R^2 = 0{,}585$, $t_1 = 3{,}33$, $t_2 = -2{,}0$, $DW = 0{,}48$

Сравнение результатов показывает незначительную разницу между оценками параметров. Если оценки 1МНК смещенные, то почему результаты так близки?

Так как на первом шаге метода 2МНК мы подобрали очень хорошую замену для ID_t, и значения ID_t и $\widehat{ID}_t$ очень близки, то на втором шаге мы получили оценки параметров практически такие же, как и те, которые найдены при прямом их оценивании методом 1МНК.

Далее, мы ожидали положительное смещение в оценках 1МНК и небольшое отрицательное смещение в оценках 2МНК, однако подобное имело место только в половине случаев. Это могло быть вызвано сильной мультиколлинеарностью между независимыми переменными на первом шаге метода 2МНК, а также слишком хорошим соответствием редуцированной формы уравнения.

И, наконец, статистика Дарбина-Уотсона показывает в двух случаях наличие положительной автокорреляции остатков. Это является серьезной проблемой в оценке функции потребления, которая может быть вызвана лаговыми переменными. Одним из приемов, позволяющих решить данную проблему является использование обобщенного метода наименьших квадратов.

<u>Идентификация модели</u>

Применение метода 2МНК возможно только тогда, когда модель *идентифицирована.*

Для того чтобы понять суть проблемы идентификации, рассмотрим **пример.**

Пусть имеется система одновременных уравнений для спроса и предложения товара. В качестве независимой переменной выступает цена товара P

$$Q_{Dt} = a_0 + a_1 P_t + u_{Dt},$$

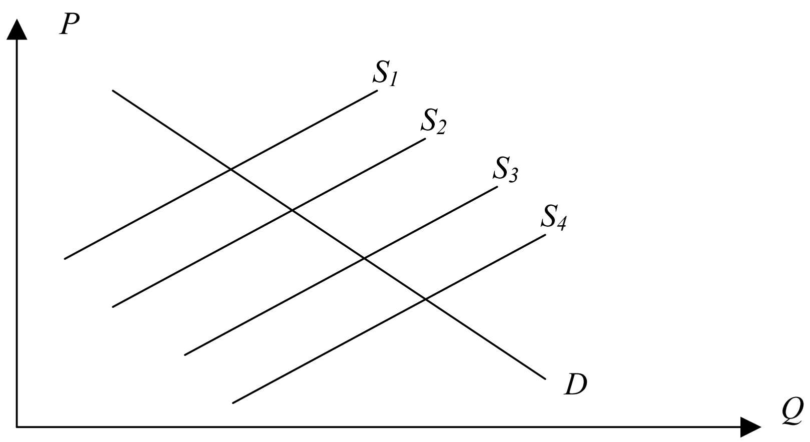
$$Q_{St} = b_0 + b_1 P_t + u_{St}.$$

Несмотря на то, что одно из уравнений помечено как уравнение спроса, а второе – как предложения, по их наполнению (переменным) трудно различить, какое из них определяет спрос, а какое – предложение.

Чтобы их различить, необходимо иметь некоторые заранее заданные переменные, которые позволят сделать эти различия. Добавим во второе уравнение новую переменную Z

$$Q_{St} = b_0 + b_1 P_t + b_2 Z_t + u_{St}.$$

В этом случае, изменяя каждый раз Z, кривая предложения будет смещаться, однако кривая спроса нет. В связи с этим можно составить хорошую картинку того, как выглядит кривая спроса



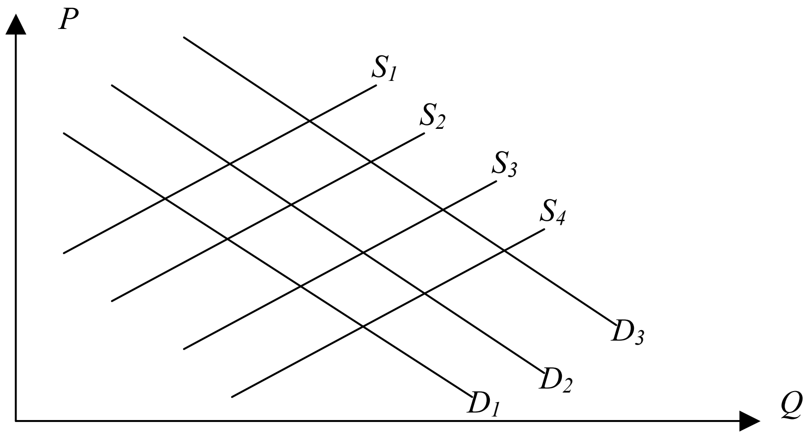
Если бы переменная Z присутствовала и в уравнении спроса

$$Q_{Dt} = a_0 + a_1 P_t + a_2 Z_t + u_{Dt},$$

$$Q_{St} = b_0 + b_1 P_t + b_2 Z_t + u_{St},$$

то различить два уравнения снова было бы невозможно

Графически это выглядит так:



Отсюда можно сформулировать правило, которое позволит различить уравнения: ***необходимо иметь хотя бы одну объясняющую переменную в каждом уравнении, которой нет в другом.***

Например

$$Q_{Dt} = a_0 + a_1 P_t + a_2 X_t + u_{Dt},$$

$$Q_{St} = b_0 + b_1 P_t + b_2 Z_t + u_{St}.$$

Сейчас, когда переменная Z изменится, кривая предложения сместится, и мы сможем идентифицировать кривую спроса. Если изменится X, то кривая спроса сместится, и мы сможем идентифицировать кривую предложения. Вместе с тем, если Z и X сильно коррелируют между собой, проблема идентификации остается открытой.

Таким образом, идентификация является условием применения метода 2МНК к системам одновременных уравнений. Структурное уравнение идентифицировано только тогда, когда достаточное количество независимых переменных исключено из уравнения с целью отличить данное уравнение от всех других уравнений системы.

Следует иметь в виду, что в системе одновременных структурных уравнений некоторые из них могут быть идентифицированы, в то время как другие нет.

Для идентификации уравнений используются **условие порядка** и **условие ранга.**

<u>Условие порядка</u>

Условие порядка – систематический метод для определения, может ли конкретное уравнение из системы одновременных уравнений быть потенциально идентифицированным. Если уравнение удовлетворяет условию порядка, то оно идентифицировано во всех (но только в ограниченном их числе) случаях.

Условие порядка является необходимым, но не достаточным условием идентификации. Достаточным условием идентификации является ранговое условие, которое будет рассмотрено ниже.

Для применения условия порядка необходимо определить

1. количество независимых заранее определенных переменных (экзогенных и лаговых) для всей системы;
2. количество угловых коэффициентов, которые оцениваются для конкретного уравнения.

Условие порядка звучит так:

Необходимым условием для уравнения быть идентифицированным является то, что число заранее определенных (независимых) переменных в системе должно быть больше или равно числу угловых коэффициентов в уравнении, которое идентифицируется

$$K \geq b_s,$$

где K – число заранее определенных экзогенных переменных,

b_s – число оцениваемых угловых коэффициентов для идентифицируемого уравнения.

Условие порядка может быть сформулировано и несколько иначе (чаще всего используется именно данная форма):

Число заранее определенных переменных в системе уравнений, которое исключено из уравнения, должно быть больше или равно числу эндогенных переменных, включенных в уравнение, минус один

$$K - k \geq m - 1,$$

где k – число заранее определенных переменных в отдельном уравнении,

m – число эндогенных переменных в отдельном уравнении.

Рассмотрим применение условия порядка. Пусть имеется система одновременных уравнений

$$Q_{Dt} = a_0 + a_1 P_t + a_2 X_{1t} + a_3 X_{2t} + u_{Dt},$$

$$Q_{St} = b_0 + b_1 P_t + b_2 X_{3t} + u_{St},$$

$$Q_{St} = Q_{Dt}.$$

В данной системе переменные Q_{Dt}, Q_{St} и P_t – эндогенные, а X_{1t}, X_{2t} и X_{3t} – экзогенные.

Первое уравнение идентифицировано, так как число заранее заданных переменных в системе одновременных уравнений равно числу угловых коэффициентов, которые необходимо оценить в данном уравнении: $3 = 3$.

Второе уравнение также идентифицировано с помощью условия порядка, так как число независимых переменных по-прежнему равно 3, а число оцениваемых угловых коэффициентов в данном уравнении – 2. Таким образом, условие порядка выполняется: $3 > 2$.

Вместе с тем рассматриваемый случай носит название *переидентификации.*

Ранговое условие идентификации

Условие ранговой идентификации формулируется следующим образом:

В системе одновременных уравнений, состоящей из M уравнений и содержащей M эндогенных переменных, уравнение будет идентифицированным тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из коэффициентов, которые соответствуют исключенным переменным рассматриваемого уравнения во всех других уравнениях модели кроме данного, равен $M-1$.

Для иллюстрации применения условия ранговой идентификации рассмотрим систему одновременных уравнений

$$
\begin{aligned}
y_{1t} &= b_{10} && + b_{12}y_{2t} + b_{13}y_{3t} + \gamma_{11}x_{1t} && + u_{1t} \\
y_{2t} &= b_{20} && + b_{23}y_{3t} + \gamma_{21}x_{1t} + \gamma_{22}x_{2t} && + u_{2t} \\
y_{3t} &= b_{30} + b_{31}y_{1t} && + \gamma_{31}x_{1t} + \gamma_{32}x_{2t} && + u_{3t} \\
y_{4t} &= b_{40} + b_{41}y_{1t} + b_{42}y_{2t} && + \gamma_{43}x_{3t} && + u_{4t}
\end{aligned}
$$

Переменные y_1, y_2, y_3 и y_4 – эндогенные, а x_1, x_2 и x_3 – экзогенные.

Прежде чем проверить выполнение рангового условия, проверим условие порядка. Для этого представим необходимые данные в таблице

Уравнение	$K-k$	$m-1$	Идентификация
1	2	2	Да
2	1	1	Да
3	1	1	Да
4	2	2	Да

Таким образом, в соответствии с условием порядка, все уравнения идентифицированы.

Теперь рассмотрим применение рангового условия. Для этих целей перепишем систему уравнений таким образом, что все параметры, кроме ошибок, перенесены в левую часть.

Занесем параметры модели в таблицу

№ уравнения	1	y_1	y_2	y_3	y_4	x_1	x_2	x_3
1	$-b_{10}$	1	$-b_{12}$	$-b_{13}$	0	$-\gamma_{11}$	0	0
2	$-b_{20}$	0	1	$-b_{23}$	0	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0
3	$-b_{30}$	$-b_{31}$	0	1	0	$-\gamma_{31}$	$-\gamma_{32}$	0
4	$-b_{40}$	$-b_{41}$	$-b_{42}$	0	1	0	0	$-\gamma_{43}$

Рассмотрим первое уравнение. В нем отсутствуют переменные y_4, x_2 и x_3. Проверим условие идентификации данного уравнения. Построим матрицу коэффициентов при указанных переменных, включенных в остальные уравнения модели

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & 0 \\ 1 & 0 & -\gamma_{43} \end{pmatrix}.
$$

Для того чтобы найти ранг матрицы, необходимо рассчитать определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & 0 \\ 1 & 0 & -\gamma_{43} \end{vmatrix} = 0 .$$

Так как определитель равен нулю, то ранг матрицы не равен $M-1$, то есть он меньше трех. Отсюда условие ранга не выполняется и первое уравнение не может быть идентифицировано.

Проверка остальных уравнений показывает, что идентифицированным является только четвертое уравнение.

Процедуру проверки системы уравнений с помощью рангового условия на предмет идентификации можно разбить на четыре шага.

1 шаг. Записать систему уравнений в табличной форме;

2 шаг. Вычеркнуть коэффициенты рядка для идентифицируемого уравнения;

3 шаг. Вычеркнуть столбцы, соответствующие нулевым коэффициентам рассматриваемого уравнения;

4 шаг. Получить необходимую матрицу и рассчитать ее ранг. Если ранг равен $M-1$, то уравнение идентифицировано, если меньше $M-1$, то нет.

Общее правило проверки соответствия уравнений системы одновременных уравнений условию идентификации

1. Если $K-k > m-1$ и $RankA = M-1$, то уравнение переидентифицировано;
2. Если $K-k = m-1$ и $RankA = M-1$, то уравнение точно идентифицировано;
3. Если $K-k \geq m-1$ и $RankA < M-1$, то уравнение не идентифицировано;
4. Если $K-k < m-1$, то структурное уравнение недоопределено. В этом случае $RankA < M-1$.

Рекурсивные модели

Модель называется **рекурсивной**, если ее структурные уравнения можно записать таким образом, что первое содержит в правой части только независимые переменные, второе – только независимые и одну эндогенную и так далее.

$$
\begin{gathered}
y_1 = f(x_1, \ldots, x_k, u_1), \\
y_2 = f(x_1, \ldots, x_k, y_1, u_2), \\
y_3 = f(x_1, \ldots, x_k, y_1, y_2, u_3), \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Данные системы еще называют треугольными, так как коэффициенты при эндогенных переменных образуют треугольную матрицу. К рекурсивным моделям может быть применен метод 1МНК последовательно, начиная с первого уравнения.