ТЕМА 10

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

- *Основоположниками теории игр являются Джон фон Нейман и Оскар Моргенштерн.*
- *1929 г. – статья Джона фон Неймана «К теории стратегических игр».*
- 1944 *г. – фундаментальный труд Дж. фон Неймана и О.Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» – заложены основы теории игр как новой математической дисциплины.*

Еще раньше

- *Работы Баше де Мезирака,*
- *письмо Паскаля к Ферма от 29 июля 1654 г.,*
- *статья Р.Монморта*

- В начале XX века были попытки создания математической теории конфликтов (теории игр), что нашло свое отражение в статьях К.Баутона, Е.Мура, Э.Цермело, Э.Бореля, Г.Штейнгауза, в монографии Э.Ласкера, а также в докладе Дж. фон Неймана 7 декабря 1926 г. на заседании Геттингенского математического общества.

- *Авторы работ и учебников по теории игр: Э.Бургер, Дж. Мак Кинси, Г.Оуэн, Н.Н.Воробьев, Э.Г.Давыдов, С.Карлин, Ж.-П.Обэн, И.Розенмюллер и др.*

ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ. СЕДЛОВЫЕ ТОЧКИ

- При рассмотрении игр двух лиц с нулевой суммой учитываются следующие особенности:

- Имеются два игрока (строковый и столбцовый);
- Строковый игрок должен выбрать одну из m стратегий и одновременно столбцовый игрок – одну из n стратегий;
- Если строковый игрок выберет стратегию i, а столбцовый – стратегию j, то первый получит доход a_{ij}, а второй – убыток в том же размере .

Платежная матрица или матрица наград.

Стратегии строкового игрока	Стратегии столбцового игрока			
	Стратегия 1	Стратегия 2	…	Стратегия *n*
Стратегия 1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
Стратегия 2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
Стратегия *m*	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Если строковый игрок выберет вторую стратегию, а столбцовый игрок третью, то первый получит выигрыш в две единицы, а второй проиграет столько же

Основная особенность игр двух лиц с нулевой суммой

- **Для любых выбранных стратегий общий выигрыш будет равен нулю**

Теория игр основывается на предположении

- Каждый игрок выбирает стратегию, которая позволяет ему поступить наилучшим образом при условии, что его оппонент знает стратегию, которой он следует

Стратегии строкового игрока	Стратегии столбцового игрока		
	Стратегия 1	**Стратегия 2**	**Стратегия 3**
Стратегия 1	1	5	4
Стратегия 2	2	2	6
Стратегия 3	3	4	5

- *Строковый игрок, с целью получения наибольшего дохода должен выбрать такую стратегию, которая максимизирует строковый минимум, т.е.*

$$\max\{1 \quad 2 \quad 3\} = 3,$$

что соответствует третьей стратегии

- Для того, чтобы минимизировать свои потери, столбцовый игрок должен выбрать стратегию, соответствующую минимальным потерям среди максимальных для столбцов:

$$\min\{3 \quad 5 \quad 6\} = 3$$

Стратегии строкового игрока	Стратегии столбцового игрока			Минимум в строке
	Стратегия 1	**Стратегия 2**	**Стратегия 3**	
Стратегия 1	1	5	4	1
Стратегия 2	2	2	6	2
Стратегия 3	3	4	5	3
Максимум в столбце	3	5	6	

Условие седловой точки:

- ***max (среди строковых минимумов) = min (среди столбцовых максимумов)***

Любая игра для двух игроков с нулевой суммой, удовлетворяющая данному условию, имеет ***седловую точку***

- Общим значением для обеих частей условия является значение $v = 3$. Эта величина называется **ценой игры** для строкового игрока

- *Седловая точка является одновременно минимальной точкой в собственной строке и максимальной – в собственном столбце.*
- *Эта точка является, с одной стороны, локальным минимумом, а с другой – локальным максимумом.*
- *Она может рассматриваться как* ***точка равновесия****, покинув которую, за счет одностороннего изменения стратегии* <u>*ни один из игроков не получит выгоды*</u>

Игра, не имеющая седловой точки

Стратегии строкового игрока	Стратегии столбцового игрока		Минимум в строке
	Стратегия 1	Стратегия 2	
Стратегия 1	–3	2	–3
Стратегия 2	2	–2	–2
Максимум в столбце	2	2	

max (среди строковых минимумов) = –2,

min (среди столбцовых максимумов) = 2

ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С ПОСТОЯННОЙ СУММОЙ

- ***Определение***

  Игра двух лиц с постоянной суммой – это такая игра, в которой для любых стратегий двух игроков сумма их выигрышей имеет постоянное значение **C**

Пример

- Два телевизионных канала борются за аудиторию, которая насчитывает 50 млн. человек. В наиболее удобный для зрителей промежуток времени (с 20 час. 30 мин. до 21 час. 30 мин.) телевизионные каналы хотели бы определить вид программы, которая привлечет наибольшее их количество. Имеются четыре вида программ, которые каждый из каналов может транслировать: драма, комедия, боевик и футбол

Для каждого вида программ определен охват зрительской аудитории, рассчитанный относительно первого телевизионного канала. Данные (в млн. чел.) приведены в следующей таблице

Первый канал	*Второй канал*			
	Драма	*Комедия*	*Боевик*	*Футбол*
Драма	*25*	*23*	*18*	*31*
Комедия	*22*	*14*	*16*	*17*
Боевик	*30*	*26*	*27*	*33*
Футбол	*20*	*24*	*19*	*28*

Имеется ли седловая точка в данной игре и какова цена игры для первого и второго каналов?

- Данная игра является игрой двух лиц с постоянной суммой. Так, например, если первый канал выберет третью стратегию, т.е. решит транслировать боевик, а второй канал выберет первую стратегию, т.е. будет транслировать драму, то первый получит охват аудитории в количестве 30 млн. человек, а второй канал 50 – 30 = 20 млн. человек. Таким образом, постоянная сумма данной игры равна 50 млн. человек.

max (среди строковых минимумов) =

= min (среди столбцовых максимумов) =

= 26.

Первый канал	Второй канал				Минимум в строке
	Драма	Коме-дия	Боевик	Футбол	
Драма	25	23	18	31	18
Комедия	22	14	16	17	14
Боевик	30	26	27	33	26
Футбол	20	24	19	28	19
Максимум в столбце	30	26	27	33	

ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ: СЛУЧАЙНЫЕ СТРАТЕГИИ, ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ, ДОМИНИРОВАНИЕ

- Два игрока играют на пальцах в «чет-нечет». Каждый из них может выбросить один или два пальца. Если сумма пальцев нечетная, то первый игрок выигрывает одну гривню, если четная – то второй (ту же величину). Матрица возможных исходов представлена в следующей таблице:

Первый игрок	Второй игрок	
	1 палец	2 пальца
1 палец	–1	1
2 пальца	1	–1

Имеется ли в данной игре седловая точка?

max (среди строковых минимумов) = –1

min (среди столбцовых максимумов) = 1

Первый игрок	Второй игрок		Минимум в строке
	1 палец	2 пальца	
1 палец	–1	1	–1
2 пальца	1	–1	–1
Максимум в столбце	1	1	

Вывод:

- *В данной игре отсутствует точка равновесия (или седловая точка).*
- *Какие бы стратегии оба игрока ни выбрали, всегда найдется игрок, который может получить выгоду от одностороннего изменения стратегии*

СЛУЧАЙНЫЕ ИЛИ СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

- *Рассмотрим случай, когда каждой стратегии игрока ставится в соответствие некоторая вероятность, с которой он выбирает эту стратегию:*

p_1 – вероятность того, что первый игрок выбросит 1 палец;

p_2 – вероятность того, что первый игрок выбросит 2 пальца;

q_1 – вероятность того, что второй игрок выбросит 1 палец;

q_2 – вероятность того, что второй игрок выбросит 2 пальца.

$$p_1 \geq 0 \qquad p_2 \geq 0 \qquad p_1 + p_2 = 1$$

$S_1 = (p_1, p_2)$ – смешанная стратегия 1-го игрока

$$q_1 \geq 0 \qquad q_2 \geq 0 \qquad q_1 + q_2 = 1$$

$S_2 = (q_1, q_2)$ – смешанная стратегия 2-го игрока

- *Любая смешанная стратегия строкового игрока* $\left(p_1, p_2, \ldots, p_m\right)$ *и столбцового* $\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right)$ *будет называться* чистой стратегией, *если какое либо* $p_i = 1$ $\left(q_j = 1\right)$*, то есть игроки всегда, независимо от того, который раз они играют, выбирают одну и ту же стратегию*
- **Чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии**