ТЕМА 1

ВВЕДЕНИЕ
В
ЛИНЕЙНОЕ
ПРОГРАММИРОВАНИЕ

- *«Линейное программирование рассматривается как революционный подход, дающий человеку возможность формулировать общие цели и получать при помощи симплекс метода оптимальные решения для широкого класса практических проблем высокой степени сложности»*

Дж. Данциг

Бонн, 1982

?

Что собой представляет задача линейного программирования

?

Пример постановки задачи.

Игрушечная фабрика производит два типа деревянных игрушек: солдатиков и поезда. Один солдат продается по 27 гривен и для его производства используется сырье стоимостью 10 гривен. При этом затраты труда и накладные расходы фабрики составляют 14 гривен в расчете на одного солдата. Поезд продается по 21 гривне и требует для своего производства сырьевых материалов стоимостью 9 гривен. Затраты на оплату труда и накладные расходы составляют 10 гривен.

Производство деревянных солдатиков и поездов предполагает использование квалифицированной рабочей силы двух категорий работников: столяров и отделочников. Два часа труда работы столяра и один час работы на участке отделки необходимы для изготовления одного солдатика. Поезд требует для своего производства по одному часу работы на каждом из участков. Каждую неделю игрушечная фабрика может получить для производства игрушек столько сырья, сколько необходимо. Однако на вышеупомянутых столярном и отделочном участках в распоряжении фабрики имеется ограниченное число часов: 100 и 80, соответственно. Потребность в поездах неограниченна, солдаты же покупаются в количестве, не превышающем 40 штук.

Игрушечная фабрика хотела бы максимизировать недельную прибыль (доходы минус затраты). Сформулируйте математическую модель ситуации с игрушечной фабрикой, которая могла бы быть использована для максимизации ее недельной прибыли.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1. Переменные принятия решений (неизвестные) – величины, которые необходимо отыскать в результате решения задачи

x_1 – количество солдат, производимых еженедельно, шт.;

x_2 – количество поездов, производимых еженедельно, шт.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

2. Целевая функция

Функция, которая должна быть максимизирована или минимизирована, носит название **целевой функции**.

Недельная прибыль = (недельный доход)
– (стоимость покупки сырья) –
– (другие переменные затраты)

Недельный доход $= 27x_1 + 21x_2$

Недельные затраты на приобретение сырья $= 10x_1 + 9x_2$

Другие недельные переменные затраты $= 14x_1 + 10x_2$

Недельная прибыль

$$= (27x_1 + 21x_2) - (10x_1 + 9x_2) - (14x_1 + 10x_2) = \mathbf{3x_1 + 2x_2}$$

Целевая функция

$$\text{Maximize } Z = 3x_1 + 2x_2$$

или

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

3. Ограничения

Ограничение 1. Каждую неделю на столярном участке может быть использовано не более 100 часов рабочего времени.

Ограничение 2. Каждую неделю на участке отделки может быть использовано не более 80 часов рабочего времени.

Ограничение 3. В связи с ограниченным спросом на солдат, их должно быть произведено не более 40.

Ограничение 1

$$2x_1 + x_2 \le 100$$

Ограничение 2

$$x_1 + x_2 \le 80$$

Ограничение 3

$$x_1 \le 40$$

Определение

- ***Для того чтобы ограничение имело смысл, необходимо, чтобы все его составляющие были выражены в одних единицах измерения.***

Коэффициенты при переменных в ограничениях носят название **технологических коэффициентов.**

Величина, стоящая справа в ограничении и отражающая количество имеющихся ресурсов или целесообразные выпуски продукции, носит название **правой части ограничения** или **свободного члена**.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

4. Ограничения на знак переменной

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Большинство экономических задач предполагает, что переменные принятия решений **могут быть только неотрицательными**

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОБЛЕМЫ

ИГРУШЕЧНОЙ ФАБРИКИ

- Целевая функция – максимум прибыли

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

- Ограничение по столярному участку

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

- Ограничение по участку отделки

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

- Ограничение по числу солдат

$$x_1 \leq 40$$

- Ограничения на знак переменных x_1 и x_2

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

Определение

- *Функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ является* ***линейной функцией*** *тогда и только тогда, когда для некоторого множества констант $c_1,c_2,\ldots,c_n$ выполняется соотношение*

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n.$$

$f(x_1,x_2)=2x_1+x_2$ – линейная функция

$f(x_1,x_2)=x_1^2x_2$ – нелинейная функция

Определение

- *Для любой линейной функции $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и любого числа b неравенства $f(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b$ и $f(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge b$ являются* ***линейными неравенствами.***

$2x_1+3x_2\le 3$ и

$2x_1+x_2\ge 3$ – линейные неравенства

$x_1^2x_2\ge 3$ – нелинейное неравенство

Определение

- *Задача линейного программирования является* ***оптимизационной задачей****, для которой:*

1.Мы пытаемся максимизировать (или минимизировать) линейную функцию переменных принятия решений. Функция, которая должна быть максимизирована или минимизирована, носит название ***целевой функции****.*

2.Значения переменных принятия решений должны удовлетворять ***системе ограничений****. Каждое ограничение должно быть представлено в виде линейного уравнения или неравенства.*

*3.**Ограничение на знак** ассоциируется с каждой переменной. Для любой переменной принятия решений x_i ограничение на знак определяет: должна ли переменная x_i быть неотрицательной ($x_i \geq 0$) или она может быть неограниченной на знак.*

ОБЩИЙ ВИД ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Целевая функция:

$$\max(\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

Ограничения:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&a_{i-1,1}x_1 + a_{i-1,2}x_2 + \ldots + a_{i-1,n}x_n = b_{i-1} \\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\
&\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&a_{m-1,1}x_1 + a_{m-1,2}x_2 + \ldots + a_{m-1,n}x_n \ge b_{m-1} \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m
\end{aligned}
$$

Ограничения на знак переменных:

$$x_j \ge 0, \ \left(j = \overline{1,n}\right)$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. <u>**Пропорциональность**</u>

- Вклад каждой переменной принятия решений в целевую функцию пропорционален значению данной переменной

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2. <u>Аддитивность</u>

- Общий вклад в целевую функцию или левую часть ограничения равен сумме частных вкладов (т.е. каждой переменной в отдельности)

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3. Делимость (непрерывность)

- Каждая переменная принятия решений должна принимать как целые, так и дробные значения

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4. Определенность

- Все параметры модели (коэффициенты целевой функции, правые части ограничений и технологические коэффициенты) должны быть заранее определены, то есть известны

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

5. <u>Неотрицательность переменных</u>

- Считается необходимым, чтобы все переменные задачи линейного программирования принимали только неотрицательные значения

ОБЛАСТЬ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Определение:

- ***Область допустимых значений (ОДЗ)*** *задачи линейного программирования – это множество точек, удовлетворяющих всем ограничениям задачи и ограничениям на знак переменных*

$$x_1=40,\ x_2=20$$

ОБЛАСТЬ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Определение:

- *Любая точка, которая не входит в область допустимых значений задачи линейного программирования, называется* ***недопустимой точкой***.

$$x_1=15, x_2=70$$

$$x_1=40, x_2=-20$$

ОБЛАСТЬ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Определение:

- *Для задачи линейного программирования с критерием на максимум* ***оптимальным решением*** *является точка области допустимых значений с наибольшим значением целевой функции. Аналогично, для задачи на минимум оптимальным решением является точка из области допустимых значений с наименьшим значением целевой функции.*

Виды ОДЗ

Область допустимых значений задачи ЛП может быть:

- ограниченной
- отдельной точкой
- неограниченной
- пустым множеством точек