

Формулировки задач линейного программирования

Задача о диете

Диета человека, желающего похудеть, требует, чтобы все пищевые продукты, которые он употребляет в пищу, были из следующих четырех основных групп: печенье, мороженое, прохладительный напиток и пицца. В настоящее время доступными являются 4 продукта: тульский пряник, шоколадное мороженое, пепси-кола и пицца. Тульский пряник стоит 1 грн. 50 коп., шоколадное мороженое – 60 коп., бутылка пепси-колы – 90 коп. и пицца – 2 грн. 40 коп. Ежедневно он должен «проглотить», по меньшей мере, 500 калорий, 60 г шоколада, 100 г сахара и 80 г жиров.

Содержание пищевых элементов на единицу каждого продукта представлено ниже в таблице.

- **Сформулируйте модель линейного программирования, чтобы удовлетворить дневную потребность в пищевых элементах с минимальной стоимостью продуктов питания.**

<i>Пищевые продукты</i>	<i>Калории</i>	<i>Шоколад, г</i>	<i>Сахар, г</i>	<i>Жиры, г</i>
<i>Тульский пряник</i>	<i>400</i>	<i>30</i>	<i>20</i>	<i>20</i>
<i>Шоколадное мороженое</i>	<i>200</i>	<i>20</i>	<i>20</i>	<i>40</i>
<i>Пепси-кола (одна бутылка)</i>	<i>150</i>	<i>0</i>	<i>40</i>	<i>10</i>
<i>Пицца</i>	<i>500</i>	<i>0</i>	<i>40</i>	<i>50</i>

Задача о диете

- Переменные:

x_1 — количество тульских пряников, съедаемых ежедневно, шт.;

x_2 — количество сопочков шоколадного мороженого, съедаемых каждый день, шт.;

x_3 — количество бутылок пепси-колы, выпиваемых ежедневно, шт.;

x_4 — количество единиц пиццы, употребляемых каждый день в пищу, шт.

Задача о диете

- Целевая функция: минимизация стоимости дневной диеты

$$\min Z = 1,5x_1 + 0,6x_2 + 0,9x_3 + 2,4x_4$$

Задача о диете

- Ограничения:

1. Ежедневно должно быть потреблено не менее 500 калорий

$$400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500$$

2. Потребление шоколада должно составлять, как минимум, 60 г

$$30x_1 + 20x_2 \geq 60$$

Задача о диете

3. Дневное потребление сахара должно быть не менее 100 г

$$20x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 40x_4 \geq 100$$

4. Жиров должно быть потреблено в количестве, не менее 80 г

$$20x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 50x_4 \geq 80$$

Ограничения на знак переменной:

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4})$$

Задача на построение расписаний

Больнице скорой помощи в разные дни недели требуется различное количество санитаров в зависимости от объемов выполняемых работ по обслуживанию потерпевших. Число требуемых санитаров представлено ниже в таблице.

Положение профсоюза работников здравоохранения гласит, что каждый трудящийся должен работать пять дней подряд и затем два дня отдыхать.

Например, санитар, работающий с понедельника по пятницу, должен отдыхать в субботу и воскресенье.

<i>День</i>	<i>Количество требуемых санитаров</i>
<i>1 – Понедельник</i>	<i>27</i>
<i>2 – Вторник</i>	<i>23</i>
<i>3 – Среда</i>	<i>25</i>
<i>4 – Четверг</i>	<i>29</i>
<i>5 – Пятница</i>	<i>24</i>
<i>6 – Суббота</i>	<i>26</i>
<i>7 – Воскресенье</i>	<i>21</i>

Задача на построение расписаний

Руководство больницы скорой помощи хотело бы выполнить дневные требования по числу санитаров, используя только тех, которые работают целый день (на полную ставку).

- *Сформулируйте модель линейного программирования, минимизирующую количество санитаров, которое следует принять на работу.*

Задача на построение расписаний

- Переменные:

x_i – количество санитаров, начинающих работу с i -го дня, чел.

Целевая функция: минимизация численности санитаров больницы скорой помощи

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

Задача на построение расписаний

- Ограничения:

По числу санитаров больницы скорой помощи, работающих

1. В понедельник

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 27$$

2. Во вторник

$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 23$$

Задача на построение расписаний

3. В среду

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 25$$

4. В четверг

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 29$$

5. В пятницу

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 24$$

Задача на построение расписаний

6. В субботу

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 26$$

7. В воскресенье

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 21$$

Ограничения на знак переменных:

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,7})$$

Задача краткосрочного финансового планирования

Малая электронная компания «ЭЛКО» производит магнитофоны и радиоприемники. Стоимость затрат труда, сырья на единицу продукции, а также отпускная цена магнитофонов и радиоприемников приведены в таблице

<i>Показатели</i>	<i>Магнитофон</i>	<i>Радиоприемник</i>
<i>Отпускная цена, грн.</i>	<i>100</i>	<i>90</i>
<i>Стоимость затрат труда, грн.</i>	<i>50</i>	<i>35</i>
<i>Стоимость сырья, грн.</i>	<i>30</i>	<i>40</i>

Задача краткосрочного финансового планирования

На 1 декабря текущего года «ЭЛКО» располагает сырьем, которое позволяет изготовить 100 магнитофонов и 100 радиоприемников. На эту же дату баланс компании выглядит следующим образом

<i>Элементы баланса</i>	<i>Наличные ресурсы (актив)</i>	<i>Обязательства (пассив)</i>
<i>Наличные деньги, грн.</i>	<i>10000</i>	
<i>Счета к оплате, грн.</i>	<i>3000</i>	
<i>Стоимость запасов, грн.</i>	<i>7000</i>	
<i>Банковский заем, грн.</i>		<i>10000</i>

Задача краткосрочного финансового планирования

Текущее отношение наличных ресурсов (активов) к обязательствам (пассивам) составляет:

$$20000/10000 = 2.$$

«ЭЛКО» должна определить, сколько магнитофонов и радиоприемников следует производить в течение декабря. Потребность в продукции достаточно высока, чтобы быть уверенным в том, что все произведенное будет реализовано.

Задача краткосрочного финансового планирования

Все продажи осуществляются в кредит на два месяца и, следовательно, деньги за продукцию, произведенную в декабре, не будут получены до февраля следующего года. Ожидается, что в течение декабря «ЭЛКО» получит по счетам к оплате 2000 грн. С другой стороны, у компании есть обязательства заплатить в данном месяце по займу 1000 грн. и за месячную аренду помещения 1000 грн. Известно, что 1 января «ЭЛКО» получит сырье стоимостью 2000 грн. Оплату стоимости сырья необходимо осуществить к 1 февраля.

Задача краткосрочного финансового планирования

Служба менеджмента подсчитала, что для нормального функционирования фирмы размер наличности на 1 января должен составлять, по меньшей мере, 4000 грн. Банк, обслуживающий компанию, выдвигает требование, чтобы текущее отношение активов к пассивам на начало января было не менее 2.

- ***Что и сколько должна «ЭЛКО» произвести в декабре, чтобы максимизировать месячную прибыль?***

Задача краткосрочного финансового планирования

Переменные:

x_1 — количество магнитофонов,
производимых в декабре, шт.;

x_2 — количество радиоприемников,
производимых в декабре, шт.

Задача краткосрочного финансового планирования

Целевая функция: максимизация прибыли

$$\max Z = 20x_1 + 15x_2$$

Задача краткосрочного финансового планирования

Ограничения:

1. Производство магнитофонов ограничено 100 единицами

$$x_1 \leq 100$$

2. Производство радиоприемников ограничено 100 единицами

$$x_2 \leq 100$$

Задача краткосрочного финансового планирования

3. Наличность на 1 января должна составлять, по меньшей мере, 4000 грн.

$$\begin{aligned} \text{Наличность на начало января} &= \\ &= (\text{наличность на 1 декабря}) + \\ &+ (\text{оплата по счетам в течение декабря}) - \\ &- (\text{оплата долга по займу}) - \\ &- (\text{оплата месячной аренды}) - \\ &- (\text{оплата труда}) = \end{aligned}$$

Задача краткосрочного финансового планирования

$$\begin{aligned}\text{Наличность} &= 10000 + 2000 - 1000 - 1000 - 50x_1 - 35x_2 = \\ &= 10000 - 50x_1 - 35x_2\end{aligned}$$

$$10000 - 50x_1 - 35x_2 \geq 4000$$

или

$$50x_1 + 35x_2 \leq 6000$$

Задача краткосрочного финансового планирования

4. Текущее отношение активов и пассивов должно быть не менее двух.

$$\text{Активы} = \text{наличность} + \text{счета к оплате} + \text{стоимость запасов}$$

Задача краткосрочного финансового планирования

Счета к оплате = (декабрьские счета к оплате) +
+ (счета за продукцию, произведенную в декабре) –
– (деньги, поступившие по счетам в течение
декабря) =

$$\begin{aligned} &= 3000 + 100x_1 + 90x_2 - 2000 = \\ &= 1000 + 100x_1 + 90x_2 \end{aligned}$$

Задача краткосрочного финансового планирования

Стоимость запасов = (стоимость запасов на 1 декабря) –
– (использованное сырье на производство продукции в
течение декабря) + (стоимость сырья, поступившего к 1
января) =

$$\begin{aligned} &= 7000 - 30x_1 - 40x_2 + 2000 = \\ &= 9000 - 30x_1 - 40x_2 \end{aligned}$$

Задача краткосрочного финансового планирования

$$\begin{aligned}\text{АКТИВЫ} &= 10000 - 50x_1 - 35x_2 + 1000 + 100x_1 + 90x_2 + \\ &+ 9000 - 30x_1 - 40x_2 = \\ &= 20000 + 20x_1 + 15x_2\end{aligned}$$

Задача краткосрочного финансового планирования

Обязательства = (обязательства на 1 декабря) –
– (оплата долга в декабре) +
+ (оплата поставок ресурсов,
осуществленных к 1 января) =

$$= 10000 - 1000 + 2000 = 11000 \text{ грн.}$$

Задача краткосрочного финансового планирования

$$\frac{20000 + 20x_1 + 15x_2}{11000} \geq 2$$

или

$$20x_1 + 15x_2 \geq 2000$$

Задача краткосрочного финансового планирования

Ограничения на знак переменных:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача на смешивание

Нефтеперерабатывающая компания использует три типа нефти для производства трех сортов бензина. Каждый сорт бензина производится путем смешивания всех трех типов нефти. Цены за нефть и бензин, в расчете на 1 баррель (баррель = 159 л), приведены в таблице

<i>Сорт бензина</i>	<i>Цена за 1 баррель, \$</i>	<i>Сорт нефти</i>	<i>Цена за 1 баррель, \$</i>
<i>1</i>	<i>70</i>	<i>1</i>	<i>45</i>
<i>2</i>	<i>60</i>	<i>2</i>	<i>35</i>
<i>3</i>	<i>50</i>	<i>3</i>	<i>25</i>

Задача на смешивание

Возможности по закупке нефти каждого типа ограничены 5000 баррелей в день. Вместе с тем мощность нефтеперерабатывающего завода компании ограничена выпуском 14000 баррелей бензина в день. При этом стоимость переработки одного барреля нефти в один баррель бензина составляет \$4 независимо от типа нефти и сорта бензина.

Задача на смешивание

Готовая продукция отличается октановым числом и содержанием серы. Смешанная нефть для производства бензина первого сорта должна содержать не более 1% серы и иметь октановое число не менее 10. Для второго сорта бензина смешанная нефть должна содержать не более 2% серы и иметь октановое число не менее 8, для третьего сорта – не более 1% и не менее 6, соответственно.

Закупаемая нефть имеет различное содержание указанных компонентов в зависимости от типа нефти. Соответствующие данные приведены в следующей таблице:

<i>Тип нефти</i>	<i>Октановое число</i>	<i>Содержание серы, %</i>
<i>1</i>	<i>12</i>	<i>0,5</i>
<i>2</i>	<i>6</i>	<i>2,0</i>
<i>3</i>	<i>8</i>	<i>3,0</i>

Задача на смешивание

Постоянные клиенты нефтеперерабатывающей компании покупают ежедневно следующее количество бензина различных сортов:

1-й сорт – 3000 баррелей;

2 -й сорт – 2000 баррелей;

3 -й сорт – 1000 баррелей.

Задача на смешивание

Компания постоянно заботится о своей репутации, поэтому она считает своим долгом полностью выполнять обязательства по поставкам готовой продукции. Однако, используя рекламу, компания имеет возможность увеличить потребность в собственной продукции. Известно, что каждый доллар, вложенный в рекламу любого сорта бензина, увеличивает потребность в нем на 10 баррелей.

Задача на смешивание

- *Используя линейное программирование, определите оптимальную политику нефтеперерабатывающей компании, обеспечивающую ей максимум прибыли*

Задача на смешивание

Переменные:

a_j — количество долларов, вкладываемых ежедневно в рекламу бензина j -го сорта;

x_{ij} — количество баррелей сырой нефти i -го типа, используемой ежедневно для производства бензина j -го сорта.

x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_{21}	x_{22}	x_{23}
x_{31}	x_{32}	x_{33}

Задача на смешивание

Доход от реализации готовой продукции =

$$= 70(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 60(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 50(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

Затраты на покупку сырой нефти =

$$= 45(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 35(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 25(x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

Задача на смешивание

Затраты на переработку сырой нефти в готовую продукцию =

$$= 4(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

Затраты на рекламу =

$$= a_1 + a_2 + a_3$$

Задача на смешивание

Целевая функция: максимизация прибыли

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = & 21x_{11} + 31x_{21} + 41x_{31} + 11x_{12} + 21x_{22} + 31x_{32} + \\ & + x_{13} + 11x_{23} + 21x_{33} - a_1 - a_2 - a_3 \end{aligned}$$

Задача на смешивание

Ограничение 1. Ежедневная потребность в бензине 1 сорта должна быть удовлетворена полностью.

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3000 + 10a_1$$

Ограничение 2. Ежедневная потребность в бензине 2 сорта должна быть удовлетворена полностью.

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2000 + 10a_2$$

Задача на смешивание

Ограничение 3. Ежедневная потребность в бензине 3 сорта должна быть удовлетворена полностью

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1000 + 10a_3$$

Ограничение 4. Не более 5000 баррелей сырой нефти 1 типа может быть приобретено ежедневно

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 5000$$

Задача на смешивание

Ограничение 5. Не более 5000 баррелей сырой нефти 2 типа может быть приобретено ежедневно

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 5000$$

Ограничение 6. Не более 5000 баррелей сырой нефти 3 типа может быть приобретено ежедневно

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 5000$$

Задача на смешивание

Ограничение 7. В связи с ограниченной мощностью по переработке нефти может быть произведено не более 14000 баррелей готовой продукции

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 14000$$

Задача на смешивание

Ограничение 8. Сырая нефть, смешанная для производства бензина 1 сорта, должна иметь октановое число не менее 10

$$\frac{12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \geq 10$$

Задача на смешивание

Ограничение 9. Сырая нефть, смешанная для производства бензина 2 сорта, должна иметь октановое число не менее 8.

$$\frac{12x_{12} + 6x_{22} + 8x_{32}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} \geq 8$$

Задача на смешивание

Ограничение 10. Сырая нефть, смешанная для производства бензина 3 сорта, должна иметь октановое число не менее 6

$$\frac{12x_{13} + 6x_{23} + 8x_{33}}{x_{13} + x_{23} + x_{33}} \geq 6$$

Задача на смешивание

Ограничение 11. Сырая нефть, смешанная для производства бензина 1 сорта, должна содержать не более 1% серы

$$\frac{0,005x_{11} + 0,02x_{21} + 0,03x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \leq 0,01$$

Задача на смешивание

Ограничение 12. Сырая нефть, смешанная для производства бензина 2 сорта, должна содержать не более 2% серы

$$\frac{0,005x_{12} + 0,02x_{22} + 0,03x_{32}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} \leq 0,02$$

Задача на смешивание

Ограничение 13. Сырая нефть, смешанная для производства бензина 3 сорта, должна содержать не более 1% серы

$$\frac{0,005x_{13} + 0,02x_{23} + 0,03x_{33}}{x_{13} + x_{23} + x_{33}} \leq 0,01$$

Задача на смешивание

Ограничения на знак:

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i, j = \overline{1,3})$$

$$a_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,3})$$