

Графический метод решения задач линейного программирования

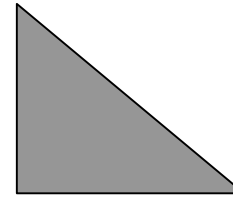
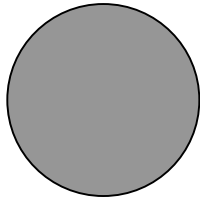
Определение

- Множество точек S называется **выпуклым**, если наряду с любыми двумя точками, принадлежащими данному множеству, оно содержит и отрезок прямой, их соединяющий.

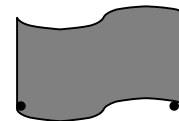
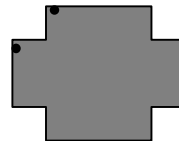
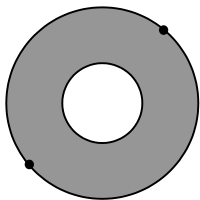
Определение (общий случай)

- Множество точек S называется **выпуклым**, если наряду с любыми двумя точками, принадлежащими данному множеству, оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

Выпуклые множества точек



Невыпуклые множества



Определение

- Для любого выпуклого множества точек S , точка P множества называется **экстремальной точкой**, если любой отрезок, принадлежащий S , содержит точку P в качестве конечной точки данного отрезка.

Экстремальные точки часто называют **угловыми точками**.

Оптимальное решение задачи ЛП находится в одной из экстремальных (угловых) точек.

Множество допустимых значений задачи ЛП определяется областью допустимых значений задачи.

Множество допустимых решений задачи ЛП определяется числом угловых точек выпуклого многогранника, определяющего данную область.

Графическое решение задачи с двумя переменными

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

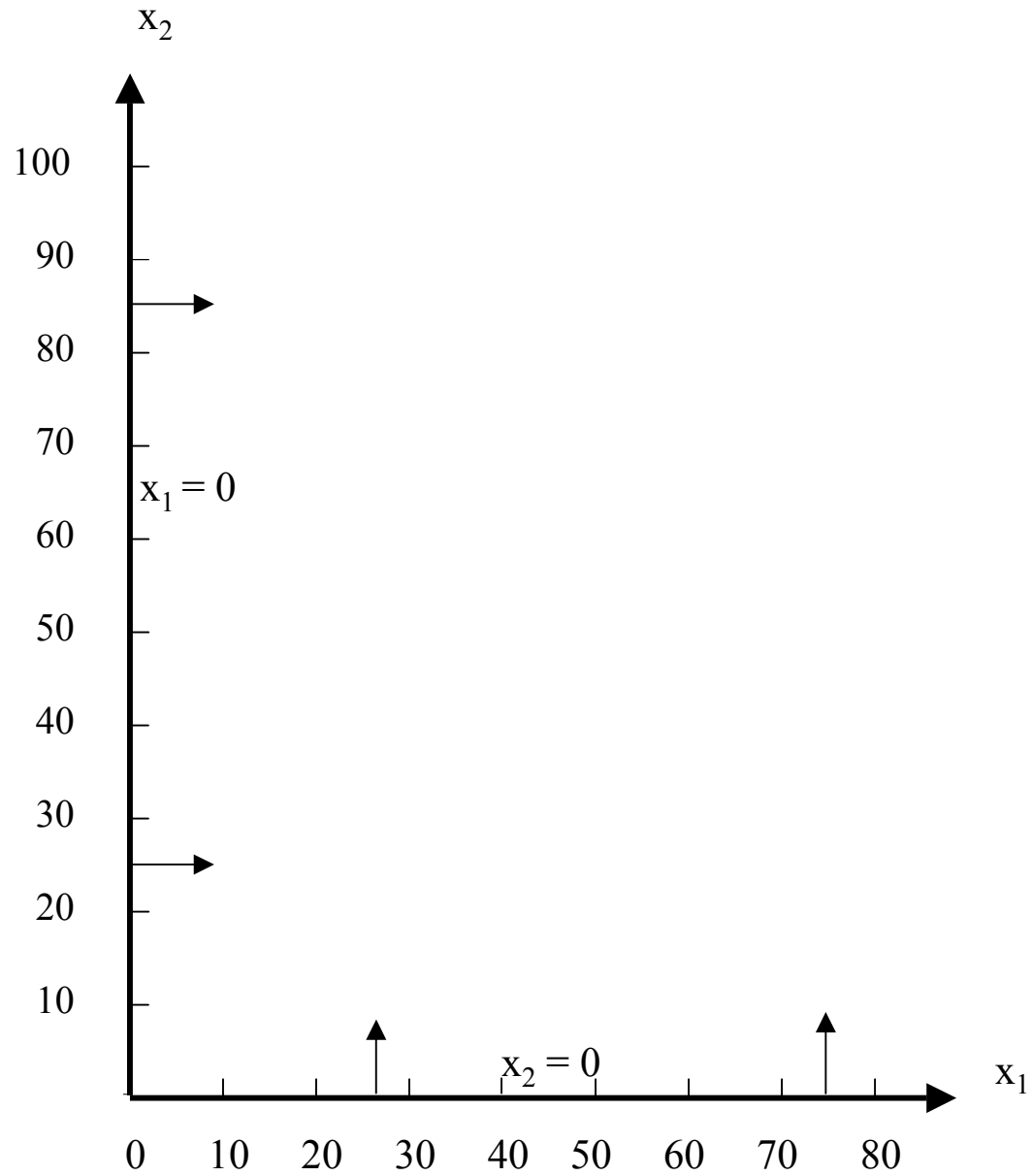
$$x_1 + x_2 \leq 80$$

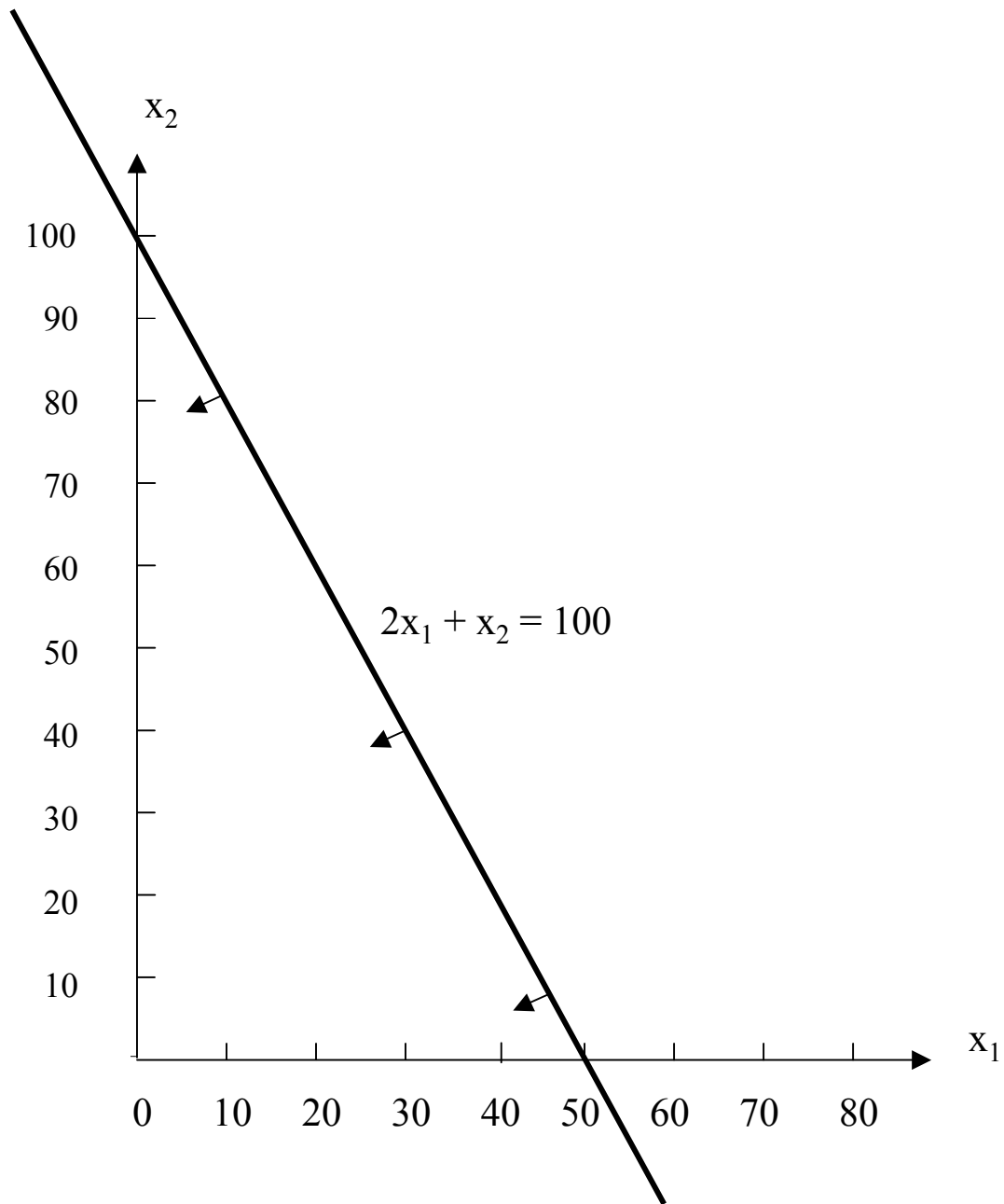
$$x_1 \leq 40$$

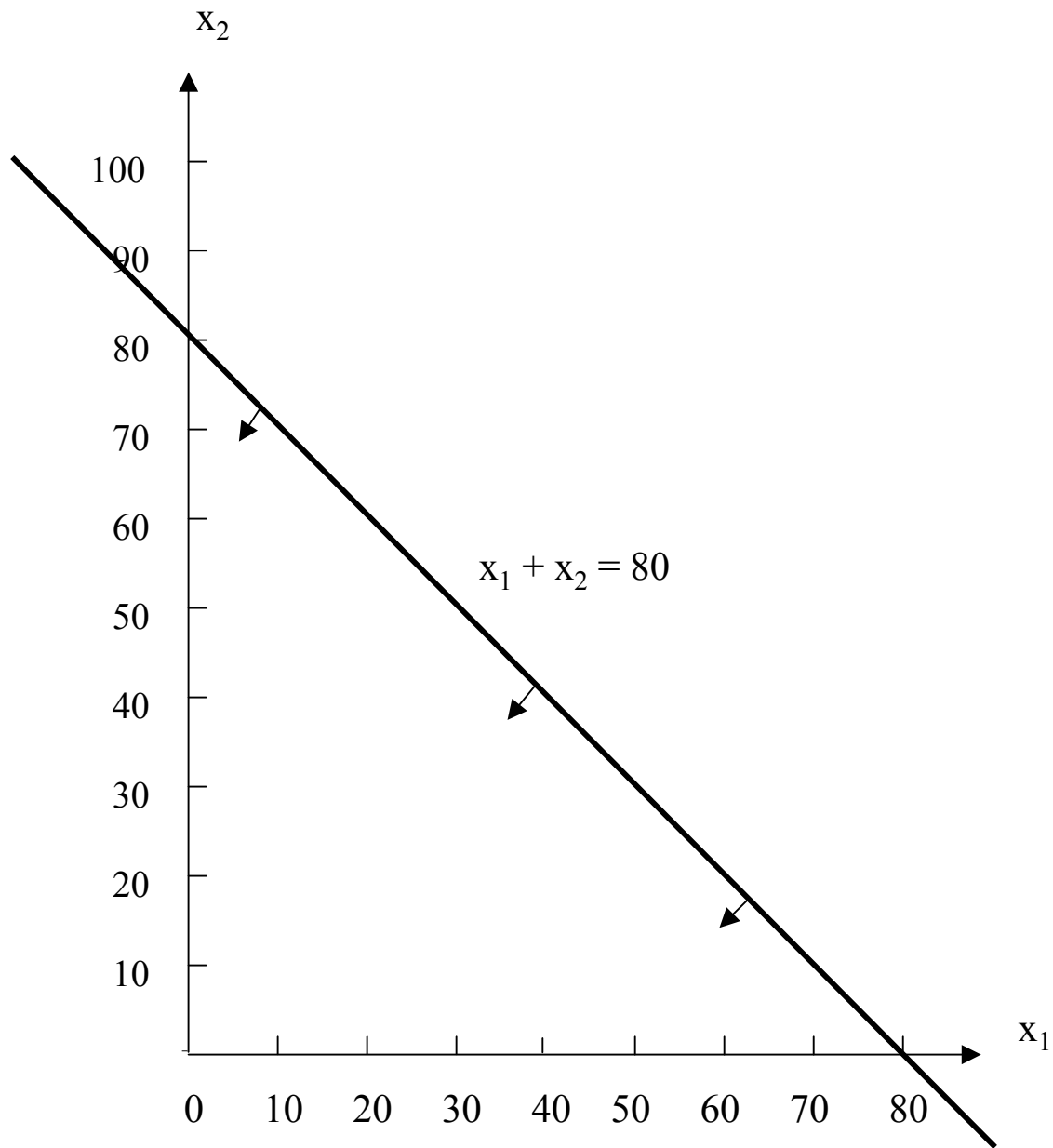
$$x_1 \geq 0$$

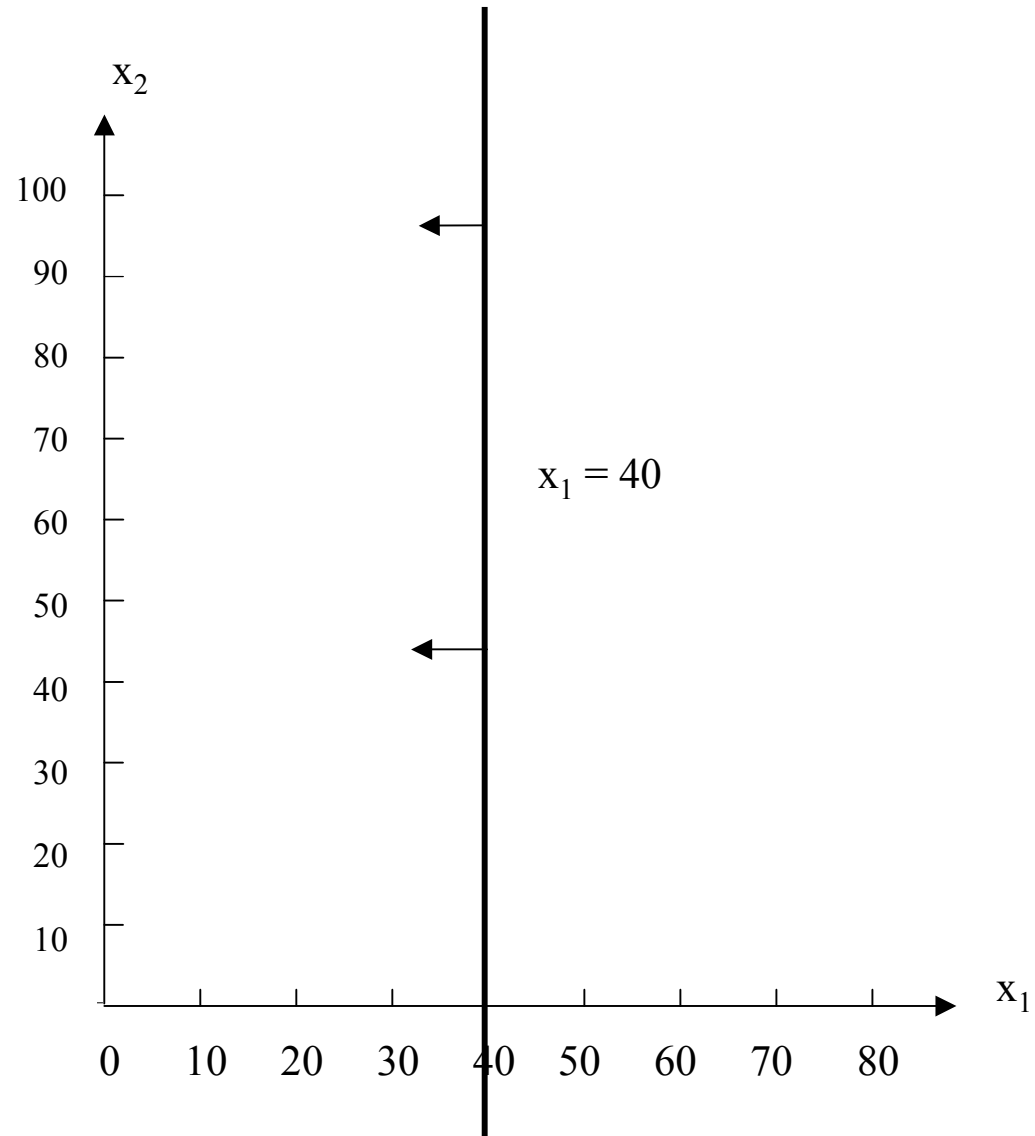
$$x_2 \geq 0$$

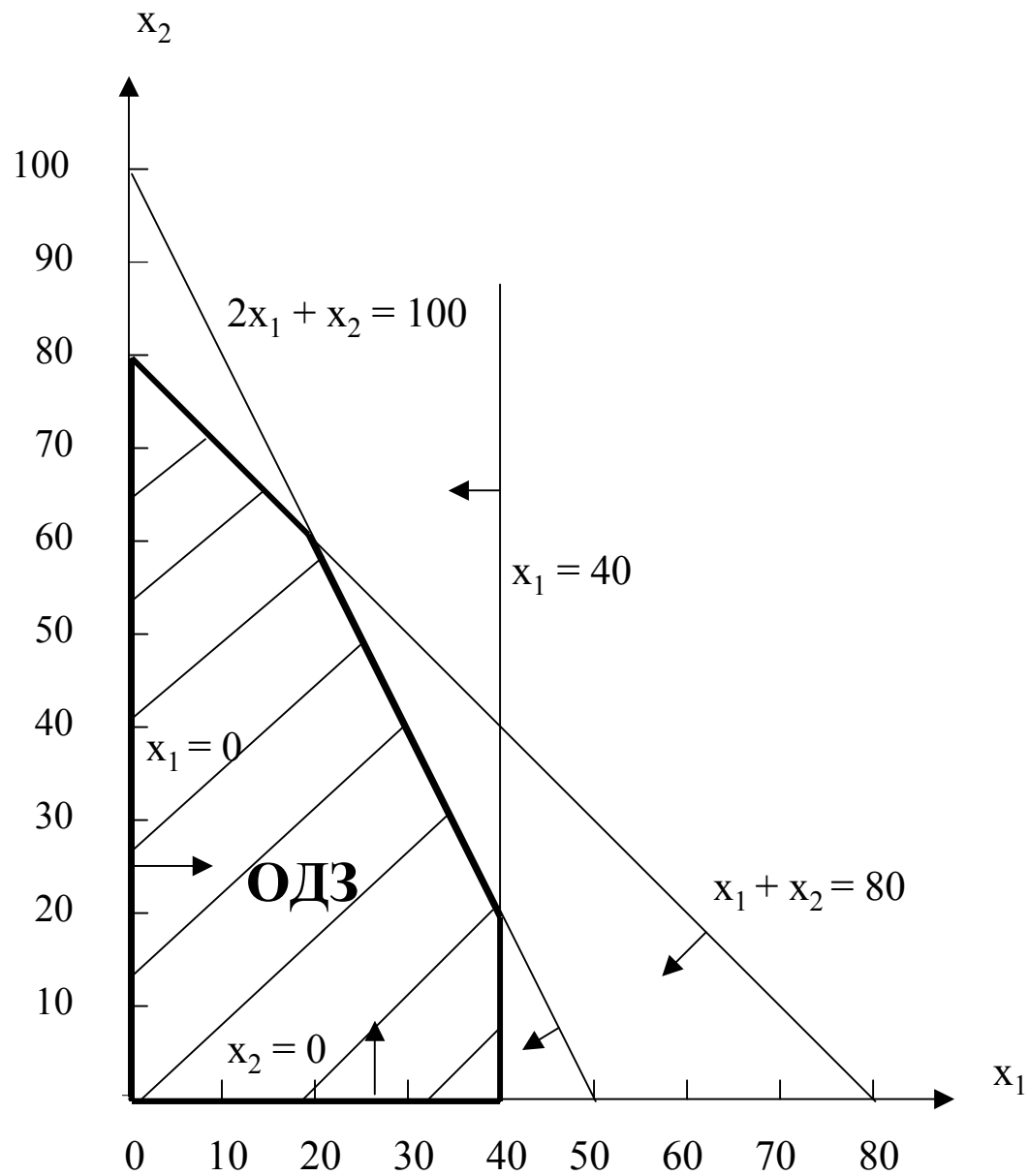
Построение ОДЗ











Определение

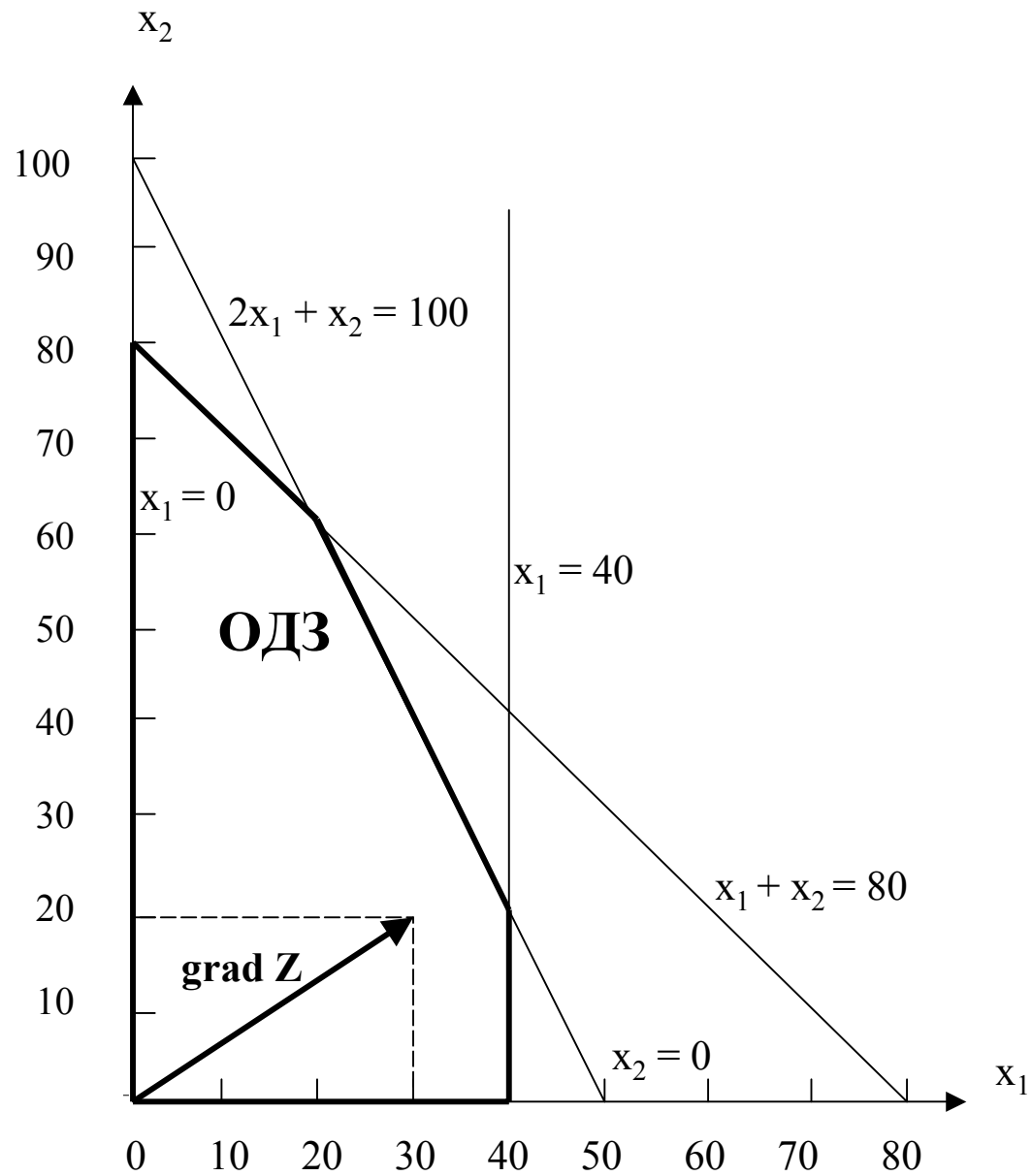
- **Градиент** – это вектор, который показывает направление возрастания целевой функции.

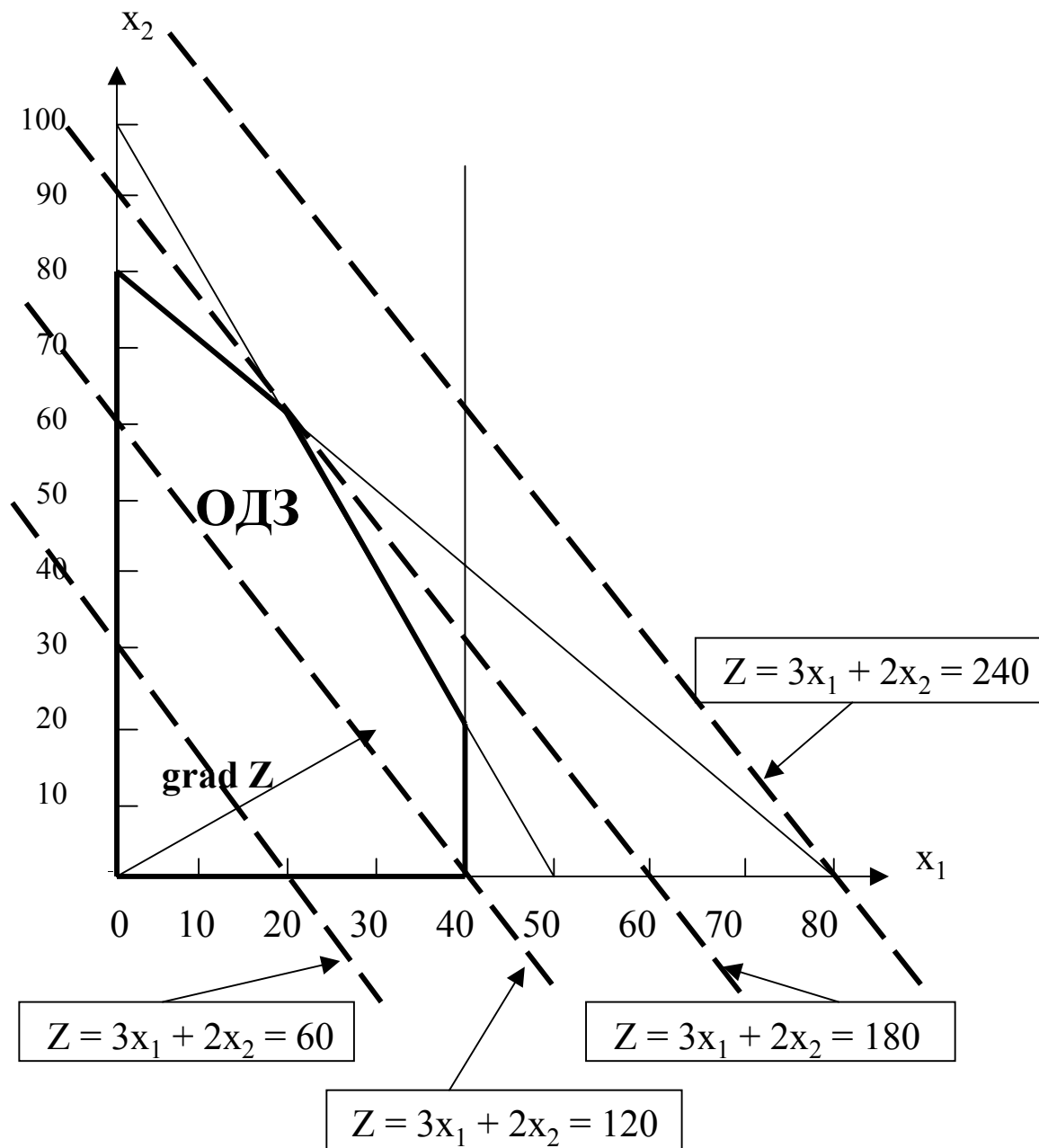
$$\text{grad } Z = \left(\frac{dZ}{dx_1}, \frac{dZ}{dx_2}, \dots, \frac{dZ}{dx_n} \right)$$

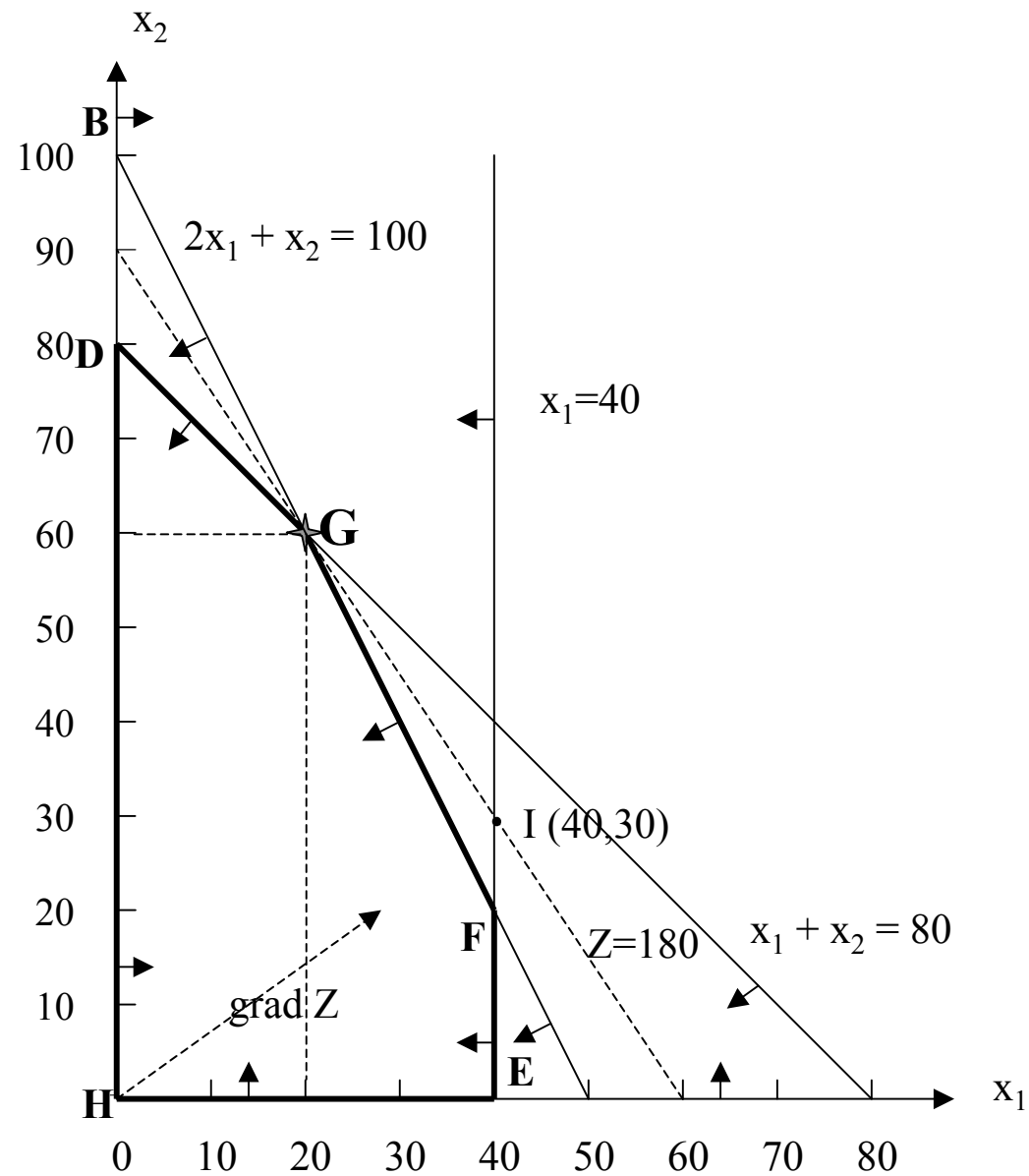
Определение

- **Изоцель** – линия на графике, описывающая поведение целевой функции.
- Все точки, принадлежащие изоцели, приносят одно и то же значение целевой функции.

$$3x_1 + 2x_2 = \textit{constant}$$







Оптимальное решение

$G(20, 60)$ – оптимальная точка

$$x_1 = 20, x_2 = 60,$$

$$Z_{\max} = 180$$

Определение

- *Ограничение называется **связующим**, если в результате подстановки в него значений оптимальной точки левая его часть равна правой части, т.е. Ограничение выполняется как строгое равенство.*
- Например:

$$2x_1 + x_2 \leq 100 \quad \Rightarrow \quad 2 \times 20 + 60 = 100$$

$$x_1 + x_2 \leq 80 \quad \Rightarrow \quad 20 + 60 = 80$$

Определение

- *Ограничение является несвязующим, если в результате подстановки в него значений оптимальной точки левая его часть не равна правой части, т.е. Ограничение выполняется как строгое неравенство.*

Например:

$$x_1 \leq 40 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 20 < 40$$

Исходы решения задачи ЛП

Единственное решение

Множество решений (альтернативный оптимум)

Неограниченное решение

Недопустимое решение

Альтернативный оптимум

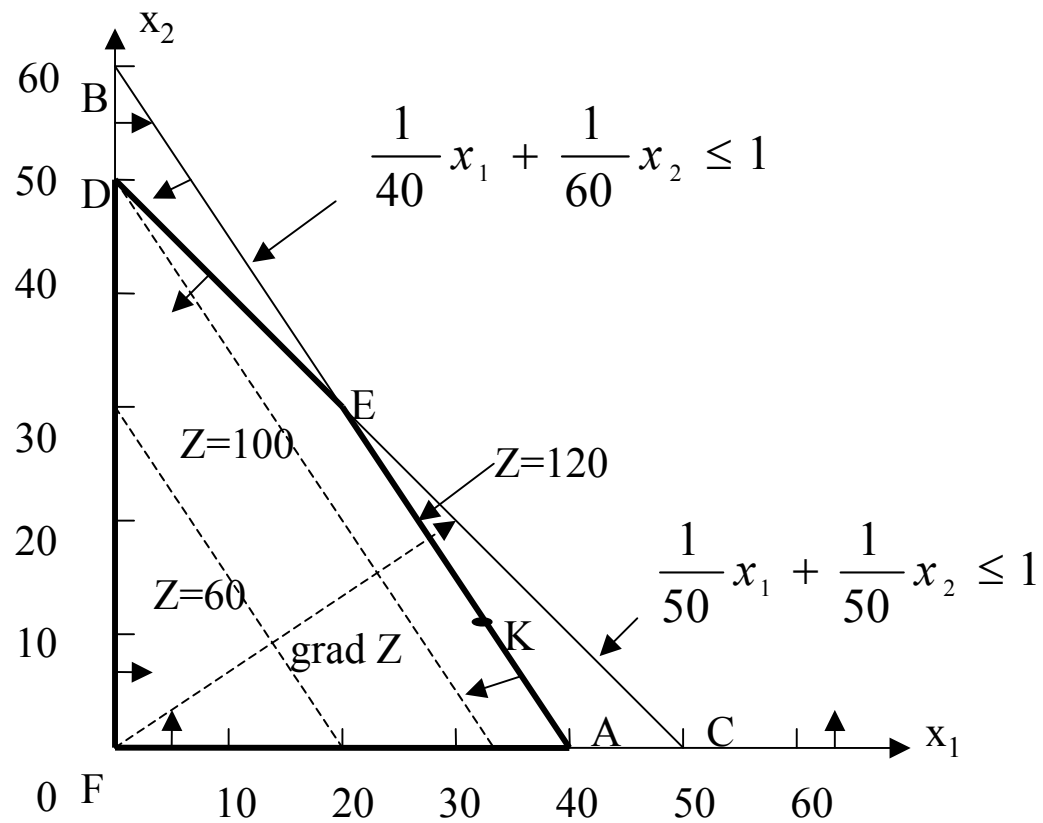
Имеется модель:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1$$

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Значения переменных в точке К

$$K(x_1^3, x_2^3) = \alpha \times A(x_1^1, x_2^1) + (1 - \alpha) \times E(x_1^2, x_2^2)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

Неограниченная задача ЛП

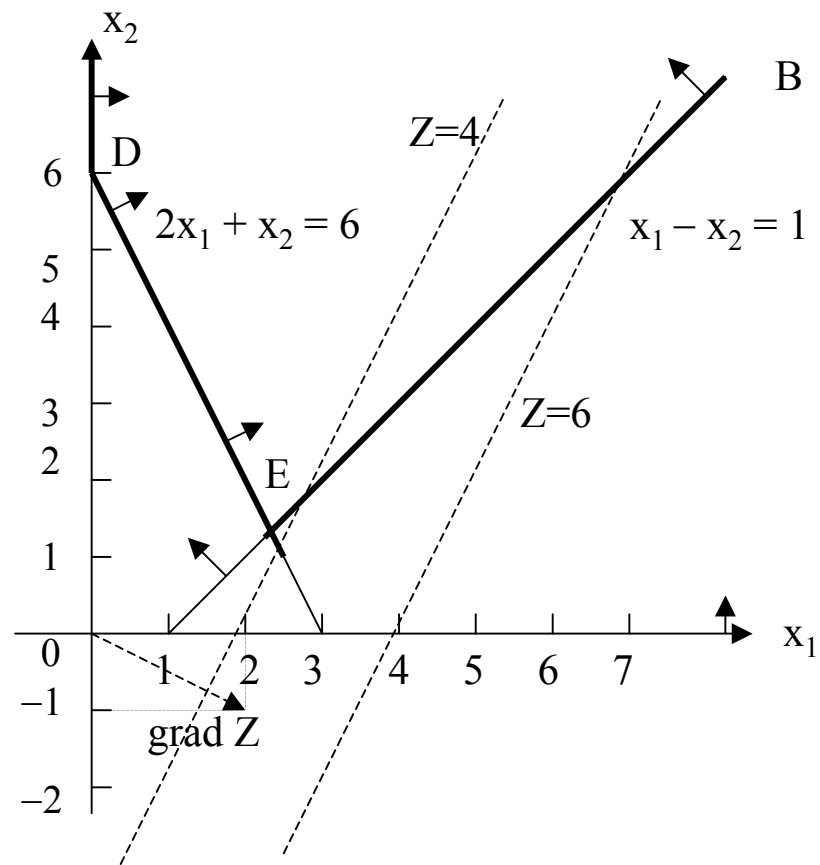
- Имеется модель

$$\max Z = 2x_1 - x_2$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Недопустимая задача ЛП

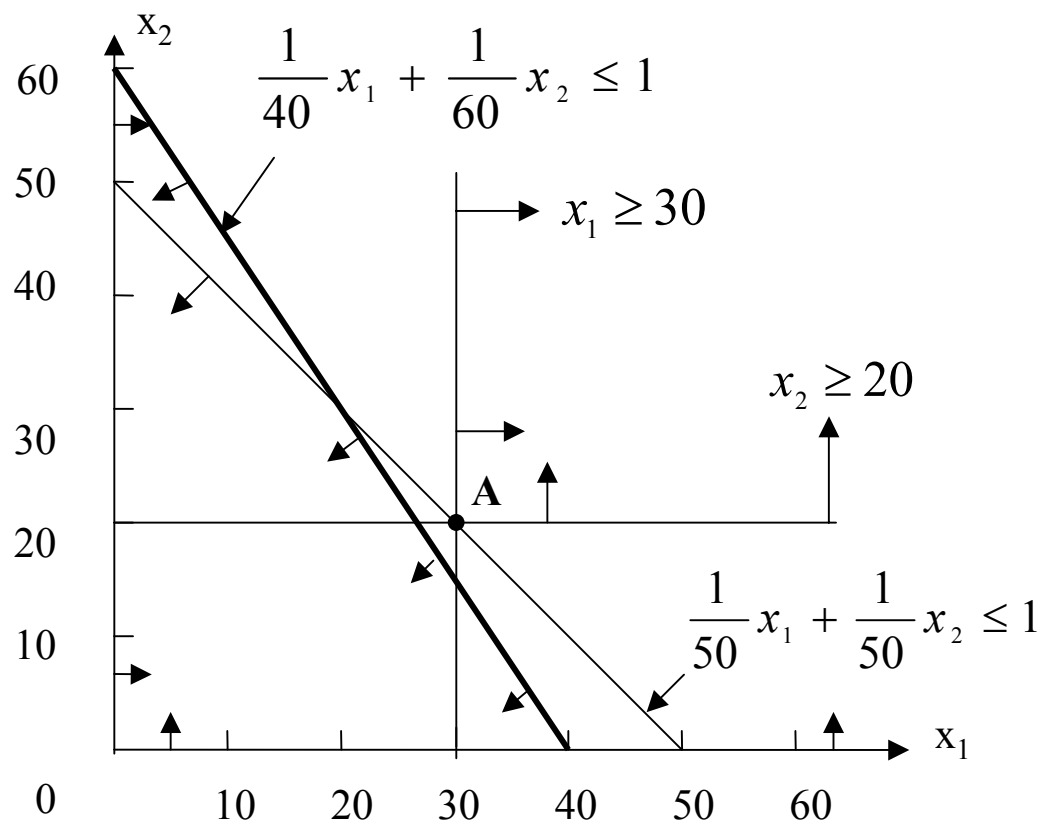
Имеется модель:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1$$

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 30 \quad x_2 \geq 20$$



Графическое решение задачи на минимум ЦФ

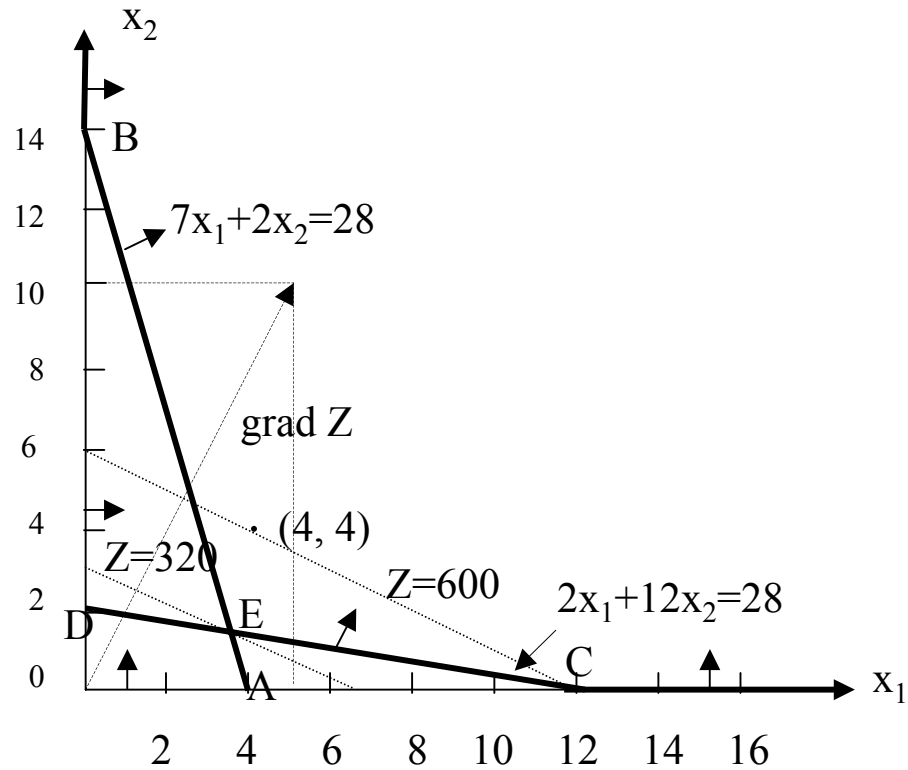
Имеется модель:

$$\min Z = 50x_1 + 100x_2$$

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28$$

$$2x_1 + 12x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$x_1=3.6, x_2=1.4$$

$$Z_{min}=50 \times 3.6 + 100 \times 1.4 = 320$$