

Метод искусственного базиса

Этапы алгоритма

1. Модифицируем ограничения так, чтобы правые части были неотрицательными.
2. Приводим модель к стандартной форме: добавляем дополняющие переменные S_i в ограничения типа « $\leq$ » и избыточные переменные e_i в ограничения типа « $\geq$ ».

3. Вводим искусственные переменные a_i в ограничения, где имелись знаки « $\geq$ » и « $=$ ».
4. Добавляем ограничения на знак на вновь введенные переменные.

5. Определяем M как большое число.

Добавляем $M(\sum a_i)$ в целевую функцию в случае задачи на минимум и вычитаем $M(\sum a_i)$ из целевой функции в случае задачи на максимум.

6. Выражаем a_i через свободные (небазисные) переменные и подставляем в целевую функцию.

7. Целевую функцию делим на две части и решаем задачу до получения решения во второй строке целевой функции.
8. В случае получения положительного результата на шаге 7 продолжаем решать основную задачу, если необходимо.

Теорема

- ★ Если в оптимальном плане М-задачи все искусственные переменные a_i равны 0, то исходная задача может иметь решение.
- ★ Если существует оптимальное решение М-задачи, в котором хотя бы одна из искусственных переменных a_i отлична от нуля, то система ограничений исходной задачи несовместна в области допустимых значений.
- ★ Если М-задача оказалась неразрешимой, то исходная задача также неразрешима.

Постановка задачи

Компания по производству прохладительных напитков выпускает напиток со вкусом апельсина. При этом она использует апельсиновый сок и содовую апельсиновую воду. Каждая унция апельсиновой содовой воды содержит 0.5 унции сахара и 1 мг витамина С. Каждая унция апельсинового сока содержит 0.25 унции сахара и 3 мг витамина С. Затраты компании на производство унции апельсиновой содовой воды составляют 2 цента, затраты на производство унции апельсинового сока – 3 цента. Отдел маркетинга считает, что каждая 10-унциевая бутылка напитка должна содержать, по меньшей мере, 20 мг витамина С и не более 4-х унций сахара.

Используйте линейное программирование для определения того, как компания сможет выполнить требования отдела маркетинга с минимальными затратами.

- Переменные принятия решений:

x_1 — количество унций апельсиновой содовой воды в бутылке;

x_2 — количество унций апельсинового сока в бутылке.

Математическая модель:

Целевая функция – минимизация затрат на
производство напитка:

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2$$

Ограничения:

$$0.5x_1 + 0.25x_2 \leq 4 \quad (\text{содержание сахара});$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 20 \quad (\text{содержание витамина C});$$

$$x_1 + x_2 = 10 \quad (\text{ограничение на объем бутылки});$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{ограничения на знак}).$$

Стандартная форма задачи:

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2;$$

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + S_1 = 4;$$

$$x_1 + 3x_2 - e_2 = 20;$$

$$x_1 + x_2 = 10;$$

$$x_1, x_2, S_1, e_2 \geq 0.$$

Модель с учетом искусственных переменных:

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0e_2 + M(a_2 + a_3);$$

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + S_1 = 4;$$

$$x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20;$$

$$x_1 + x_2 + a_3 = 10;$$

$$x_1, x_2, S_1, e_2, a_2, a_3 \geq 0.$$

Преобразование целевой функции

$$a_2 = 20 - x_1 - 3x_2 + e_2$$

$$a_3 = 10 - x_1 - x_2$$

$$M(a_2 + a_3) = M(30 - 2x_1 - 4x_2 + e_2)$$

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0e_2 + M(30 - 2x_1 - 4x_2 + e_2)$$

$$Z^I - 2x_1 - 3x_2 - 0S_1 - 0e_2 = 0$$

$$Z^{II} + M(2x_1 + 4x_2 - e_2) = 30M$$

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	S_1	e_2	a_2	a_3	C.o.
			2	3	0	0	M	M	
S_1	0	4	0.5	0.25	1	0	0	0	16
a_2	M	20	1	3	0	-1	1	0	6.66
a_3	M	10	1	1	0	0	0	1	10
$Z-c_j$	-	0	-2	-3	0	0	0	0	-
	M	30	2	4	0	-1	0	0	-

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	S_1	e_2	a_2	a_3	C.o .
			2	3	0	0	M	M	
S_1	0	7/3	5/12	0	1	1/12	-1/12	0	28/ 5
x_2	3	20/3	1/3	1	0	-1/3	1/3	0	20
a_3	M	10/3	2/3	0	0	1/3	-1/3	1	5
$Z-c_j$	-	20	-1	0	0	-1	1	0	-
	M	10/3	2/3	0	0	1/3	-4/3	0	-

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	S_1	e_2	a_2	a_3
			2	3	0	0	M	M
S_1	0	0.25	0	0	1	-0.125	0.125	-0.625
x_2	3	5	0	1	0	-0.5	0.5	-0.5
x_1	2	5	1	0	0	0.5	-0.5	1.5
$Z - c_j$	-	25	0	0	0	-0.5	0.5	1.5
	M	0	0	0	0	0	-1	-1

Оптимальное решение:

$$x_1=5, x_2=5,$$

$$Z=25.$$

Двустадийный метод

(рассмотреть самостоятельно)