

ТЕМА 3

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ (продолжение)

Матричная форма записи задачи ЛП

$$\begin{array}{cccccc}
\max Z & = & c_1 x_1 & + & c_2 x_2 & + \dots + & c_n x_n, \\
& & a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + \dots + & a_{1n} x_n & = b_1, \\
& & a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + \dots + & a_{2n} x_n & = b_2, \\
& & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
& & a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + \dots + & a_{mn} x_n & = b_m, \\
& & & & & & \overline{x_j \geq 0,} & j = \overline{1, n}.
\end{array}$$

$$BV = \{BV_1, BV_2, \dots, BV_m\}$$

$$X_{BV} = \begin{pmatrix} X_{BV_1} \\ X_{BV_2} \\ \vdots \\ X_{BV_m} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{– вектор базисных переменных} \\ \text{размерностью } m \times 1 \end{array}$$

$$NBV = \{NBV_1, NBV_2, \dots, NBV_{n-m}\}$$

$$X_{NBV} = \begin{pmatrix} X_{NBV_1} \\ X_{NBV_2} \\ \vdots \\ X_{NBV_{n-m}} \end{pmatrix} - \text{вектор свободных (небазисных)}$$

переменных размерностью

$(n-m) \times 1$

$$C_{BV} = (C_{BV_1}, C_{BV_2}, \dots, C_{BV_m})$$

вектор-строка размерностью $1 \times m$

коэффициентов целевой функции при базисных

переменных из таблицы с оптимальным

решением

$$C_{NBV} = (C_{NBV_1}, C_{NBV_2}, \dots, C_{NBV_{n-m}})$$

вектор-строка размерностью $1 \times (n - m)$

коэффициентов целевой функции при небазисных

переменных из таблицы с оптимальным решением

$$\max Z = 60 x_1 + 30 x_2 + 20 x_3 + 0 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 + S_1 = 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + S_2 = 20$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + S_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

$$Z \quad + \quad 5x_2 \quad \quad \quad + \quad 10S_2 + 10S_3 = 280,$$

$$\quad - \quad 2x_2 \quad \quad + S_1 + \quad 2S_2 - \quad 8S_3 = 24,$$

$$\quad - \quad 2x_2 + x_3 \quad \quad + \quad 2S_2 - \quad 4S_3 = 8,$$

$$x_1 + 1.25x_2 \quad \quad \quad - 0.5S_2 + 1.5S_3 = 2.$$

$$BV = \{S_1, x_3, x_1\}$$

$$X_{BV} = \begin{pmatrix} S_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$NBV = \{x_2, S_2, S_3\}$$

$$X_{NBV} = \begin{pmatrix} x_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$$

$$C_{BV} = (0, 20, 60)$$

$$C_{NBV} = (30, 0, 0)$$

B – матрица размерностью $m \times m$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N – матрица размерностью $m \times (n - m)$

b – вектор размерностью $m \times 1$

правых частей ограничений

$$b = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Исходная задача

$$Z = C_{BV} X_{BV} + C_{NBV} X_{NBV}$$

$$BX_{BV} + NX_{NBV} = b$$

$$X_{BV}, X_{NBV} \geq 0$$

$$\max Z = (0 \quad 20 \quad 60) \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + (30 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1}BX_{_{BV}} + B^{-1}NX_{_{NBV}} = B^{-1}b$$



$$X_{_{BV}} + B^{-1}NX_{_{NBV}} = B^{-1}b$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} S_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1.25 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C_{BV}B^{-1}BX_{BV} + C_{BV}B^{-1}NX_{NBV} = C_{BV}B^{-1}b$$



$$C_{BV}X_{BV} + C_{BV}B^{-1}NX_{NBV} = C_{BV}B^{-1}b$$

+

$$Z - C_{BV}X_{BV} - C_{NBV}X_{NBV} = 0$$

$$Z + (C_{BV}B^{-1}N - C_{NBV})X_{NBV} = C_{BV}B^{-1}b$$

$$\underline{\underline{\tilde{c}_j = C_{BV} B^{-1} a_j - c_j}}$$

$$\underline{\underline{Z = C_{BV} B^{-1} b}}$$

$$C_{BV} = (0 \quad 20 \quad 60)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

$$C_{BV} B^{-1} = (0 \quad 10 \quad 10)$$

$$\tilde{c}_{s_2} = C_{BV} B^{-1} a_{s_2} - c_{s_2} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 10$$

$$\tilde{c}_2 = C_{BV} B^{-1} a_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 30 = 5$$

$$\tilde{c}_{s_3} = C_{BV} B^{-1} a_{s_3} - c_{s_3} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 10$$

$$C_{BV}B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} = 280$$

$$Z + 5x_2 + 10S_2 + 10S_3 = 280$$

Упрощенные формулы для дополняющих, избыточных и искусственных переменных.

$\tilde{c}_{s_i}$ в оптимальном решении = i -му элементу из $C_{BV}B^{-1} - 0$
или i -му элементу из $C_{BV}B^{-1}$

$$C_{BV}B^{-1} = (0 \ 10 \ 10) \implies \tilde{c}_{s_2} = 10 - 0 = 10$$

$\tilde{c}_{e_i}$ в оптимальном решении = $-(i\text{-му элементу из } C_{BV}B^{-1}) - 0$

или $-(i\text{-му элементу из } C_{BV}B^{-1})$

$\tilde{c}_{a_i}$ в оптимальном решении = $i\text{-му элементу из } C_{BV}B^{-1} - (-M)$

или $i\text{-му элементу из } C_{BV}B^{-1} + M$

Анализ чувствительности

- **Направления анализа чувствительности**

Изменение 1. Изменение коэффициента целевой функции при небазисной переменной;

Изменение 2. Изменение коэффициента целевой функции при базисной переменной;

Анализ чувствительности

- Направления анализа чувствительности

Изменение 3. Изменение правой части ограничения;

Изменение 4. Изменение колонки коэффициентов при небазисной переменной;

Анализ чувствительности

- **Направления анализа чувствительности**

Изменение 5. Добавление новой переменной или нового вида деятельности;

Изменение 6. Добавление нового ограничения.

$$Z + 2x_2 + x_4 + x_6 = 6,$$

$$= 1,$$

$$= 2,$$

$$= 3.$$

$$\max Z = 60 x_1 + 30 x_2 + 20 x_3 + 0 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 + S_1 = 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + S_2 = 20$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + S_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
			60	30	20	0	0	0
S_1	0	48	8	6	1	1	0	0
S_2	0	20	4	2	1.5	0	1	0
S_3	0	8	2	1.5	0.5	0	0	1
$Z-c_j$	—	0	−60	−30	−20	0	0	0

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
			60	30	20	0	0	0
S_1	0	24	0	-2	0	1	2	-8
x_3	20	8	0	-2	1	0	2	-4
x_1	60	2	1	1.25	0	0	-0.5	1.5
$Z-c_j$	-	280	0	5	0	0	10	10

Изменение коэффициента целевой функции
при небазисной переменной

$$c_2 = 30$$

$$BV = \{S_1, x_3, x_1\}$$

$$30 + \Delta$$

$$\tilde{c}_j = C_{BV} B^{-1} a_j - c_j$$

$$\tilde{c}_2 \geq 0$$

$$\tilde{c}_2 < 0$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} \qquad c_2 = 30 + \Delta$$

$$C_{BV}B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - (30 + \Delta) = 35 - 30 - \Delta = 5 - \Delta$$

$$\tilde{c}_2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 5 - \Delta \geq 0$$

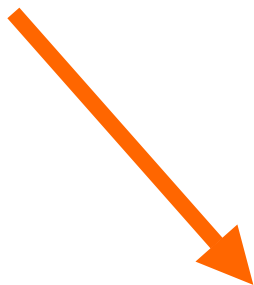


$$\Delta \leq 5$$

$$c_2 \leq 30 + 5 = 35$$

$$\tilde{c}_2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta > 5$$

Пусть $\tilde{c}_2 = 40$



$$\tilde{c}_2 = [0 \quad 10 \quad 10] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 40 = -5$$

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
			60	30	20	0	0	0
S_1	0	24	0	-2	0	1	2	-8
x_3	20	8	0	-2	1	0	2	-4
x_1	60	2	1	1.25	0	0	-0.5	1.5
$Z-c_j$	-	280	0	-5	0	0	10	10

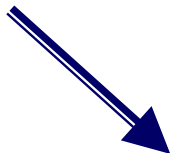
Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
			60	40	20	0	0	0
S_1	0	27.2	1.6	0	0	1	1.2	-5.6
x_3	20	11.2	1.6	0	1	0	1.2	-1.6
x_2	40	1.6	0.8	1	0	0	0.4	1.2
$Z-c_j$	-	288	4	0	0	0	8	16

Правило 1.

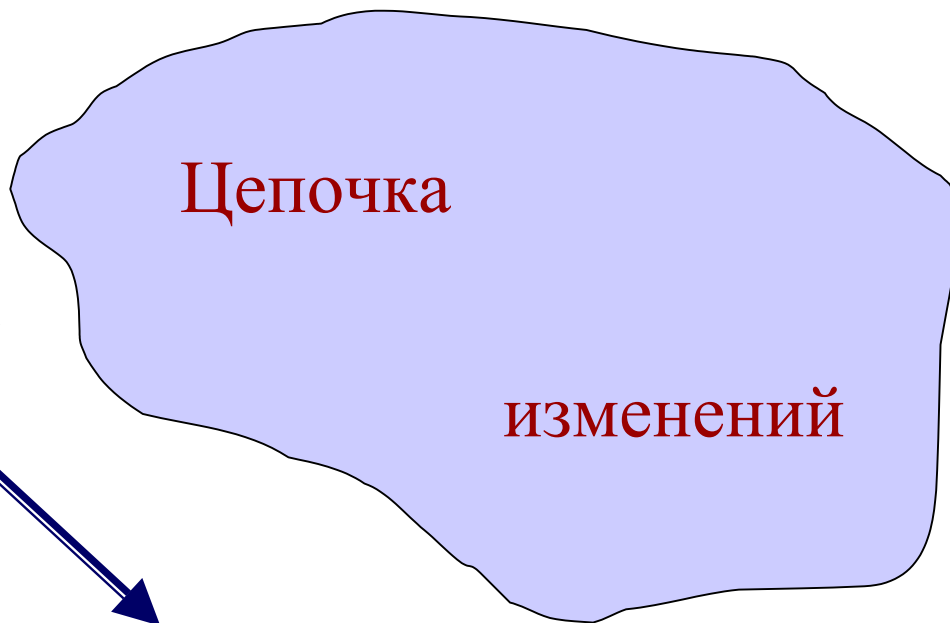
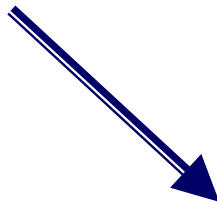
Если $\tilde{c}_j \geq 0$, то BV остается оптимальным. Если , $\tilde{c}_j < 0$ то BV перестает быть оптимальным и x_j входит в базис.

Изменение коэффициента целевой функции при базисной переменной

C_{BV}



$C_{BV}B^{-1}$



$$(\tilde{c}_j = C_{BV}B^{-1}a_j - c_j)$$

$$c_1 = 60 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 60 + \Delta$$



$$C_{BV} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60 + \Delta \end{bmatrix}$$



$$C_{BV} B^{-1}$$



$$C_{BV} B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60 + \Delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 - 0.5\Delta & 10 + 1.5\Delta \end{bmatrix} .$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

$$c_1 = 60 + \Delta$$

$$c_2 = 30$$

$$c_3 = 20$$

$$\tilde{c}_2 = C_{BV} B^{-1} a_2 - c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 - 0.5\Delta & 10 + 0.5\Delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = 5 + 1.25\Delta$$

$$\tilde{c}_{s_2} = 10 - 0.5\Delta$$

$$\tilde{c}_{s_3} = 10 + 1.5\Delta$$

$$5 + 1.25\Delta \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \geq -4$$

$$10 - 0.5\Delta \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \leq 20$$

$$10 + 1.5\Delta \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \geq -20/3$$

$$-4 \leq \Delta \leq 20$$

$$56 \leq c_1 \leq 80$$

$$c_1 = 100 \quad \longrightarrow \quad \Delta = 100 - 60 = 40$$

$$\tilde{c}_1 = 0,$$

$$\tilde{c}_2 = 5 + 1.25\Delta = 55,$$

$$\tilde{c}_3 = 0,$$

$$\tilde{c}_{s_1} = 0,$$

$$\tilde{c}_{s_2} = 10 - 0.5\Delta = -10,$$

$$\tilde{c}_{s_3} = 10 + 1.5\Delta = 70.$$

$$Z = C_{BV} B^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 70 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 360 \text{ .}$$

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
			100	30	20	0	0	0
S_1	0	24	0	-2	0	1	2	-8
x_3	20	8	0	-2	1	0	2	-4
x_1	60	2	1	1.25	0	0	-0.5	1.5
$Z-c_j$	-	360	0	55	0	0	-10	70

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
			100	30	20	0	0	0
s_1	0	16	0	0	1	1	0	-4
s_2	0	4	0	-1	0.5	0	1	-2
x_1	100	4	1	0.75	0.25	0	0	0.5
$Z-c_j$	-	400	0	45	5	0	0	50

Правило 2.

Если коэффициент при базисной переменной в целевой функции изменяется, то текущий базис остается оптимальным тогда, когда все коэффициенты в строке целевой функции остаются неотрицательными. Если хотя бы один коэффициент $\tilde{c}_j < 0$, то текущий базис перестает быть оптимальным.

Алгоритм нахождения пределов изменения коэффициентов целевой функции

- Выпишем строку коэффициентов целевой функции $Z - c_j$;
- Выпишем строку коэффициентов, соответствующую j -й базисной переменной. Запишем эти строки одна под одной;

- Разделим каждый элемент из строки $Z - c_j$, соответствующий только небазисным переменным, на соответствующий элемент a_{kj} из строки базисной переменной, выбранной на 2-м шаге;
- Определим предел увеличения коэффициента целевой функции. Если отрицательные числа отсутствуют, то для данного коэффициента верхнего предела не существует;

- Определим предел уменьшения коэффициента при базисной переменной. Если положительные числа отсутствуют, то для данного коэффициента нижнего предела не существует;
- Повторяем шаги 1–5 для всех базисных переменных.

Расчет пределов изменения коэффициентов при переменных в целевой функции

Верхний: $\bar{c}_j = c_j + \min_k \left\{ \left| \frac{\tilde{c}_k}{a_{kj}} \right| \right\}$ для всех $a_{kj} < 0$

для задачи на $\max Z$

и $a_{kj} > 0$

для задачи на $\min Z$

Нижний: $\underline{c}_j = c_j - \min_k \left\{ \frac{\tilde{c}_k}{a_{kj}} \right\}$ для всех $a_{kj} > 0$

для задачи на $\max Z$

и $a_{kj} < 0$

для задачи на $\min Z$

ИЗМЕНЕНИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ ОГРАНИЧЕНИЯ

$$b_2 = 20 + \Delta$$

$$B^{-1}b = B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 48 \\ 20 + \Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 48 \\ 20 + \Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 + 2\Delta \\ 8 + 2\Delta \\ 2 - 0.5\Delta \end{bmatrix}$$

$$b^* = \left(\begin{array}{l} \text{первоначальное значение правой части} \\ \text{в таблице с оптимальным решением} \end{array} \right) +$$

$$+ \Delta \times (\text{i - я колонка из } B^{-1})$$

$$24 + 2\Delta \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \geq -12$$

$$8 + 2\Delta \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \geq -4$$

$$2 - 0.5\Delta \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \leq 4$$

$$-4 \leq \Delta \leq 4$$

$$16 \leq b_2 \leq 24$$

$$b_2 = 22$$

$$(16 \leq 22 \leq 24)$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 48 \\ 22 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_{hov.} = C_{BV} B^{-1} b_{hov.} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 48 \\ 22 \\ 8 \end{bmatrix} = 300$$

$$b_2 = 30 > 24$$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 48 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 28 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$C_{BV} B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 48 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix} = 380$$

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
			60	30	20	0	0	0
S_1	0	44	0	-2	0	1	2	-8
x_3	20	28	0	-2	1	0	2	-4
x_1	60	-3	1	1.25	0	0	-0.5	1.5
$Z-c_j$	-	380	0	5	0	0	10	10

Правило 3.

Если правая часть ограничения изменяется, то текущий базис остается оптимальным в том случае, когда правые части всех ограничений остаются неотрицательными. Если хотя бы у одного из ограничений правая часть становится отрицательной, то текущий базис является недопустимым и должно быть найдено новое оптимальное решение.

Для определения пределов устойчивости
полученного решения необходимо
использовать обратную матрицу B^{-1}
и значения переменных в оптимальном
базисе X_{BV}^* .

Расчет пределов изменения правых частей ограничений

Пределы увеличения правых частей
ограничений:

По тем x_j^* , для которых $a_{ji} < 0$:

$$\Delta_i^+ = \min_j \left\{ \left| \frac{x_j}{a_{ji}} \right| \right\}$$

Пределы уменьшения правых частей ограничений:

По тем x_j^* , для которых $a_{ji} > 0$

$$\Delta_i^{(-)} = \min_j \left\{ \frac{x_j}{a_{ji}} \right\}$$

Исходная таблица

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
			60	30	20	0	0	0
S_1	0	48	8	6	1	1	0	0
S_2	0	20	4	2	1.5	0	1	0
S_3	0	8	2	1.5	0.5	0	0	1
$Z - c_j$	—	0	−60	−30	−20	0	0	0

Таблица с оптимальным решением

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
			60	30	20	0	0	0
S_1	0	24	0	-2	0	1	2	-8
x_3	20	8	0	-2	1	0	2	-4
x_1	60	2	1	1.25	0	0	-0.5	1.5
$Z-c_j$	-	280	0	5	0	0	10	10

Матрицы коэффициентов при базисных переменных, вошедших в оптимальное решение

Исходная:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

Обратная:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

1-е ограничение

предел уменьшения: $\Delta_1^{(-)} = \min_j \left\{ \frac{24}{1} \right\} = 24$

предел увеличения: $+\infty$

$$-24 \leq \Delta_1 \leq +\infty$$

$$24 \leq b_1 \leq +\infty$$

2-е ограничение

предел уменьшения: $\Delta_2^{(-)} = \min_j \left\{ \frac{24}{2}; \frac{8}{2} \right\} = 4$

предел увеличения: $\Delta_2^{(+)} = \min_j \left\{ \left| \frac{2}{-0.5} \right| \right\} = 4$

$$-4 \leq \Delta_2 \leq 4$$

$$16 \leq b_2 \leq 24$$

3-е ограничение

предел уменьшения: $\Delta_3^{(-)} = \min_j \left\{ \frac{2}{1.5} \right\} = 1\frac{1}{3}$

предел увеличения: $\Delta_3^{(+)} = \min_j \left\{ \left| \frac{24}{-8}; \frac{8}{-4} \right| \right\} = 2$

$$-1\frac{1}{3} \leq \Delta_3 \leq 2$$

$$6\frac{2}{3} \leq b_3 \leq 10$$

ИЗМЕНЕНИЕ КОЛОНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ НЕБАЗИСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

$$\tilde{c}_2 = C_{BV} B^{-1} a_2 - c_2 \quad C_{BV} B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = 43 \quad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 43 = 40 - 43 = -3 < 0$$

$$B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
			60	43	20	0	0	0
S_1	0	24	0	-7	0	1	2	-8
x_3	20	8	0	-4	1	0	2	-4
x_1	60	2	1	2	0	0	-0.5	1.5
$Z-c_j$	-	280	0	-3	0	0	10	10

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
			60	43	20	0	0	0
S_1	0	31	3.5	0	0	1	0.25	-2.75
x_3	20	12	2	0	1	0	1	-1
x_2	43	1	0.5	1	0	0	-0.25	0.75
$Z-c_j$	—	283	1.5	0	0	0	9.25	12.3

Правило 4.

При изменении колонки коэффициентов при свободной переменной x_j текущий базис остается неизменным, если $\tilde{c}_j \geq 0$. Если $\tilde{c}_j < 0$, то текущий базис перестает быть оптимальным и x_j должен стать базисной переменной в новом оптимальном решении.

**ДОБАВЛЕНИЕ НОВОЙ
ПЕРЕМЕННОЙ ИЛИ
НОВОГО РОДА
ДЕЯТЕЛЬНОСТИ**

x_4 – количество производимых скамеечек

$$(x_4 \geq 0)$$

$$Z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 - 15x_4 = 0$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 + S_1 = 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 + S_2 = 20$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + x_4 + S_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

$$c_4 = 15 \qquad a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_4 = [0 \quad 10 \quad 10] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 = 20 - 15 = 5$$

Правило 5.

Если новая колонка (соответствующая переменной x_j) добавлена в модель ЛП, то текущий базис будет оставаться оптимальным, когда $\tilde{c}_j \geq 0$.

Если $\tilde{c}_j < 0$, то текущий базис перестает быть оптимальным и переменная x_j должна стать базисной переменной в новом оптимальном решении.

Обобщение анализа чувствительности

Изменения в основной проблеме	Влияние на таблицу с оптимальным решением	Текущий базис все еще оптимален, если
Изменение коэффициента целевой функции при небазисной переменной	Изменяется коэффициент при соответствующей переменной x_j в целевой функции окончательной таблицы	Коэффициент при x_j в строке целевой функции неотрицателен
Изменение коэффициента целевой функции при базисной переменной	Может измениться вся строка целевой функции	Все переменные имеют неотрицательные коэффициенты в строке целевой функции

Изменение правой части ограничения	Изменяются правые части ограничений и строка целевой функции	Правые части ограничений неотрицательны
Изменение колонки коэффициентов при небазисной переменной	Изменение коэффициентов при переменной x_j в строке целевой функции и в ограничениях итоговой таблицы	Коэффициент при x_j в строке целевой функции неотрицателен
Добавление нового вида деятельности	Изменение коэффициентов при переменной x_j в строке целевой функции и в ограничениях итоговой таблицы	Коэффициент при x_j в строке целевой функции неотрицателен