Построение двойственной задачи линейного программирования

Соотношения между парой двойственных задач

	Исходная (прямая) задача	Двойственная задача
Критерий	**max Z**	**min W**

число переменных двойственной задачи	**=**	**числу ограничений исходной задачи**

число ограничений двойственной задачи	=	числу переменных исходной задачи

Симметричная пара двойственных задач

Прямая

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m
\end{aligned}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}$$

Двойственная

$$\min W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\
&a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
&a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m \ge c_j \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
&a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n
\end{aligned}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}$$

Соотношение между парой двойственных задач

Исходная (прямая) задача	Двойственная задача
$\max Z = CX$	$\min W = B^T Y$
$AX \le B$	$A^T Y \ge C^T$
$X \ge 0$	$Y \ge 0$

Соотношения между парой двойственных задач

max Z	min W
i-е ограничение имеет знак «≤»	*i-я переменная удовлетворяет условию:* $y_i \geq 0$
i-е ограничение имеет знак «≥»	*i-я переменная удовлетворяет условию:* $y_i \leq 0$
i-е ограничение имеет знак «=»	*i-я переменная не ограничена на знак*

Соотношения между парой двойственных задач

max Z	min W
j-я переменная удовлетворяет условию: $x_j \geq 0$	*j-е ограничение имеет знак «≥»*
j-я переменная удовлетворяет условию: $x_j \leq 0$	*j-е ограничение имеет знак «≤»*
j-я переменная не ограничена на знак	*j-е ограничение имеет знак «=»*

Пример 1.

Исходная задача

$$\max Z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$\begin{array}{rcl|l}
8x_1 + 6x_2 + x_3 & \leq & 48 & \Rightarrow y_1 \\
4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 & \leq & 20 & \Rightarrow y_2 \\
2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 & \leq & 8 & \Rightarrow y_3 \\
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Двойственная задача

$$\min W = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

$$\begin{aligned}
8y_1 + 4y_2 + 2y_3 &\geq 60 \\
6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 &\geq 30 \\
y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 &\geq 20 \\
y_1, y_2, y_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Преобразования в матричной форме

$$C = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 48 & 20 & 8 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1.5 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\max Z = CX \Rightarrow \max Z = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$AX \leq B \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$X \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\min W = B^T Y \Rightarrow \min W = \begin{pmatrix} 48 & 20 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$A^T Y \geq C^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1.5 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$Y \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пример 2.

Исходная (прямая) задача

$$\max Z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{rcl|cc}
x_1 + x_2 & = & 2 & \Rightarrow & y_1 \\
2x_1 - x_2 & \geq & 3 & \Rightarrow & y_2 \\
x_1 - x_2 & \leq & 1 & \Rightarrow & y_3 \\
x_1 & \geq & 0 & &
\end{array}$$

x_2 – неограниченная на знак переменная

Двойственная задача

$$\min W = 2y_1 + 3y_2 + y_3$$

$$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2$$

$$y_1 - y_2 - y_3 = 1$$

y_1 – неограниченная на знак переменная

$$y_2 \leq 0$$

$$y_3 \geq 0$$

Пример 3.

Исходная (прямая) задача

$$\min W = 2y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\left.\begin{array}{lr} y_1 + 2y_2 + y_3 & \geq 2 \\ y_1 - y_3 & \geq 1 \\ y_2 + y_3 & = 1 \\ 2y_1 + y_2 & \leq 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 \\ \Rightarrow x_2 \\ \Rightarrow x_3 \\ \Rightarrow x_4 \end{array}$$

y_1 – неограниченная на знак переменная

$y_2, y_3 \geq 0$

Двойственная задача

$$\max Z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4$$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_4 &= 2 \\
2x_1 + x_3 + x_4 &\le 4 \\
x_1 - x_2 + x_3 &\le 6
\end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

x_3 – неограниченная на знак переменная

$x_4 \le 0$

Экономическая интерпретация двойственной задачи линейного программирования

Интерпретация задачи, двойственной по отношению к задаче на максимум

Таблица взаимосвязей «ресурс – продукт»

Ресурс	Ресурс – продукт			Количество имеющихся ресурсов
	Письмен-ные столы	Кухонные столы	Стулья	
Древесина, $м^2$	8	6	1	48
Участок отделки, час.	4	2	1.5	20
Столярный участок, час.	2	1.5	0.5	8
Цена продажи, грн.	60	30	20	

y_1 – цена одного м^2 древесины;

y_2 – цена одного часа времени участка отделки;

y_3 – цена одного часа времени столярного участка.

$$y_1 = ? \qquad y_2 = ? \qquad y_3 = ?$$

Общая цена ресурсов

$$W = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

$$\Downarrow$$

$$\min W = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60$$

$$6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30$$

$$y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

$$\min W = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60$$ ограничение по письменным столам

$$6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30$$ ограничение по кухонным столам

$$y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20$$ ограничение по стульям

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Первая теорема двойственности и ее следствия

Прямая задача

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n,$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2,$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i,$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Двойственная задача

$$\min W = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m,$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1,$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2,$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m \ge c_j,$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n,$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Лемма 1.

Пусть $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ***– любое допустимое решение основной задачи, а*** $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{bmatrix}$ ***– любое допустимое решение двойственной задачи, тогда*** $Z(x) \le W(y)$

Доказательство.

1) $y_i \geq 0$

$$y_i a_{i1} x_1 + y_i a_{i2} x_2 + \ldots + y_i a_{in} x_n \leq b_i y_i \qquad i = \overline{1,m}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

2) $x_j \geq 0$

$$x_j a_{1j} y_1 + x_j a_{2j} y_2 + \ldots + x_j a_{mj} y_m \geq c_j x_j, \quad j = \overline{1,n}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

3)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\Downarrow$$

$$Z(x) \leq W(y)$$

Лемма 2.

Пусть $\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{bmatrix}$ *– допустимое решение прямой*

задачи и $\overline{y} = [\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m]$ *– допустимое решение*

двойственной. Если при этом $c\overline{x} = \overline{y}b$ *, то*

$\overline{x}$ *– оптимальное решение основной задачи,*

а $\overline{y}$ *– двойственной.*

Доказательство.

Из леммы 1

$$c x \le \bar{y} b$$

$Z(x)$ $\qquad$ $c\bar{x} = \bar{y} b$ $\qquad$ $x = \bar{x}$

$$c\bar{x} \le y b$$

$\bar{y} b = c\bar{x}$ $\qquad$ $W(y)$ $\qquad$ $y = \bar{y}$

Лемма 3.

Если прямая задача неограниченна, то двойственная задача имеет недопустимое решение.

Лемма 4.

Если двойственная задача неограниченна, то прямая задача имеет недопустимое решение.