

Первая теорема двойственности

- Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то другая также имеет оптимальное решение, причем для любых оптимальных решений выполняется равенство

$$Z_{\max}(x) = W_{\min}(y)$$

Доказательство

Рассмотрим симметричную пару двойственных задач

Прямая

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Двойственная

$$\min W = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \geq c_j$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$$

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n ,$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + S_1 = b_1 ,$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + S_2 = b_2 ,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n + S_i = b_i ,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n + S_m = b_m ,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad S_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} .$$

Пусть BV – оптимальный базис
прямой задачи

Определим $C_{BV}B^{-1} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m]$

Для оптимального базиса BV , y_i –

это i -й элемент из $C_{BV}B^{-1}$

Покажем, что $C_{BV}B^{-1}$ – допустимый базис
двойственной задачи

Для базиса BV все $\tilde{c}_j \geq 0$

$$\tilde{c}_j = C_{BV}B^{-1}a_j - c_j$$

Подставим $C_{BV}B^{-1} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m]$

$$[y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m] \cdot \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} - c_j =$$

$$= a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m - c_j$$

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m - c_j \geq 0$$

ИЛИ

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \geq c_j$$

Таким образом, $C_{BV}B^{-1}$
удовлетворяет каждому из n двойственных
ограничений

Кроме того, $y_i \geq 0$ для всех $i = \overline{1, m}$

Следовательно, $C_{BV}B^{-1}$ – двойственное
допустимое решение

Оптимальное значение целевой функции

прямой задачи для базиса BV равно

$$Z_{opt.} = C_{BV} B^{-1} b$$

Для двойственного допустимого решения

$$C_{BV} B^{-1}$$

значение целевой функции равно

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = C_{BV} B^{-1} b$$

На основании леммы 2

$$Z_{\max}(x) = W_{\min}(y)$$

**Как прочесть оптимальное
решение двойственной задачи
из строки целевой функции
окончательной таблицы
основной задачи с критерием на
максимум?**

Оптимальное
значение
двойственной
переменной y_i ,
если i -е
ограничение типа
« $\leq$ »

=

Коэффициенту при
 S_i в окончательной
таблице в строке
целевой функции

Оптимальное
значение
двойственной
переменной y_i ,
если i -е
ограничение типа
« $\geq$ »

Коэффициенту при
 e_i в окончательной
= таблице в строке
целевой функции,
умноженному на -1

Оптимальное
значение
двойственной
переменной y_i ,
если i -е
ограничение типа
«=»

Коэффициенту при
 $= a_i$ в окончательной
таблице в строке
целевой функции
— M

Пример

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15$$

$$2x_2 - x_3 \geq 5$$

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	e_2	a_2	a_3
			3	2	5	0	0	-M	-M
x_3	5	15/ 23	0	0	1	4/23	5/23	-5/23	-2/23
x_2	2	65/ 23	0	1	0	2/23	-9/23	9/23	-1/23
x_1	3	120 /23	1	0	0	9/23	17/23	-17/23	7/23
$Z-c_j$	-	565 /23	0	0	0	51/23	58/23	-58/23	9/23

Двойственная задача

$$\min W = 15y_1 + 5y_2 + 10y_3$$

$$y_1 + 2y_3 \geq 3$$

$$3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2$$

$$2y_1 - y_2 - 5y_3 \geq 5$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \leq 0$$

y_3 — неограниченная на знак
переменная

$$W = \frac{565}{23}$$

$$y_3 = \frac{9}{23}$$

$$y_2 = -\frac{58}{23}$$

$$y_1 = \frac{51}{23}$$

Теневые цены и их свойства

Определение

- **Теневая цена (двойственная оценка) i -го ограничения** – это величина, на которую улучшится оптимальное значение целевой функции (увеличится при решении задачи на максимум и уменьшится при решении задачи на минимум), если мы увеличим значение b_i на единицу (с b_i до $b_i + 1$), при условии, что текущий базис останется оптимальным.

СВОЙСТВО 1

- *Мера дефицитности продукции и ресурсов*

Следствие

- Теневая цена – мера взаимозаменяемости ресурсов и продукции

СВОЙСТВО 2

- *Мера влияния ограничений на целевую функцию*

$$Z_{opt}^{нов} = Z_{opt} + \Delta b_i \times$$

× (двойственная оценка i - го ограничения)

$$Z_{opt}^{нов} = Z_{opt} - \Delta b_i \times$$

× (двойственная оценка i - го ограничения)

$$\Delta Z = Z_{opt}^{HOB} - Z_{opt} = Z_{opt} + \Delta b_i \times y_i - Z_{opt} = \Delta b_i \times y_i$$



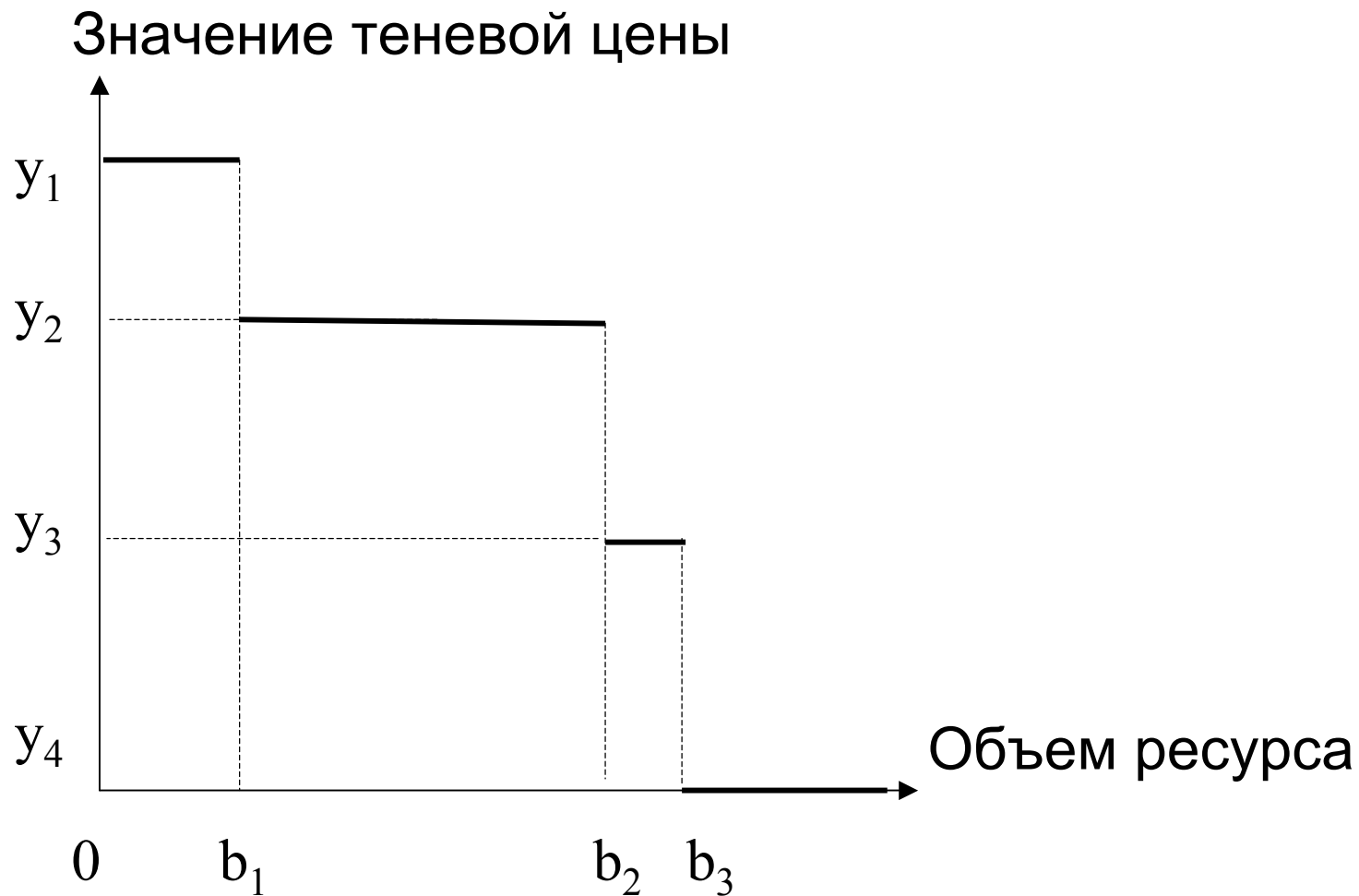
$$y_i = \frac{\Delta Z}{\Delta b_i}$$



$$y_i = \frac{dZ}{db_i}$$

Теневые цены равны значениям частных производных линейной функции $Z(b_1, b_2, \dots, b_m)$ по соответствующим аргументам $(b_i, i = \overline{1, m})$

Ступенчатость изменения теневой цены



СВОЙСТВО 3

- *Мера эффективности новых способов производства, новых видов продукции и т.д.*

СВОЙСТВО 4

- *Мера балансирования затрат и результатов*

- ***Единицы измерения теневых цен***
определяются с учетом единиц
измерения целевой функции и
соответствующего ограничения

Пример

Для задачи по мебельной фабрике:

- 1. Определите и дайте интерпретацию теневых цен.*
- 2. Каким будет доход мебельной фабрики, если на участке отделки будет 18 часов рабочего времени?*

3. Каким будет доход фабрики, если в ее распоряжении будет 9 часов рабочего времени на столярном участке?

4. Каким будет доход фабрики, если в ее распоряжении имеется 30 м² древесины?

5. Если на столярном участке будут доступны 30 часов времени, то почему нельзя использовать двойственные оценки для расчета нового значения целевой функции?

Огра- ни- чение	Теку- щее значе- ние	Тене- вая цена	Недо- выполнение /пере- выполнение	Мин. значе- ние ПЧО	Макс. значение ПЧО
1)	≤ 48	0	24	24	∞
2)	≤ 20	10	0	16	24
3)	≤ 8	10	0	6.67	10

ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС МЕТОД

Шаг 1. *Проверяем, все ли правые части ограничений неотрицательны?*

Если да, то оптимальное решение найдено. Если нет, то, по крайней мере, одно ограничение имеет отрицательную правую часть. В этом случае переходим к шагу 2.

Шаг 2.

В качестве переменной, покидающей базис, выбираем ту, у которой наибольший (по модулю) отрицательный коэффициент.

Строка, в которой эта базисная переменная находится, называется разрешающей. Для каждой переменной, имеющей отрицательный коэффициент в разрешающей строке, рассчитывается отношение

Коэффициент при x_j в строке целевой функции

Отрицательный коэффициент при x_j в разрешающей строке

Выбирается переменная с наименьшим (по абсолютной величине) отношением, как переменная, входящая в базис.

Выполняются эквивалентные преобразования Жордана-Гаусса для того чтобы входящую переменную сделать базисной.

Шаг 3.

Если найдется хотя бы одно ограничение, в котором правая часть отрицательная, а все переменные имеют неотрицательные коэффициенты, то задача линейного программирования не имеет допустимого решения. Если ни в одном ограничении нет недопустимости, то переходим к шагу 1.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = -5$$

Пример

$$\min W = 100y_1 + 80y_2 + 40y_3$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 3$$

$$y_1 + y_2 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Стандартная форма задачи

$$\min W = 100y_1 + 80y_2 + 40y_3,$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 - e_1 = 3,$$

$$y_1 + y_2 - e_2 = 2,$$

$$y_1, y_2, y_3, e_1, e_2 \geq 0.$$

$$\max W^1 = -100y_1 - 80y_2 - 40y_3$$

$$-2y_1 - y_2 - y_3 + e_1 = -3$$

$$-y_1 - y_2 + e_2 = -2$$

$$y_1, y_2, y_3, e_1, e_2 \geq 0$$

Базис	c_j	b_i	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2
			-100	-80	-40	0	0
e_1	0	-3	-2	-1	-1	1	0
e_2	0	-2	-1	-1	0	0	1
	-	0	100	80	40	0	0
ОТН	-	-	-50	-80	-40	-	-

Базис	c_j	b_i	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2
			-100	-80	-40	0	0
y_3	-40	3	2	1	1	-1	0
e_2	0	-2	-1	-1	0	0	1
$W^1 - c_j$	-	-120	20	40	0	40	0
ОТН	-	-	-20	-40	-	-	-

Базис	c_j	b_i	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2
			-100	-80	-40	0	0
y_3	-40	-1	0	-1	1	-1	2
y_1	-100	2	1	1	0	0	-1
$W^1 - c_j$	-	-160	0	20	0	40	20
ОТН	-	-	-	-20	-	-40	-

Базис	c_j	b_i	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2
			-100	-80	-40	0	0
y_2	-80	1	0	1	-1	1	-2
y_1	-100	1	1	0	1	-1	1
$W^1 - c_j$	-	-180	0	0	20	20	60

Оптимальное решение

$$W^1 = -180, \quad W = 180, \quad y_1 = y_2 = 1, \quad y_3 = 0$$

НАХОЖДЕНИЕ НОВОГО ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПОСЛЕ ДОБАВЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕНИЯ В МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

- Возможны случаи

Текущее оптимальное решение удовлетворяет новому ограничению.

Текущее оптимальное решение не удовлетворяет новому ограничению, но задача линейного программирования все еще имеет допустимое решение.

Дополнительное ограничение приводит к тому, что задача линейного программирования не будет иметь допустимого решения.

1 случай

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$$

2 случай

$$x_2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 - e_4 = 1$$


$$-x_2 + e_4 = -1$$

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	e_4
			60	30	20	0	0	0	0
S_1	0	24	0	-2	0	1	2	-8	0
x_3	20	8	0	-2	1	0	2	-4	0
x_1	60	2	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0
e_4	0	-1	0	-1	0	0	0	0	1
$Z-c_j$	-	280	0	5	0	0	10	10	0

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	e_4
			60	30	20	0	0	0	0
S_1	0	26	0	0	0	1	2	-8	-2
x_3	20	10	0	0	1	0	2	-4	-2
x_1	60	0.75	1	0	0	0	-0.5	1.5	1.25
x_2	30	1	0	1	0	0	0	0	-1
$Z-c_j$	—	275	0	0	0	0	10	10	5

3 случай

$$x_1 + x_2 \geq 12$$



$$x_1 + x_2 - e_4 = 12$$



$$-x_1 - x_2 + e_4 = -12$$

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_4
			60	30	20	0	0	0	0
s_1	0	24	0	-2	0	1	2	-8	0
x_3	20	8	0	-2	1	0	2	-4	0
x_1	60	2	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0
e_4	0	-12	-1	-1	0	0	0	0	1
$Z-c_j$	-	280	0	5	0	0	10	10	0

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_4
			60	30	20	0	0	0	0
s_1	0	24	0	-2	0	1	2	-8	0
x_3	20	8	0	-2	1	0	2	-4	0
x_1	60	2	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0
e_4	0	-10	0	0.25	0	0	-0.5	1.5	1
$Z-c_j$	-	280	0	5	0	0	10	10	0

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_4
			60	30	20	0	0	0	0
s_1	0	-16	0	-1	0	1	0	-2	4
x_3	20	-32	0	-1	1	0	0	2	4
x_1	60	12	1	1	0	0	0	0	-1
s_2	0	20	0	-0.5	0	0	1	-3	-2
$Z-c_j$	-	80	0	10	0	0	0	40	20

Ба- зис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_4
			60	30	20	0	0	0	0
s_1	0	16	0	0	-1	1	0	-4	0
x_2	30	32	0	1	-1	0	0	-2	-4
x_1	60	-20	1	0	1	0	0	2	3
s_2	0	36	0	0	-0.5	0	1	-4	-4
$Z-c_j$	-	-240	0	0	10	0	0	60	60

Дополняющая нежесткость (вторая теорема двойственности)

Пусть $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ — допустимое решение

основной задачи, а $Y = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]$ —
допустимое решение двойственной
задачи.

Тогда X – оптимальное решение основной задачи, а Y – оптимальное решение двойственной задачи тогда и только тогда, когда

$$S_i y_i = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

$$e_j x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

1. Умножим i -е ограничение основной задачи на y_i

$$y_i \cdot a_{i1} \cdot x_1 + y_i \cdot a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + y_i \cdot a_{in} \cdot x_n + y_i \cdot S_i = y_i \cdot b_i$$



$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_i a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^m y_i S_i = \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

2. Умножим j -е ограничение двойственной задачи на x_j

$$x_j \cdot a_{1j} \cdot y_1 + x_j \cdot a_{2j} \cdot y_2 + \dots + x_j \cdot a_{mj} \cdot y_m - x_j \cdot e_j = x_j \cdot c_j$$



$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_i a_{ij} x_j - \sum_{j=1}^n x_j e_j = \sum_{j=1}^n x_j c_j$$

3. Вычтем из результата первого пункта результат второго пункта.

$$\sum_{i=1}^m y_i S_i + \sum_{j=1}^n x_j e_j = \sum_{i=1}^m y_i b_i - \sum_{j=1}^n x_j c_j$$

На основании 1-й теоремы двойственности:
если X – оптимальное решение основной
задачи и Y – оптимальное решение
двойственной задачи, то

$$\sum_{i=1}^m y_i S_i + \sum_{j=1}^n x_j e_j = 0$$



$$\sum_{i=1}^m y_i S_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n x_j e_j = 0$$

Следовательно,

$$y_i S_i = 0$$

и

$$x_j e_j = 0.$$

Если условия $y_i S_i = 0$ и $x_j e_j = 0$
выполняются для $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$, то X
и Y – оптимальные решения основной и
двойственной задач, соответственно.

Таким образом,

$$0 = \sum_{i=1}^m y_i b_i - \sum_{j=1}^n x_j c_j$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^m y_i b_i = \sum_{j=1}^n x_j c_j$$

*Если значение какой-либо переменной
допустимого решения одной задачи
отлично от нуля, то допустимое
решение двойственной задачи
обращает в строгое равенство,
соответствующее этой переменной,
ограничение*

Если допустимое решение одной задачи обращает в строгое неравенство некоторое ограничение этой задачи, то в допустимом решении двойственной задачи равна нулю переменная, соответствующая этому ограничению

Из $y_i \cdot S_i = 0 \quad (i = \overline{1, m})$ следует

- * i -я дополняющая переменная основной задачи > 0 предполагает, что i -я двойственная переменная $= 0$
- ** i -я двойственная переменная > 0 предполагает, что i -я дополняющая переменная $= 0$

Из $e_j \cdot x_j = 0 \quad (j = \overline{1, n})$ следует

*** j -я избыточная
переменная
двойственной задачи > 0

предполагает, что j -я
основная переменная $= 0$

*** j -я переменная основной
задачи > 0

j -я избыточная
переменная двойственной
задачи $= 0$

Если в любой из задач (основной или двойственной) ограничение является несвязующим (т.е. $S_i > 0$ или $e_j > 0$), то соответствующая переменная в дополняющей ее проблеме должна быть равной нулю.

Пример

$$\max Z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min W = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60$$

$$6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30$$

$$y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Оптимальные решения

основная задача

$$Z = 280, x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 8$$

$$S_1 = 48 - (8 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 1 \cdot 8) = 24$$

$$S_2 = 20 - (4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1.5 \cdot 8) = 0$$

$$S_3 = 8 - (2 \cdot 2 + 1.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 8) = 0$$

ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА

$$W = 280, y_1 = 0, y_2 = 10, y_3 = 10$$

$$e_1 = (8 \cdot 0 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 10) - 60 = 0$$

$$e_2 = (6 \cdot 0 + 2 \cdot 10 + 1.5 \cdot 10) - 30 = 5$$

$$e_3 = (1 \cdot 0 + 1.5 \cdot 10 + 0.5 \cdot 10) - 20 = 0$$

$$y_i \cdot S_i = 0 \quad i = \overline{1, m} \quad \text{СВОДИТСЯ К}$$

$$y_1 \cdot S_1 = 0 \cdot 24 = 0$$

$$y_2 \cdot S_2 = 10 \cdot 0 = 0$$

$$y_3 \cdot S_3 = 10 \cdot 0 = 0$$

$$e_j \cdot x_j = 0 \quad j = \overline{1, n} \quad \text{СВОДИТСЯ К}$$

$$e_1 \cdot x_1 = 0 \cdot 2 = 0$$

$$e_2 \cdot x_2 = 5 \cdot 0 = 0$$

$$e_3 \cdot x_3 = 0 \cdot 8 = 0$$