

Тема 4

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Постановка транспортной задачи

1. Имеется сеть пунктов-поставщиков (m), каждый из которых может поставить S_i единиц продукции.
2. Имеется сеть пунктов-потребителей (n), каждый из которых потребляет d_j единиц продукции.

Постановка транспортной задачи

3. Затраты на производство единицы продукции в пункте i и ее доставку в пункт j составляют c_{ij} .

Необходимо определить такое закрепление поставщиков за потребителями продукции, при котором обеспечивается удовлетворение потребности в ней в каждом пункте при минимуме затрат на производство и доставку.

x_{ij} – количество груза, перевозимого от i -го поставщика j -му потребителю

Модель транспортной задачи

Целевая функция:

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Ограничения:

1. По возможностям поставщиков

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq S_i, \quad i = \overline{1, m}$$

2. По потребностям потребителей

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = \overline{1, n}$$

3. На знак переменных

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}$$

Особенности транспортной задачи

1. Присутствие всех переменных в целевой функции;
2. Наличие единичных коэффициентов при переменных в ограничениях;

Особенности транспортной задачи

3. Каждая переменная принятия решений встречается только в двух ограничениях модели;

4. Система ограничений является симметричной относительно всех переменных.

Типы транспортной задачи

1. Закрытая

$$\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

2. Открытая

$$\sum_{i=1}^m S_i \neq \sum_{j=1}^n d_j$$

Сведение открытой транспортной задачи к закрытому виду

Если $\sum_{i=1}^m S_i > \sum_{j=1}^n d_j \Rightarrow$ фиктивный потребитель

$$d_{\text{фикт.}} = \sum_{i=1}^m S_i - \sum_{j=1}^n d_j$$

Сведение открытой транспортной задачи к закрытому виду

Если $\sum_{i=1}^m S_i < \sum_{j=1}^n d_j \Rightarrow$ фиктивный поставщик

$$S_{\text{фикт.}} = \sum_{j=1}^n d_j - \sum_{i=1}^m S_i$$

Компания, производящая электроэнергию, имеет 3 электростанции и поставляет ее в 4 города. Каждая электростанция может поставить следующее количество кВт.-часов электроэнергии:

1 – 35 млн., 2 – 50 млн., 3 – 40 млн. Пиковая потребность каждого из городов приходится на 2 часа дня и составляет (в кВт.-часах):

1 – 45 млн., 2 – 20 млн., 3 – 30 млн., 4 – 30 млн.

Стоимость передачи 1 млн. кВт.-часов электроэнергии от электростанции до города зависит от расстояния. Исходные данные приведены в таблице.

<i>Электро- станция</i>	<i>Город</i>				<i>Постав- ка</i>
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	
<i>1</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>10</i>	<i>9</i>	<i>35</i>
<i>2</i>	<i>9</i>	<i>12</i>	<i>13</i>	<i>7</i>	<i>50</i>
<i>3</i>	<i>14</i>	<i>9</i>	<i>16</i>	<i>5</i>	<i>40</i>
<i>Потребность</i>	<i>45</i>	<i>20</i>	<i>30</i>	<i>30</i>	

Сформулируйте модель линейного программирования для минимизации стоимости передачи электроэнергии от электростанций до городов в часы пик.

Решение

x_{ij} — количество млн. кВт.-часов
электроэнергии, производимое на
электростанции i и передаваемое городу j

Целевая функция

Общие затраты на передачу электроэнергии от всех электростанций всем городам в период пиковой потребности должны быть минимальными:

$$\begin{aligned} \min Z = & 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + \\ & + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + \\ & + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34} \end{aligned}$$

Ограничения

1) Поставка электроэнергии с каждой электростанции не должна превышать ее мощности:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40$$

2) Каждый город должен получить достаточное количество электроэнергии в час пик:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 30$$

3) Ограничения на знак переменных:

$$x_{ij} \geq 0$$

$$i = \overline{1,3}$$

$$j = \overline{1,4}$$

Теорема

- Ранг матрицы коэффициентов при переменных в транспортной задаче на единицу меньше числа ограничений:

$$r(A) = m + n - 1$$

Доказательство

- Рассмотрим задачу с двумя поставщиками и тремя потребителями продукции.

Переменные задачи:

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$$

Матрица системы ограничений:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{- строка } \overline{A_1} \\ \text{- строка } \overline{A_2} \\ \text{- строка } \overline{A_3} \\ \text{- строка } \overline{A_4} \\ \text{- строка } \overline{A_5} \end{array}$$

- Сложим первые две и последние три строки. Получим:

$$\overline{A_1} + \overline{A_2} = \overline{A_3} + \overline{A_4} + \overline{A_5}$$

$$(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

Заключение: любая строка матрицы A
может быть выражена через другие, т.е.
представлена в виде их линейной
комбинации.

Например:

$$\overline{A}_1 = \overline{A}_3 + \overline{A}_4 + \overline{A}_5 - \overline{A}_2$$

или

$$\overline{A}_4 = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 - (\overline{A}_3 + \overline{A}_5)$$

Т.о., строки матрицы линейно зависимы

- Ранг системы векторов равен
максимальному числу линейно
независимых векторов, т.е.

$$r(A) = m + n - 1$$

- Так как ранг системы векторов определяет число базисных переменных системы ограничений, то можно заключить, что для транспортной задачи оно будет равно:

$$m+n-1$$

ПРИЕМЫ НАХОЖДЕНИЯ БАЗИСНОГО ДОПУСТИМОГО РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

1. северо-западного угла
2. минимальной стоимости в строке (в столбце)
3. минимальной стоимости в таблице
4. двойного предпочтения
5. метод Фогеля и др.

Прием северо-западного угла

Исходная таблица:

Потребители продукции с объемами потребности				
	$d_1 = 45$	$d_2 = 20$	$d_3 = 30$	$d_4 = 30$
$S_1 = 35$	8	6	10	9
$S_2 = 50$	9	12	13	7
$S_3 = 40$	14	9	16	5

Поставщики продукции с запасами груза

Затраты на перевозку

	$d_1 = 45$	$d_2 = 20$	$d_3 = 30$	$d_4 = 30$
$S_1 = 35$	8 35	6	10	9
$S_2 = 50$	9	12	13	7
$S_3 = 40$	14	9	16	5

$$x_{11} = \min \{35, 45\} = 35$$

	$d_1 = 45$	$d_2 = 20$	$d_3 = 30$	$d_4 = 30$
$S_1 = 35$	8 35	6	10	9
$S_2 = 50$	9 10	12	13	7
$S_3 = 40$	14	9	16	5

$$x_{21} = \min \{50, 10\} = 10$$

	$d_1 = 45$	$d_2 = 20$	$d_3 = 30$	$d_4 = 30$
$S_1 = 35$	8 35	6	10	9
$S_2 = 50$	9 10	12 20	13 20	7
$S_3 = 40$	14	9	16 10	5 30

Исходное базисное допустимое решение:

$$BV = \{x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}\}$$

Метод потенциалов

- **Шаг 1.** *Приводим задачу к закрытому виду (если в этом есть необходимость).*

- **Шаг 2.** Получаем исходное базисное решение. Число заполненных клеток должно быть равно $m+n-1$. Если число заполненных клеток меньше $m+n-1$, то недостающее количество клеток заполняем нулями (условными поставками).

- **Шаг 3.** Проверяем полученное решение на оптимальность. Для этого рассчитываем потенциалы поставщиков u_i и потребителей v_j с учетом заполненных клеток и условия:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

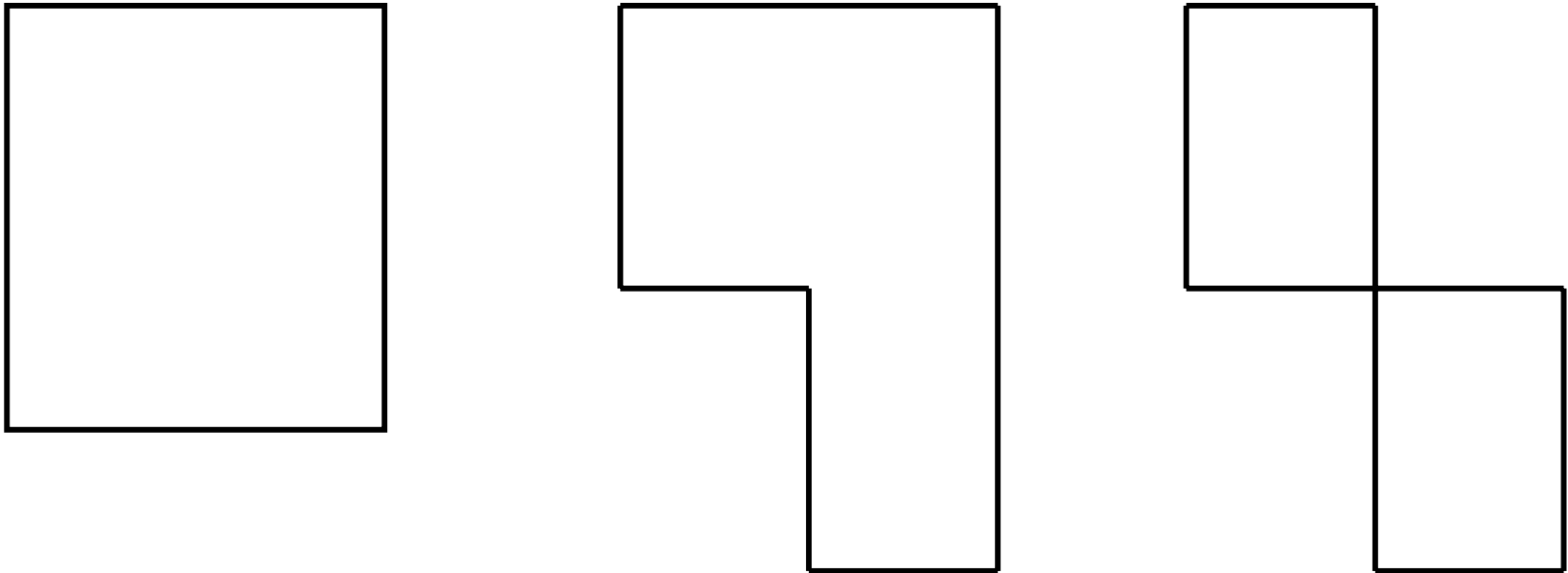
*Для небазисных переменных
(незаполненных клеток) рассчитываем
оценки оптимальности, используя
выражение:*

$$u_i + v_j - c_{ij} = \tilde{c}_{ij}$$

Сравниваем полученные оценки $\tilde{c}_{ij}$ с нулем. Если все $\tilde{c}_{ij} \leq 0$ (для задачи на минимум), то получено оптимальное решение. Если хотя бы одна $\tilde{c}_{ij} > 0$, то переходим к шагу 4.

- **Шаг 4.** Среди оценок $\tilde{c}_{ij} > 0$ выбираем ту, у которой значение больше. Переменная, соответствующая данной оценке $\tilde{c}_{ij}$, переходит в базисные. Строим цикл пересчета для определения значения переменной, входящей в базис, переменной, покидающей базис и значений скорректированных величин поставок для остальных базисных переменных цикла. Переходим к шагу 3.

Типы конфигураций циклов пересчета:



Определение величины перепоставки груза :

$$\Theta = \min_{(i,j) \in \text{циклу}} \left\{ x_{ij}^{(-\Theta)} \right\}$$

Исходное допустимое базисное решение:

	$d_1 = 45$	$d_2 = 20$	$d_3 = 30$	$d_4 = 30$
$S_1 = 35$	8 35	6	10	9
$S_2 = 50$	9 10	12 20	13 20	7
$S_3 = 40$	14	9	16 10	5 30

$$Z_1 = 8 \times 35 + 9 \times 10 + 12 \times 20 + 13 \times 20 + 16 \times 10 + 5 \times 30 = 1180$$

Расчет потенциалов:

$$u_1 = 0$$

$$u_1 + v_1 = c_{11} = 8 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 8$$

$$u_2 + v_1 = c_{21} = 9 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 1$$

$$u_2 + v_2 = c_{22} = 12 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 11$$

$$u_2 + v_3 = c_{23} = 13 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 12$$

$$u_3 + v_3 = c_{33} = 16 \quad \Rightarrow \quad u_3 = 4$$

$$u_3 + v_4 = c_{34} = 5 \quad \Rightarrow \quad v_4 = 1$$

Расчет оценок оптимальности:

$$\tilde{c}_{24} = 1 + 1 - 7 = -5$$

$$\tilde{c}_{31} = 4 + 8 - 14 = -2$$

$$\tilde{c}_{32} = 4 + 11 - 9 = 6$$

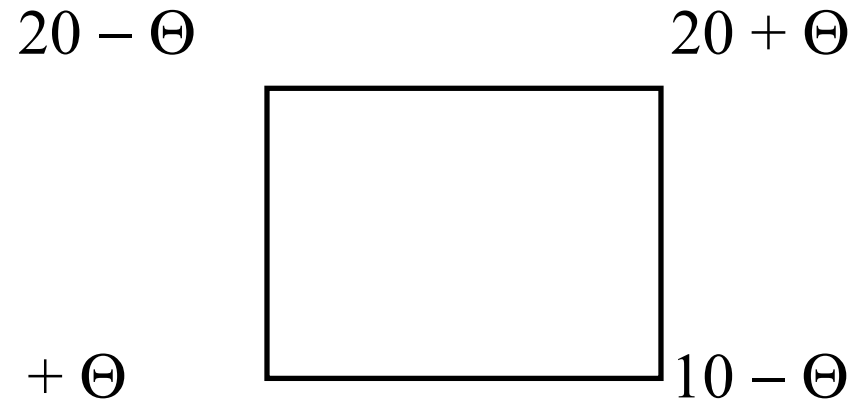
$$\tilde{c}_{12} = 0 + 11 - 6 = 5$$

$$\tilde{c}_{13} = 0 + 12 - 10 = 2$$

$$\tilde{c}_{14} = 0 + 1 - 9 = -8$$

	$d_1=45$	$d_2=20$	$d_3=30$	$d_4=30$	u_i
$S_1=35$	8 35	116 $11-6=5$	1210 $12-10=2$	19 $1-9=-8$	0
$S_2=50$	9 10	12 20	13 20	27 $2-7=-5$	1
$S_3=40$	1214 $12-14=-2$	159 $15-9=6$	16 10	5 30	4
v_j	8	11	1	1	

	$d_1=45$	$d_2=20$	$d_3=30$	$d_4=30$	u_i
$S_1=35$	8 35	116 11−6=5	1210 12−10=2	19 1−9=−8	0
$S_2=50$	9 10	12 20	13 20	27 2−7=−5	1
$S_3=40$	1214 12−14=−2	15 9 15−9=6	16 10	5 30	4
v_j	8	11	12	1	



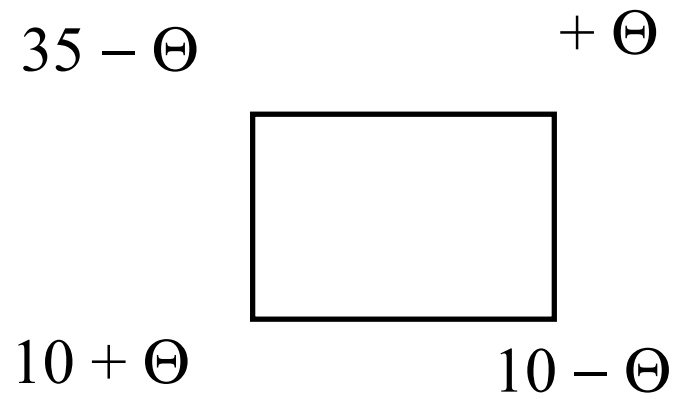
$$\Theta = \min \{20; 10\} = 10$$

	$d_1=45$	$d_2=20$	$d_3=30$	$d_4=30$
$S_1=35$	8 35	6	10	9
$S_2=50$	9 10	12 10	13 30	7
$S_3=40$	14	9 10	16	5 30

$$BV_2 = \{x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{32}, x_{34}\}$$

$$Z_2 = 8 \times 35 + 9 \times 10 + 12 \times 10 + 13 \times 30 + 9 \times 10 + 5 \times 30 = 1120$$

	$d_1=45$	$d_2=20$	$d_3=30$	$d_4=30$	u_i
$S_1=35$	8 11 6 12 10 7 9 35 11-6=5 12-10=2 7-9=-2				0
$S_2=50$	9 12 13 8 7 10 10 30 8-7=1				1
$S_3=40$	6 14 9 10 16 5 10 30 6-14=-8 10-16=-6				-2
v_j	8	11	12	7	



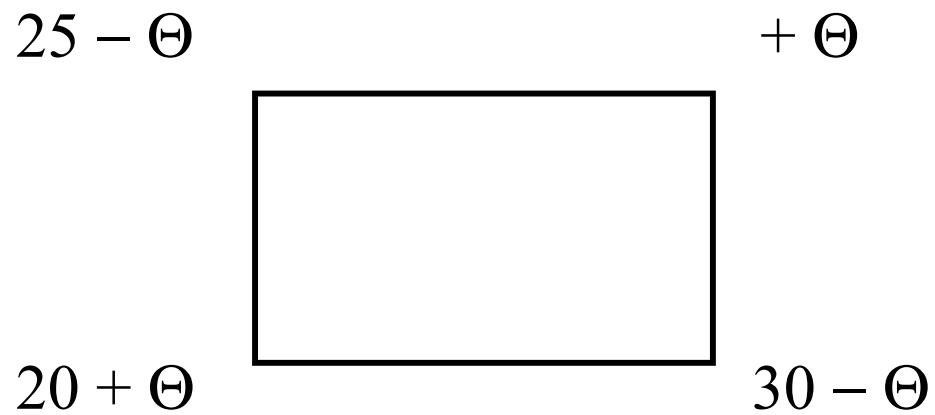
$$\Theta = \min \{35; 10\} = 10$$

	$d_1=45$	$d_2=20$	$d_3=30$	$d_4=30$
$s_1=35$	8 25	6 10	10	9
$s_2=50$	9 20	12	13 30	7
$s_3=40$	14	9 10	16	5 30

$$BV_3 = \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{23}, x_{32}, x_{34}\}$$

$$Z_3 = 8 \times 25 + 6 \times 10 + 9 \times 20 + 13 \times 30 + 9 \times 10 + 5 \times 30 = 1070$$

	$d_1=45$	$d_2=20$	$d_3=30$	$d_4=30$	u_i
$S_1=35$	8 25	6 10	12 10 12-10=2	2 9 2-9=-7	0
$S_2=50$	9 20	7 12 7-12=-5	13 30	3 7 3-7=-4	1
$S_3=40$	11 14 11-14=-3	9 10	15 16 15-16=-1	5 30	3
v_j	8	6	12	2	



$$\Theta = \min \{25; 30\} = 25$$

	$d_1=45$	$d_2=20$	$d_3=30$	$d_4=30$
$S_1=35$	8	6 10	10 25	9
$S_2=50$	9 45	12	13 5	7
$S_3=40$	14	9 10	16	5 30

$$BV_4 = \{x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{32}, x_{34}\}$$

$$Z_4 = 6 \times 10 + 10 \times 25 + 9 \times 45 + 13 \times 5 + 9 \times 10 + 5 \times 30 = 1020$$

	d₁=45	d₂=20	d₃=30	d₄=30	u_i
S₁=35	6 8 6−8=−2	6 10	10 25	2 9 2−9=−7	0
S₂=50	9 45	9 12 9−12=−3	13 5	5 7 5−7=−2	3
S₃=40	9 14 9−14=−5	9 10	13 16 13−16=−3	5 30	3

$$v_j \qquad \qquad \qquad 6 \qquad \qquad \qquad 6 \qquad \qquad \qquad 10 \qquad \qquad \qquad 2$$

$$x_{12} = 10, x_{13} = 25, x_{21} = 45, x_{23} = 5, x_{32} = 10, x_{34} = 30, Z^{opt.} = 1020$$

- **Замечание:** наличие хотя бы одной нулевой оценки оптимальности ($\tilde{c}_{ij} = 0$) в таблице с оптимальным решением свидетельствует о неединственности распределения поставок между поставщиками и потребителями, приносящего одно и то же значение целевой функции