

ПЕРТ-анализ

Обозначения

a_{ij} — **ОПТИМИСТИЧЕСКАЯ** оценка продолжительности работы (ij)

(рассчитывается для случая, когда условия проведения работы наиболее благоприятные)

m_{ij} — наиболее вероятная
продолжительность работы (ij)

(учитывает нормальный ход событий)

b_{ij} — пессимистическая оценка
длительности работы (ij)

(определяется для случая, когда процесс
развивается по наиболее неудачной схеме)

Предположение системы ПЕРТ

- Продолжительность любой операции — случайная величина, имеющая β - распределение

Ожидаемая продолжительность работы (ij)

$$\bar{t}_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}$$

Вариация времени выполнения операции

$$V(t_{ij}) = \frac{(b_{ij} - a_{ij})^2}{36}$$

Стандартное отклонение

$$\sigma(t_{ij}) = \frac{b_{ij} - a_{ij}}{6}$$

Общая схема расчетов

- Для заданной сети определяем работы, принадлежащие критическому пути.

- Определяем ожидаемую продолжительность $(\bar{t}_{ij})$, вариацию времени выполнения работ $V(t_{ij})$ и стандартное отклонение $\sigma(t_{ij})$

- Рассчитываем ожидаемое время окончания выполнения комплекса работ

$$\bar{t}_{кр.} = \sum_{(i,j) \in \mu_{кр.}} \bar{t}_{ij}$$

- Находим вариацию времени критического пути

$$V(\bar{t}_{кр.}) = \sum_{(i,j) \in \mu_{кр.}} V(t_{ij})$$

и стандартное отклонение

$$\sigma(\bar{t}_{кр.}) = \sqrt{V(\bar{t}_{кр.})}$$

Предположения:

1. Время критического пути является независимой случайной величиной, распределенной по нормальному закону,
2. Продолжительности работ критического пути независимы друг от друга,
3. Число работ достаточно велико.

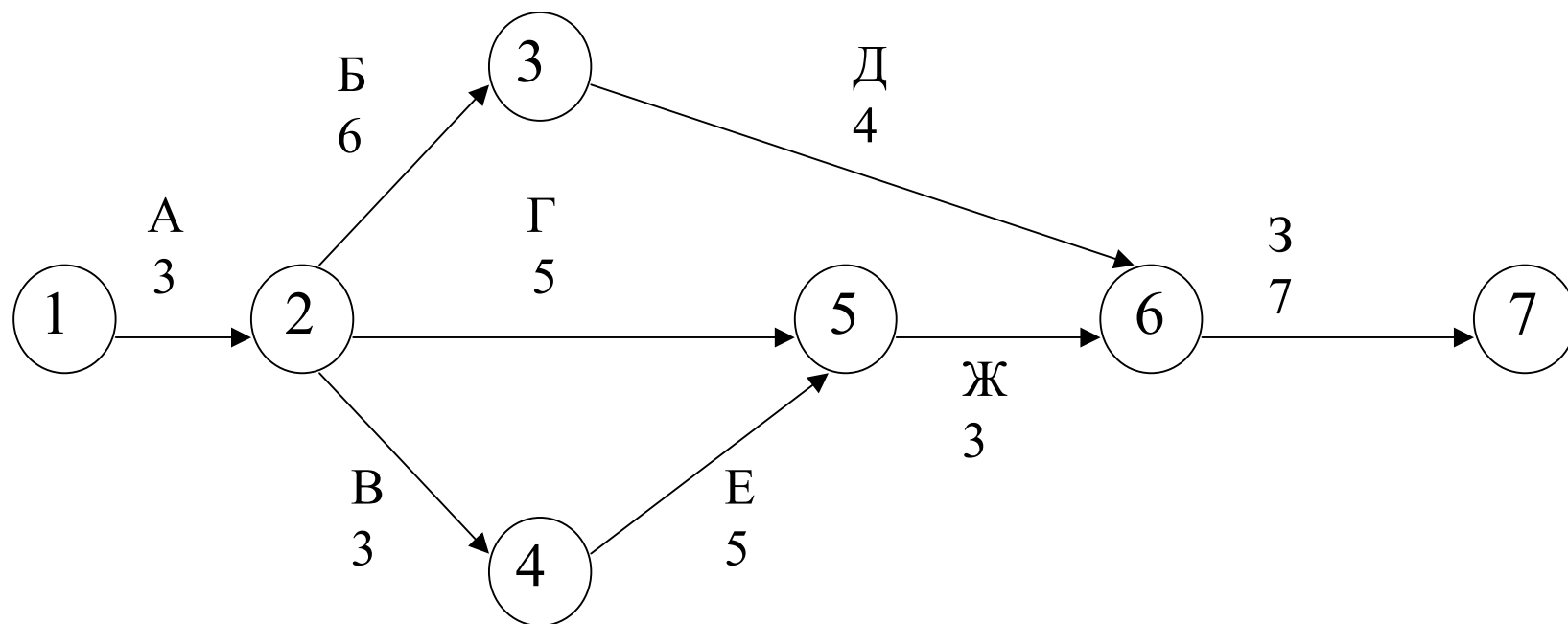
Пример

Пусть имеется комплекс работ, которые необходимо выполнить в рамках маркетингового исследования по запуску в производство нового продукта:

<i>Код операции</i>	<i>Содержание</i>	<i>Операция – непосредствен- ный предшественник</i>	<i>Ожидаемое время выполнения (недель)</i>
<i>А</i>	<i>Исходный анализ рынка и стоимостных данных</i>	<i>—</i>	<i>3</i>
<i>Б</i>	<i>Разработка плана тестирования рынка и процедуры сбора информации</i>	<i>А</i>	<i>6</i>
<i>В</i>	<i>Подготовка производственной линии к запуску продукта в производство</i>	<i>А</i>	<i>3</i>

<i>Г</i>	<i>Разработка и подготовка пакета документации</i>	<i>А</i>	<i>5</i>
<i>Д</i>	<i>Начало организации сбора данных по тестированию рынка</i>	<i>Б</i>	<i>4</i>
<i>Е</i>	<i>Запуск пробной партии продукции в производство</i>	<i>В</i>	<i>5</i>
<i>Ж</i>	<i>Распределение продукции на рынке с целью его тестирования</i>	<i>Г, Е</i>	<i>3</i>
<i>З</i>	<i>Тестирование рынка – сбор и анализ данных</i>	<i>Д, Ж</i>	<i>7</i>

*Необходимо определить ожидаемое
время окончания работ и стандартное
отклонение от данного времени*



Ранние сроки свершения событий

$$t_1 = 0;$$

$$t_2 = 0 + 3 = 3;$$

$$t_3 = 3 + 6 = 9;$$

$$t_4 = 3 + 3 = 6;$$

$$t_5 = \max\{3 + 5; 6 + 5\} = 11;$$

$$t_6 = \max\{9 + 4; 11 + 3\} = 14;$$

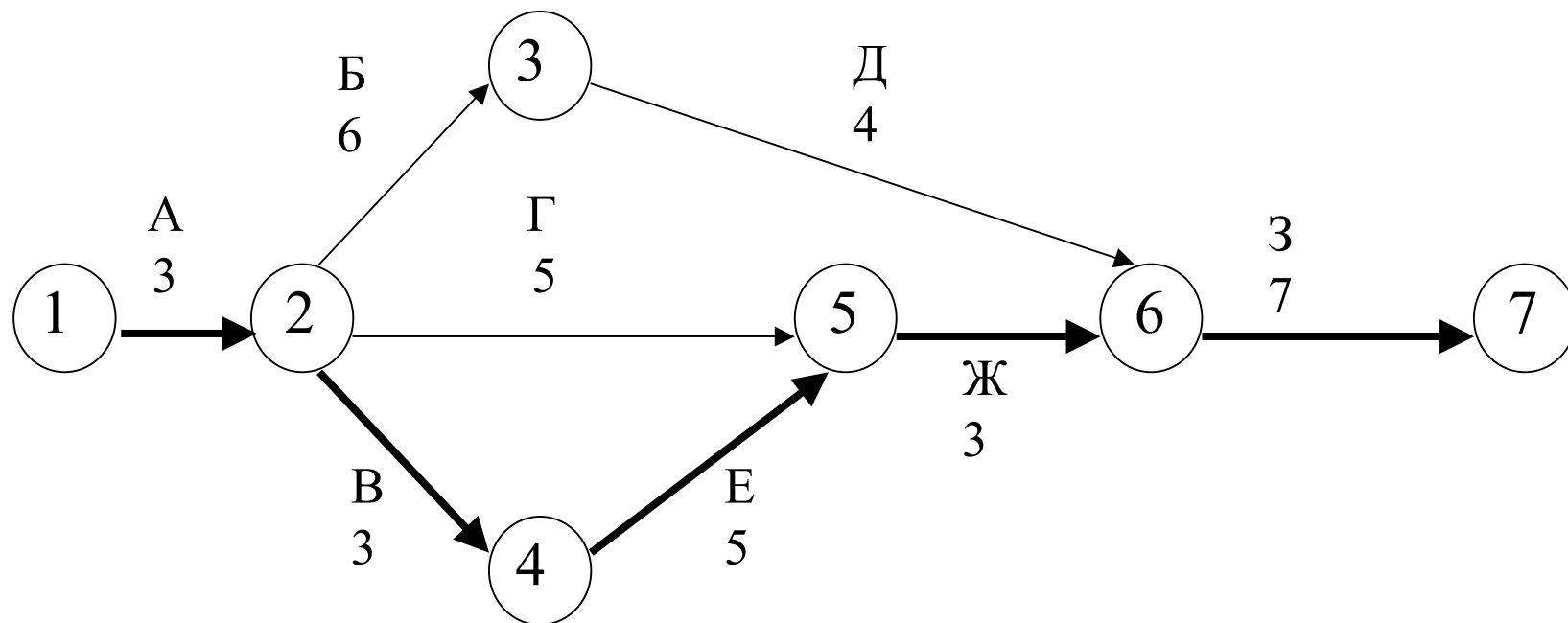
$$t_7 = 14 + 7 = 21.$$

Критический путь:

$$\mu_{кр.} = 1-2-4-5-6-7$$

ИЛИ

$$\mu_{кр.} = A-B-E-Ж-З$$



Оптимистические, наиболее вероятные и пессимистические сроки выполнения работ:

Код операции	Операция – непосредственный предшественник	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}
А (1,2)	–	1	3	5
Б (2,3)	А	4	6	8
В (2,4)	А	2	3	5
Г (2,5)	А	4	5	8
Д (3,6)	Б	3	4	5
Е (4,5)	В	2	5	7
Ж (5,6)	Г, Е	1.5	3	4.5
З (6,7)	Д, Ж	5	7	9

Ожидаемое время выполнения операций

$$\bar{t}_{12} = \frac{1 + 12 + 5}{6} = 3; \quad \bar{t}_{23} = \frac{4 + 24 + 8}{6} = 6;$$

$$\bar{t}_{24} = \frac{2 + 12 + 5}{6} = 3.167; \quad \bar{t}_{25} = \frac{4 + 20 + 8}{6} = 5.333;$$

$$\bar{t}_{36} = \frac{3 + 16 + 5}{6} = 4; \quad \bar{t}_{45} = \frac{2 + 20 + 7}{6} = 4.833;$$

$$\bar{t}_{56} = \frac{1.5 + 12 + 4.5}{6} = 3;$$

$$\bar{t}_{67} = \frac{5 + 28 + 9}{6} = 7;$$

Вариация времени выполнения операций

$$V(t_{12}) = \frac{(5-1)^2}{36} = 0.444; \quad V(t_{22}) = \frac{(8-4)^2}{36} = 0.444;$$

$$V(t_{24}) = \frac{(5-2)^2}{36} = 0.25; \quad V(t_{25}) = \frac{(8-4)^2}{36} = 0.444;$$

$$V(t_{36}) = \frac{(5-3)^2}{36} = 0.222; \quad V(t_{45}) = \frac{(7-2)^2}{36} = 0.694;$$

$$V(t_{56}) = \frac{(4.5-1.5)^2}{36} = 0.25; \quad V(t_{67}) = \frac{(9-5)^2}{36} = 0.444.$$

Ожидаемая длительность критического пути

$$\bar{t}_{кр.} = 3 + 3.167 + 4.833 + 3 + 7 = 21;$$

$$V(\bar{t}_{кр.}) = 0.444 + 0.25 + 0.694 + 0.25 + 0.444 = 2.082.$$

Стандартное отклонение от средней величины

$$\sigma(\bar{t}_{кр.}) = \sqrt{2.082} = 1.44$$

Вывод – продолжительность критического пути

$$t_{кр.} = 21 \pm 1.44 \text{ дня}$$

**ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЛИНЕЙНОЕ
ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

Пусть

- x_j — поздний срок свершения j -го события.

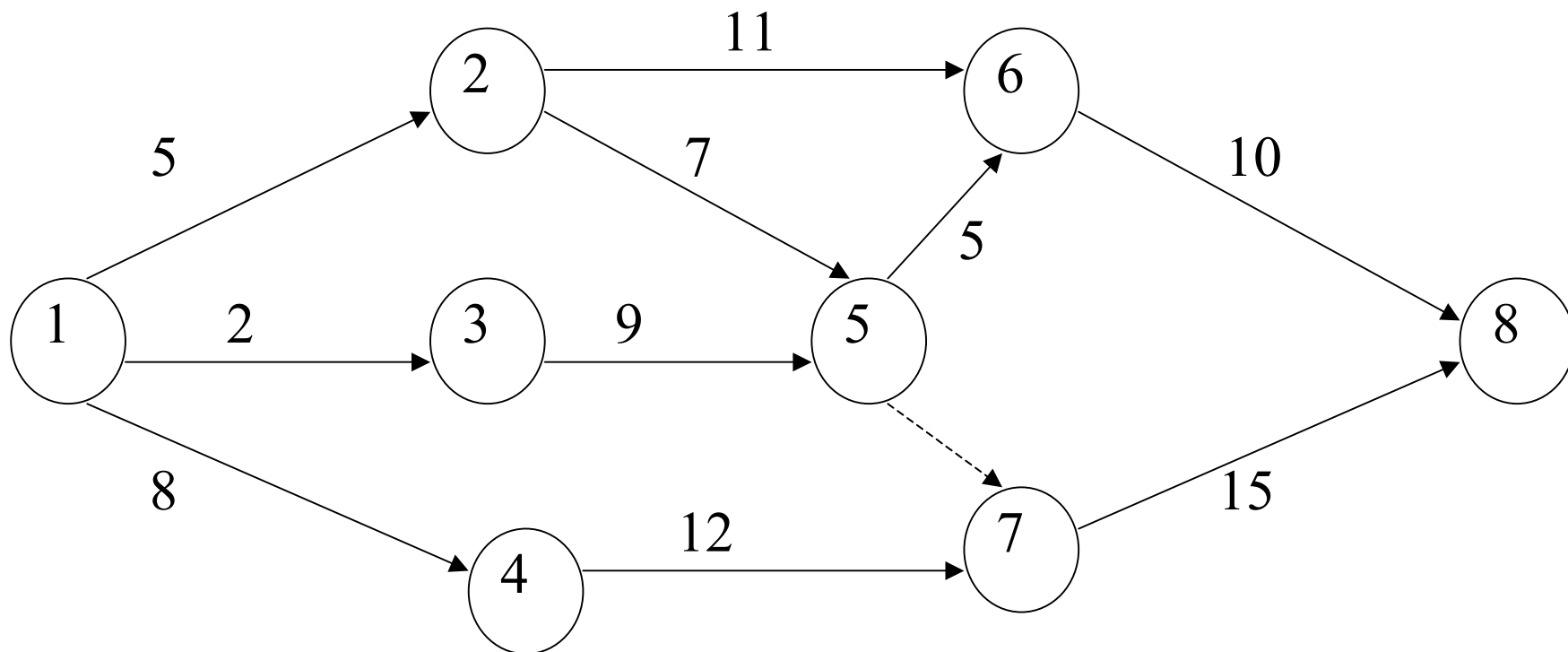
Для каждой дуги (i,j) рассматривается следующее соотношение

$$x_j \geq x_i + t_{ij}$$

Продолжительность критического пути

$$t_{кр} = x_n - x_1$$

Пример



$$\min Z = x_8 - x_1;$$

$$x_2 \geq x_1 + 5 \text{ ограничени е, соответств ующее дуге (1,2);}$$

$$x_3 \geq x_1 + 2 \text{ ограничени е, соответств ующее дуге (1,3);}$$

$$x_4 \geq x_1 + 8 \text{ ограничени е, соответств ующее дуге (1,4);}$$

$$x_5 \geq x_2 + 7 \text{ ограничени е, соответств ующее дуге (2,5);}$$

$$x_5 \geq x_3 + 9 \text{ ограничени е, соответств ующее дуге (3,5);}$$

$x_6 \geq x_2 + 11$ ограничени е, соответств ующее дуге (2,6);

$x_6 \geq x_5 + 5$ ограничени е, соответств ующее дуге (5,6);

$x_7 \geq x_5$ ограничени е, соответств ующее дуге (5,7);

$x_7 \geq x_4 + 12$ ограничени е, соответств ующее дуге (4,7);

$x_8 \geq x_6 + 10$ ограничени е, соответств ующее дуге (6,8);

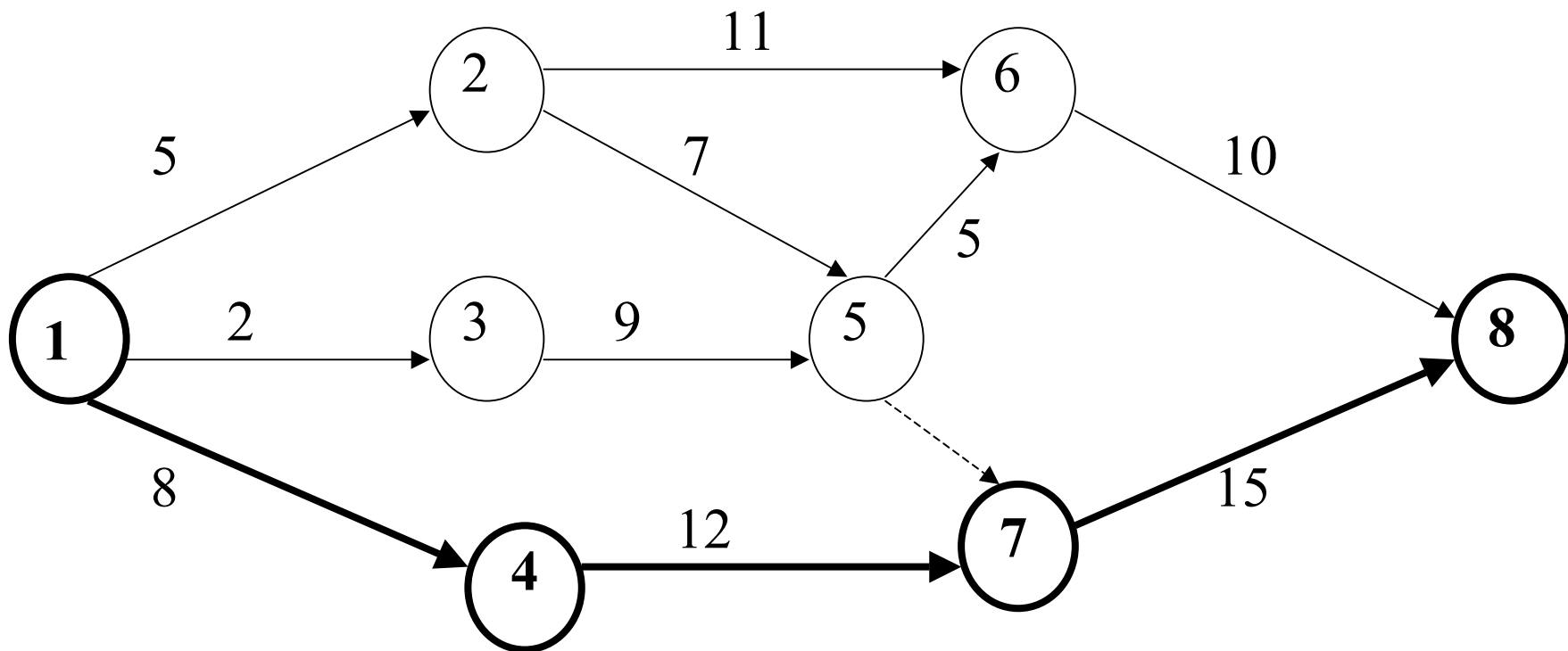
$x_8 \geq x_7 + 15$ ограничени е, соответств ующее дуге (7,8);

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0;$

$x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; x_7 \geq 0; x_8 \geq 0.$

Ограниче- ние	Правая часть ограничения	Теневая цена	Недовыполнение/ перевыполнение	Миним. значение правой части	Максим. значение правой части
1	≥ 5	0	+8.0	$-\infty$	+13.0
2	≥ 2	0	+9.0	$-\infty$	+11.0
3	≥ 8	-1.0	0	0	$+\infty$
4	≥ 7	0	0	+6.0	+15.0
5	≥ 9	0	0	$-\infty$	+18.0
6	≥ 11	0	+1.0	$-\infty$	+12.0
7	≥ 5	0	0	$-\infty$	+5.0
8	≥ 0	0	0	0	+8.0
9	≥ 12	-1.0	0	+4.0	$+\infty$
10	≥ 10	0	0	$-\infty$	+10.0
11	≥ 15	-1.0	0	+15.0	$+\infty$

Минимальное значение целевой функции = 35



$$\mu_{\text{кр.}} = 1-4-7-8$$