ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ КОМПЛЕКСА ОПЕРАЦИЙ

(КОРРЕКТИРОВКА ПРОЕКТА)

ОПТИМИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСА ОПЕРАЦИЙ ПО ВРЕМЕНИ

- **Задача 1**

Постановка задачи.

Пусть задан сетевой график

$$G = (E, e)$$

Время выполнения операции равно t_{ij}

Вкладывая в операцию (i, j) средства в размере x_{ij}, можно сократить время t_{ij} до величины

$$t_{ij}' = f_{ij}(x_{ij}) < t_{ij}$$

Однако имеются пределы d_{ij} *сокращения времени выполнения операций.*

Требуется определить сроки начала $t_{ij}^{н}$ и окончания $t_{ij}^{о}$ выполнения операций, и количество дополнительных средств x_{ij}, вкладываемых в каждую операцию, *чтобы минимизировать общее время выполнения работ при условии, что задан лимит дополнительных средств* B

и время выполнения каждой операции не может быть меньше некоторого d_{ij}

Математическая модель

$$\min t_{кр.} = t^{o}_{n-1,n}$$

$$\sum_{(i,j)\in \vec{e}} x_{ij} \le B$$

$$t^{o}_{ij} - t^{н}_{ij} \ge d_{ij} \qquad \forall \ (i,j)\in \vec{e}$$

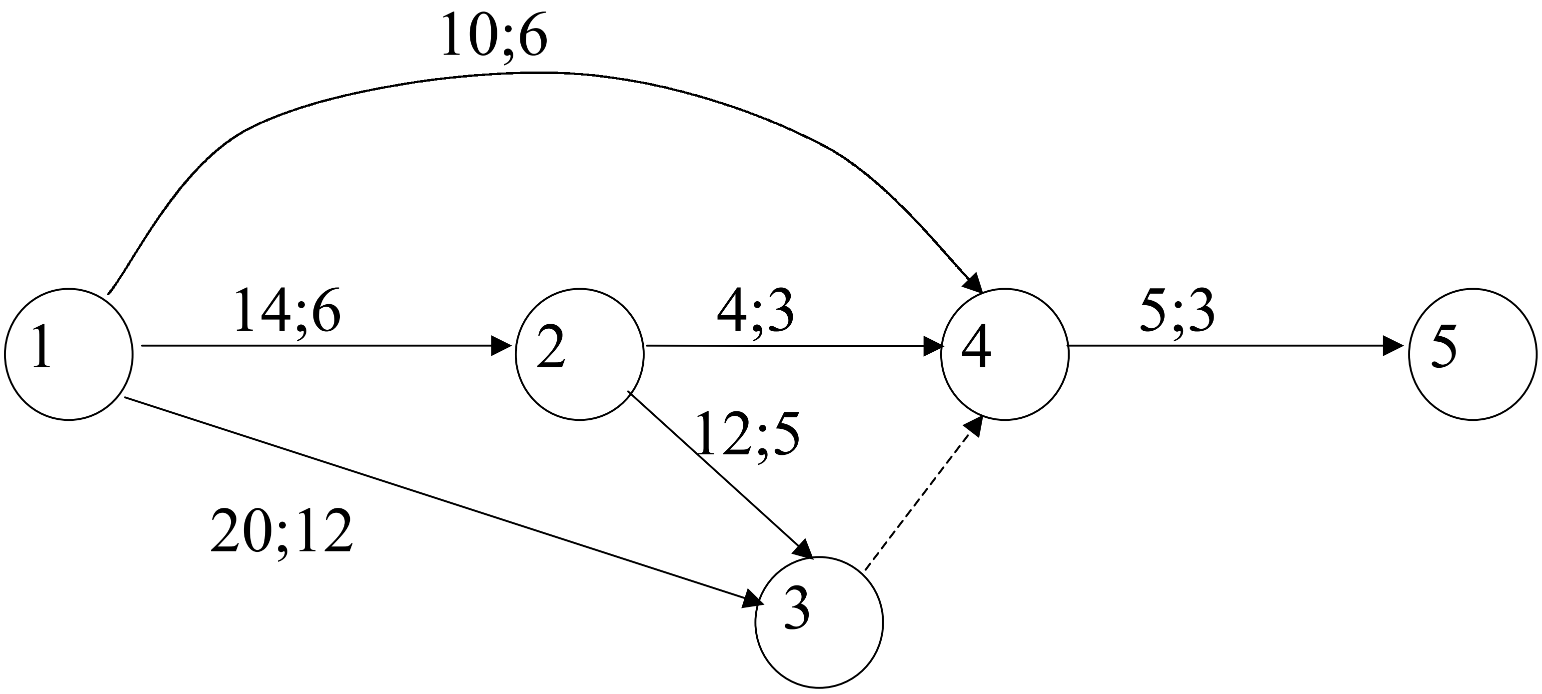
$$f_{ij}(x_{ij}) = t^{o}_{ij} - t^{н}_{ij} \qquad \forall \ (i,j)\in \vec{e}$$

$$t^{н}_{jr} \ge t^{o}_{ij} \qquad \forall \ i,j,r \in E$$

$$t^{н}_{ij} \ge 0, \ t^{o}_{ij} \ge 0, \ x_{ij} \ge 0 \qquad \forall \ (i,j)\in \vec{e}$$

Пример

- *Имеется сетевой график*



- *Зависимость продолжительности выполнения операций от вложенных средств:*

$$t_{ij}^{'} = t_{ij}(1 - k_{ij}x_{ij}) \ ,$$

где

$$k_{12} = 0.2, k_{13} = 0.1, k_{14} = 0.3,$$

$$k_{23} = 0.2, k_{24} = 0.5, k_{45} = 0.3$$

- *Построить математическую модель для минимизации критического времени при условии, что сумма вложенных средств не превышает 10 ед.*

Решение

- Целевая функция – минимизация критического времени

$$\min Z = t_{кр.} = t^{o}_{45}$$

Ограничения

1. По использованию ресурсов

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{45} \leq 10$$

2. По времени выполнения каждой операции

$$t_{12}^{о} - t_{12}^{н} \geq 6,\ t_{13}^{о} - t_{13}^{н} \geq 12,\ t_{14}^{о} - t_{14}^{н} \geq 6,$$

$$t_{23}^{о} - t_{23}^{н} \geq 5,\ t_{24}^{о} - t_{24}^{н} \geq 3,\ t_{34}^{о} - t_{34}^{н} \geq 0,$$

$$t_{45}^{о} - t_{45}^{н} \geq 3.$$

3. На зависимость продолжительности операций от вложенных средств

$$t_{12}^{o} - t_{12}^{н} = 14(1 - 0.2x_{12}), \; t_{13}^{o} - t_{13}^{н} = 20(1 - 0.1x_{13}),$$

$$t_{14}^{o} - t_{14}^{н} = 10(1 - 0.3x_{14}), \; t_{23}^{o} - t_{23}^{н} = 12(1 - 0.2x_{23}),$$

$$t_{24}^{o} - t_{24}^{н} = 4(1 - 0.5x_{24}), \; t_{45}^{o} - t_{45}^{н} = 5(1 - 0.3x_{45})$$

4. По времени выполнения предшествующих и последующих операций

$$t_{12}^{н} = t_{13}^{н} = t_{14}^{н} = 0,$$

$$t_{23}^{н} \ge t_{12}^{о}, \quad t_{24}^{н} \ge t_{12}^{о}, \quad t_{34}^{н} \ge t_{23}^{о}, \quad t_{34}^{н} \ge t_{13}^{о},$$

$$t_{45}^{н} \ge t_{14}^{о}, \quad t_{45}^{н} \ge t_{34}^{о}, \quad t_{45}^{н} \ge t_{24}^{о}$$

5. Неотрицательность переменных

$$t_{ij}^{н} \geq 0,\ t_{ij}^{o} \geq 0,\ x_{ij} \geq 0 \qquad \forall \qquad (i, j) \in \vec{e}$$

- **Задача 2**

Постановка задачи.

Пусть общее время выполнения операций ограничено некоторой величиной T_0 *– директивным временем.*

Необходимо определить объемы дополнительных средств x_{ij} *, вкладываемых в операции* (i, j) *таким образом,* *чтобы общие затраты этих средств были минимальными при условии,* *что задан срок выполнения всех операций и время выполнения каждой операции* (i, j)

не меньше минимально допустимого времени d_{ij}

Математическая модель

- Целевая функция

$$\min Z = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} x_{ij}$$

- **Ограничения**

$$t^{o}_{n-1,n} \le T_0$$

$$t^{o}_{ij} - t^{н}_{ij} \ge d_{ij} \qquad \forall \quad (i,j) \in \vec{e}$$

$$f_{ij}(x_{ij}) = t_{ij}^{о} - t_{ij}^{н} \quad \forall \quad (i,j) \in \vec{e}$$

$$t_{jr}^{н} \geq t_{ij}^{о} \quad \forall \quad i,j,r \in E$$

$$t_{ij}^{н} \geq 0, \; t_{ij}^{о} \geq 0, \; x_{ij} \geq 0 \;\; \forall \;\; (i,j) \in \vec{e}$$

Пример

- *Компания собирается предложить покупателям новый продукт (№3). Для его производства необходимо изготовить два продукта (№1 и №2)*

- *Прежде чем начать производство любого из продуктов (№1 или №2) необходимо купить сырье и обучить рабочих.*

- *До того как продукт №3 может быть собран, второй продукт должен быть подвергнут испытанию.*

- *Список действий по производству продукта №3, а также продолжительности работ приведены в таблице*

Действие	Предшествующая операция	Продолжительность операции (дней)
А – обучить рабочих	-	6
Б – купить сырье	-	9
В – произвести продукт №1	А, Б	8
Г – произвести продукт №2	А, Б	7
Д – испытать продукт №2	Г	10
Е – собрать продукт №3	В, Д	12

- *Расчеты показывают, что продукт №3 будет готов, чтобы его предложить на рынке, через 38 дней.*

Компания хотела бы закончить выпуск продукта №3 раньше, так имеется информация, что конкурент собирается представить свой аналогичный продукт через 26 дней.

Перед компанией встает

проблема завершить все работы через

25 дней, чтобы опередить конкурента.

Если вкладывать дополнительные ресурсы в операции, то длительность каждой из них может быть сокращена максимум на пять дней.

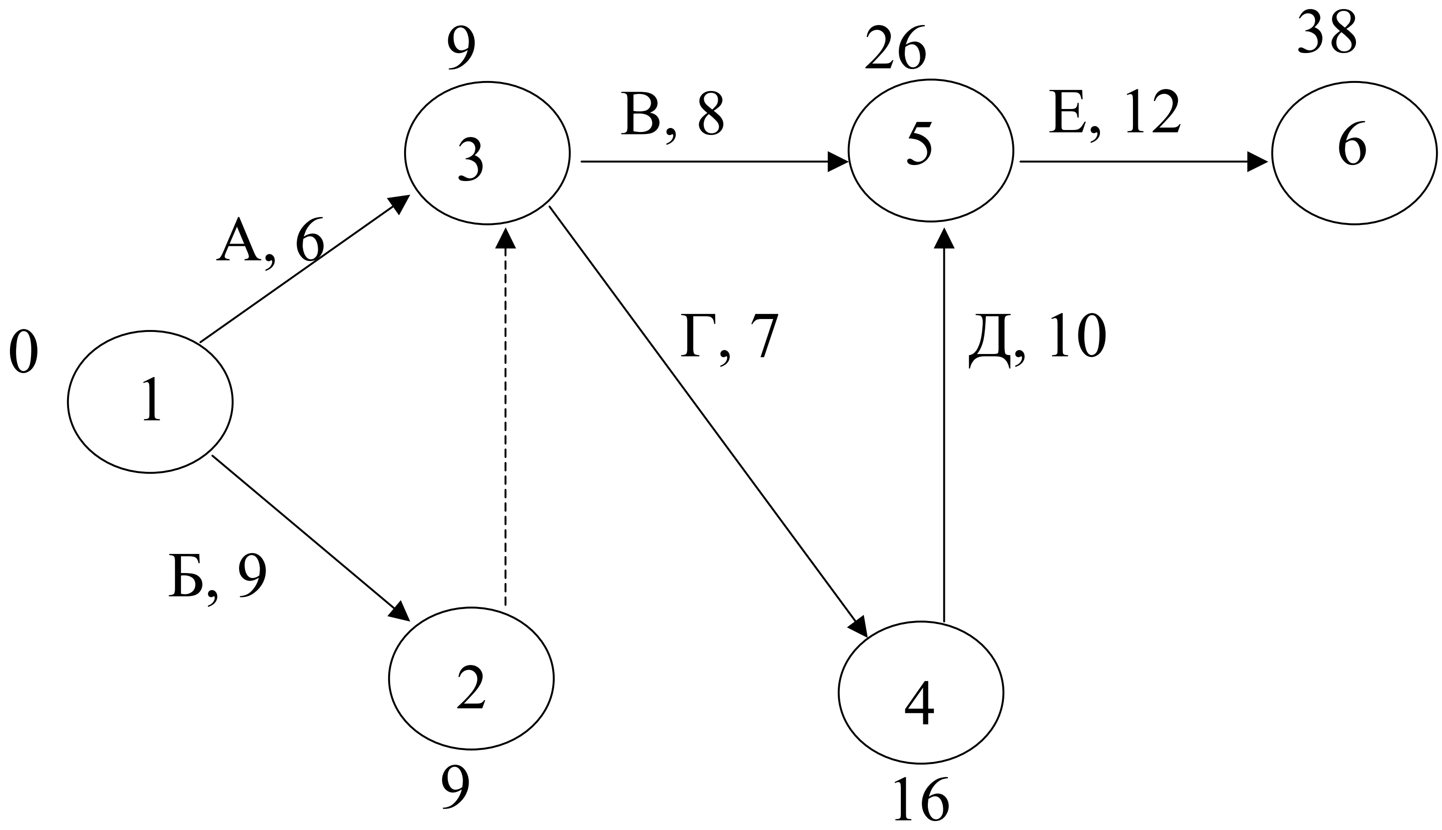
Стоимость сокращения сроков выполнения операций на один день представлена в таблице

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**	**Е**
10	**20**	**3**	**30**	**40**	**50**

Необходимо построить математическую модель, которая бы способствовала определению минимальных затрат на сокращение длительности выполнения работ до 25 дней.

Решение

- Схема выполнения комплекса операций по изготовлению продукта №3:



Переменные:

А – количество дней, на которое будет сокращена работа *А*;

Б – количество дней, на которое будет сокращена работа *Б*;

В – количество дней, на которое будет сокращена работа *В*;

Г – количество дней, на которое будет сокращена работа *Г*;

Д – количество дней, на которое будет сокращена работа *Д*;

Е – количество дней, на которое будет сокращена работа *Е*;

x_j – время (поздний срок) свершения *j*-го события.

Математическая модель

$$\min Z = 10А + 20Б + 3В + 30Г + 40Д + 50Е,$$

$$А \le 5,$$

$$Б \le 5,$$

$$В \le 5,$$

$$Г \le 5,$$

$$Д \le 5,$$

$$Е \le 5,$$

$$x_2 \geq x_1 + 9 - Б,$$
$$x_3 \geq x_1 + 6 - А,$$
$$x_3 \geq x_2 + 0,$$
$$x_4 \geq x_3 + 7 - Г,$$
$$x_5 \geq x_3 + 8 - В,$$
$$x_5 \geq x_4 + 10 - Д,$$
$$x_6 \geq x_5 + 12 - Е,$$
$$x_6 - x_1 \leq 25,$$
$$А, Б, В, Г, Д, Е \geq 0, \;\; x_j \geq 0, \;\; j = \overline{1,6}.$$

Оптимальное решение

$$Z = 390 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 4$$

$$x_4 = 6 \quad x_5 = 13 \quad x_6 = 25$$

$$А = 2 \quad Б = 5 \quad В = 0 \quad Г = 5$$

$$Д = 3 \quad Е = 0$$

Задача 3

Постановка задачи

Пусть t_{ij} ***– время выполнения операции*** $\left(i, j\right)$ ***.***

Общая сумма подвижных средств равна ***B*** *ед.*

Для выполнения операций (i, j) *выделено* b_{ij} *ед. средств.*

Если с операции (i, j) снять x_{ij} средств, то время ее выполнения увеличится с t_{ij} до

$$t'_{ij} = \psi_{ij}(x_{ij}) > t_{ij}$$

Если средства x_{ij} *вложить в операцию* (i, j)*, то время ее выполнения уменьшится до величины*

$$t''_{ij} = \varphi_{ij}(x_{ij}) < t_{ij}$$

Требуется так перераспределить подвижные средства между операциями, чтобы $t_{кр.}$ *стало минимальным.*

$x_{ij} > 0$, если средства вкладываются

$x_{ij} < 0$, если средства снимаются

Новые продолжительности

$$t'_{ij} = \psi_{ij}\left(|\, x_{ij}\,|\right)$$

$$t''_{ij} = \varphi_{ij}\left(x_{ij}\right)$$

Баланс между снятыми и добавленными средствами

.

$$\sum_{(ij)\in\vec{e}} x_{ij} = 0$$

Количество снимаемых с каждой операции средств должно быть не больше, чем их имеется

.

$$x_{ij} \le b_{ij} \quad \forall \quad (i,j) \in \vec{e}$$

Общее количество перемещаемых средств не должно превышать возможности (*B* единиц)

.

$$\sum_{(ij)\in\vec{e}} |x_{ij}| \le B$$

Целевая функция

.

$$\min Z = \sum_{(ij)\in\mu_{кр.}} t'_{ij} + \sum_{(ij)\in\mu_{кр.}} t''_{ij}$$