ЗАДАЧА НА НАХОЖДЕНИЕ КРАТЧАЙШИХ РАССТОЯНИЙ НА ЗАДАННОЙ СЕТИ.

АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРЫ

Постановка задачи

- Имеется некоторая сеть $G=(E,\overline{e})$, все связи между вершинами которой заданы ребрами

Пусть l_{ij} – длина ребра $(\overline{E_i, E_j})$. Причем $l_{ij} = l_{ji}$. Две точки E_i и E_j будем считать соседними (или смежными), если они соединены ребром.

В задаче необходимо найти кратчайшие расстояния по сети от каждой точки до всех остальных.

Алгоритм Дейкстры

Шаг 1. Рассматриваем исходную вершину E_0. Принимаем ее в качестве текущей $\left(y = E_0\right)$, начиная с которой будем производить расчеты кратчайших расстояний до всех остальных вершин сети.

Расстояние до данной вершины принимаем равным нулю: $d(y) = 0$

Расстояния до всех остальных вершин равны ∞: $d(x) = \infty$

Шаг 2. Используя формулу:

$$d(x) = \min\{d(x); d(y) + l(y,x)\},$$

где $l(y,x)$ – расстояние от текущей

вершины y до заданной x ,

находим кратчайшие расстояния до всех вершин от текущей, взятой в качестве исходной на данном этапе расчетов

Если между вершинами нет связи,

то соответствующие $l(y, x)$

принимаем равными бесконечности

$$l(y, x) = \infty$$

Шаг 3. Среди найденных значений

$$d(x)$$

выбираем наименьшее и соответствующую вершину x принимаем в качестве текущей: $y = x$

Минимальное расстояние до новой текущей вершины от исходной принимаем равным

$$d(y) = d(y = x)$$

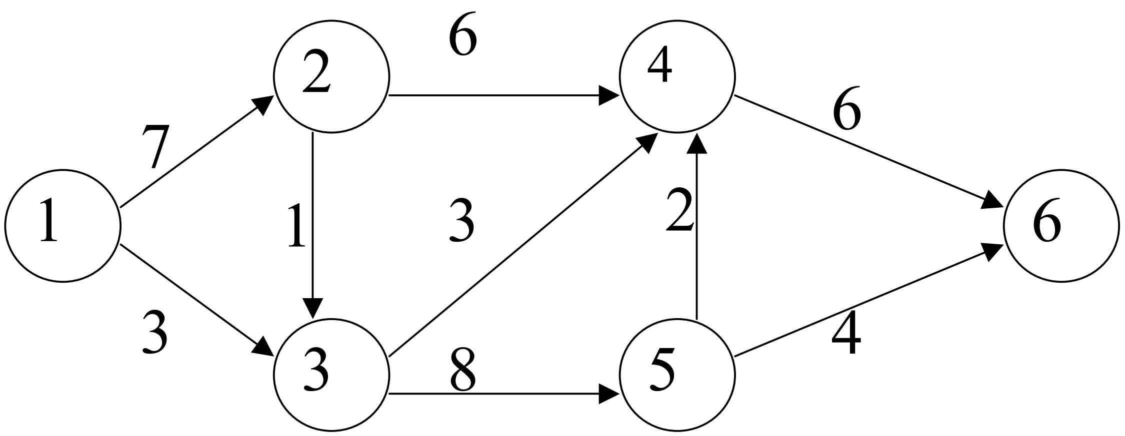
Шаг 4. Проверяем условие $y = E_n$?

Где E_n – завершающая вершина сети.

Если условие выполняется, то расчет окончен, если нет, то возвращаемся к шагу 2, и процесс решения продолжается.

Пример.

Пусть задана сеть



Для данной сети необходимо найти кратчайшее расстояние от вершины 1 до вершины 6, а также до всех остальных.

Решение.

Шаг 1.

$$y = 1$$

$$d(1) = 0$$

$$d(2) = d(3) = d(4) = d(5) = d(6) = \infty$$

Шаг 2.

$$d(2) = \min\left\{d(2); \underline{d(1) + l(1,2)}\right\} = \min\{\infty; \underline{0 + 7}\} = 7,$$

$$d(3) = \min\left\{d(3); \underline{d(1) + l(1,3)}\right\} = \min\{\infty; \underline{0 + 3}\} = 3,$$

$$d(4) = \min\left\{d(4); d(1) + l(1,4)\right\} = \min\{\infty; 0 + \infty\} = \infty,$$

$$d(5) = \min\left\{d(5); d(1) + l(1,5)\right\} = \min\{\infty; 0 + \infty\} = \infty,$$

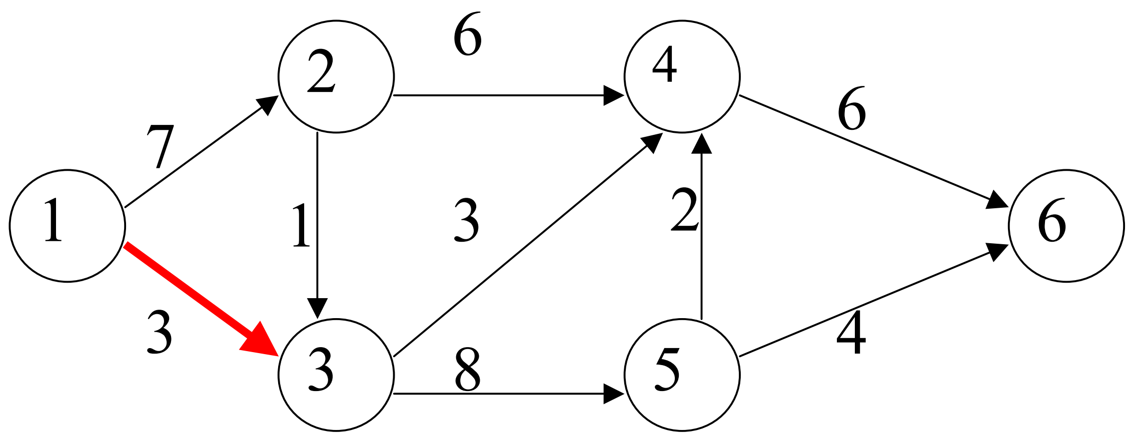
$$d(6) = \min\left\{d(6); d(1) + l(1,6)\right\} = \min\{\infty; 0 + \infty\} = \infty.$$

Шаг 3.

$$\min\{d(2), \underline{d(3)}, d(4), d(5), d(6)\} = \min\{7,\ \underline{3},\ \infty,\ \infty,\ \infty\} = 3$$

$$y = 3$$

$$d(3) = 3$$


1
2
3
4
5
6
7
3
6
1
3
8
2
6
4

Шаг 4.

$$y = E_n\,?$$

$3 \neq 6$

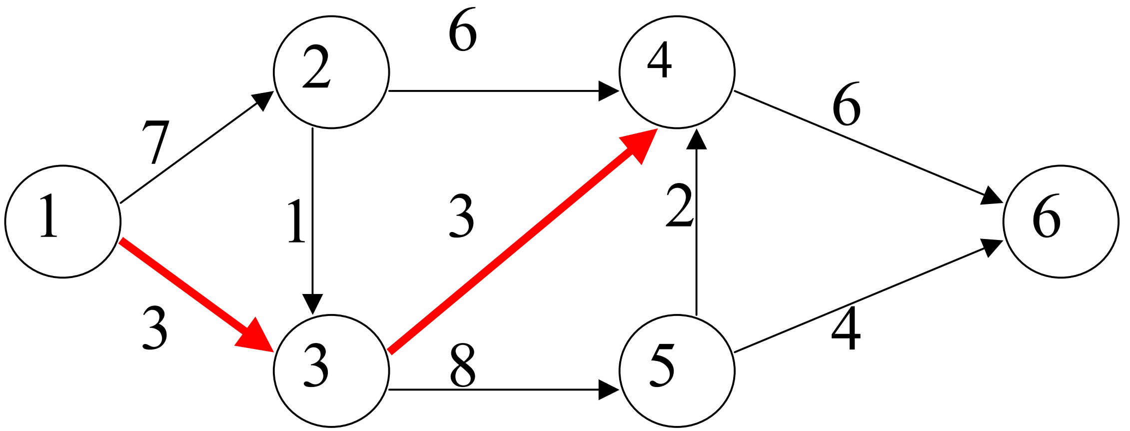
возвращаемся к шагу 2

$$d(2) = \min\{\underline{d(2)}; d(3) + l(3,2)\} = \min\{\underline{7}; 3 + \infty\} = 7,$$
$$d(4) = \min\{d(4); \underline{d(3) + l(3,4)}\} = \min\{\infty; \underline{3 + 3}\} = 6,$$
$$d(5) = \min\{d(5); \underline{d(3) + l(3,5)}\} = \min\{\infty; \underline{3 + 8}\} = 11,$$
$$d(6) = \min\{d(6); d(3) + l(3,6)\} = \min\{\infty; 3 + \infty\} = \infty.$$

$$\min\left\{d(2),\underline{d(4)},d(5),d(6)\right\}=\min\left\{7,\ \underline{6},\ 11,\ \infty\right\}=6$$

$$y=4$$

$$d(4)=6$$



1
2
3
4
5
6
7
3
6
1
3
8
2
6
4

$$y = E_n\ ?$$

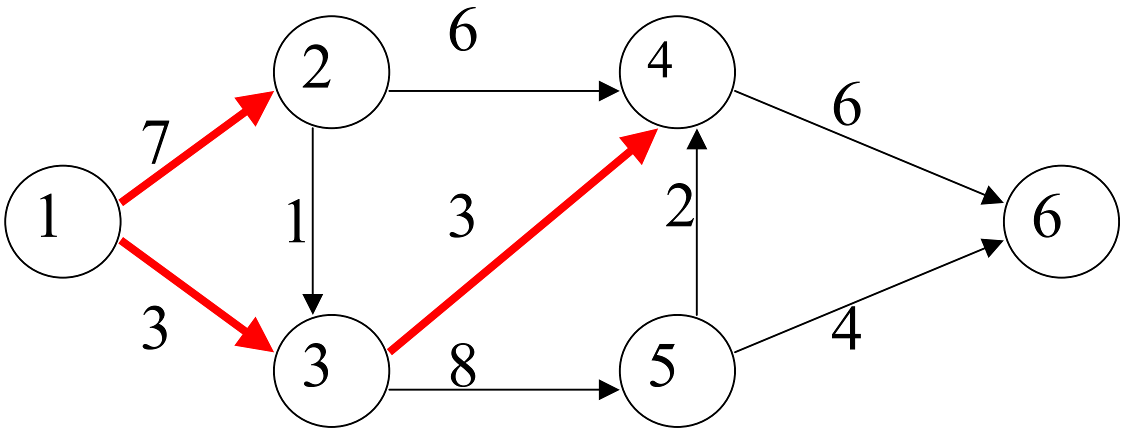
$$4 \neq 6$$

$$d(2) = \min\{\underline{d(2)}; d(4) + l(4,2)\} = \min\{\underline{7}; 6 + \infty\} = 7,$$
$$d(5) = \min\{\underline{d(5)}; d(4) + l(4,5)\} = \min\{\underline{11}; 6 + \infty\} = 11,$$
$$d(6) = \min\{d(6); \underline{d(4) + l(4,6)}\} = \min\{\infty; \underline{6 + 6}\} = 12.$$

$$\min\{\underline{d(2)}, d(5), d(6)\} = \min\{\underline{7},\ 11,\ 12\} = 7$$

$$y = 2$$

$$d(2) = 7$$


1
2
3
4
5
6
7
3
6
1
3
8
2
6
4

$$y = E_n\,?$$

2≠6

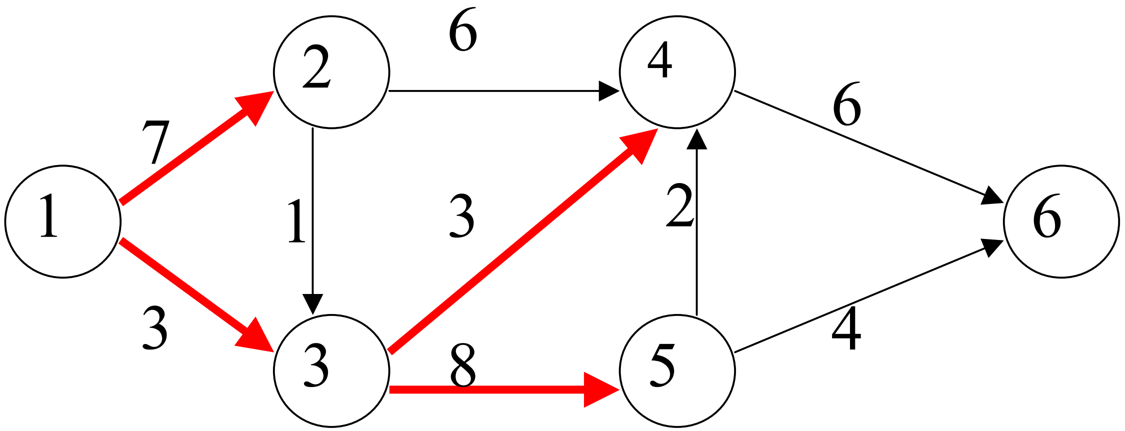
$$d(5) = \min\left\{\underline{d(5)};\, d(2) + l(2,5)\right\} = \min\left\{\underline{11};\, 7 + \infty\right\} = 11,$$

$$d(6) = \min\left\{\underline{d(6)};\, d(2) + l(2,6)\right\} = \min\left\{\underline{12};\, 7 + \infty\right\} = 12.$$

$$\min\{\underline{d(5)}, d(6)\} = \min\{\underline{11},\ 12\} = 11$$

$$y = 5$$

$$d(5) = 11$$

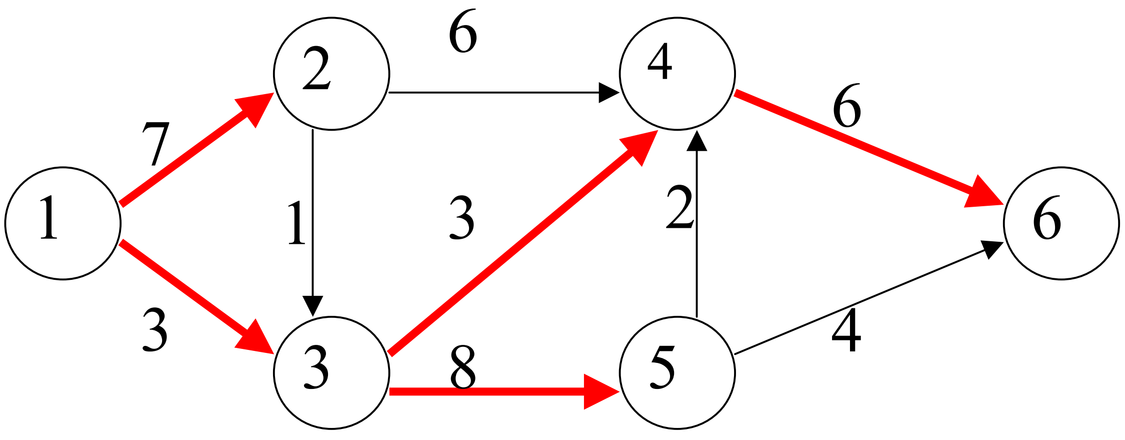


1
2
3
4
5
6
7
3
1
6
3
8
2
6
4

$$y = E_n\,?$$

$5 \neq 6$

$$d(6) = \min\{\underline{d(6)}; d(5) + l(5,6)\} = \min\{\underline{12}; 11 + 4\} = 12$$


1
2
3
4
5
6
7
3
1
6
3
8
2
6
4

Результаты расчетов

Вершина	Кратчайшее расстояние	Путь
2	7	1 – 2
3	3	1 – 3
4	6	1 – 3 – 4
5	11	1 – 3 – 5
6	12	1 – 3 – 4 – 6