Потоки в сетях

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ

Имеется сеть, которая задана множеством вершин E и множеством дуг или ребер e, содержащих некоторые пары вершин $G=(E,e)$.

Пусть вершины графа обозначены

$$E_0, E_1, E_2, \ldots, E_n$$

Каждая из них характеризуется интенсивностью $d(E_i)$, причем, если $d(E_i) > 0$, то вершина является **источником**, если $d(E_i) < 0$ – **стоком,** если $d(E_i) = 0$, то **промежуточной**.

Пропускная способность каждой дуги $\left(E_i, E_j\right)$ равна b_{ij}. Величина b_{ij} представляет собой максимальное Количество вещества, которое может пропустить сеть по дуге (i, j) в единицу времени.

Будем считать, что сеть имеет один источник и один сток. Остальные вершины – промежуточные, то есть

$$d\left(E_0\right) > 0 \qquad d\left(E_n\right) < 0$$

$$d\left(E_1\right) = d\left(E_2\right) = \ldots = d\left(E_{n-1}\right) = 0$$

Необходимо для данной сети определить, какой максимальный поток может быть направлен из вершины E_0 в вершину E_n

Пусть x_{ij} – величина потока,

перемещаемого по дуге (i, j) ,

$$i, j = \overline{0, n}, \; i \neq j$$

v – величина потока, перемещаемого

по всем возможным путям

Математическая модель

$$F = \max \; v$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_{0j} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{in},$$

$$0 \le x_{ij} \le b_{ij}, \quad i,j = \overline{0,n}, \quad i \ne j,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 0, \quad k = \overline{1,n-1}.$$

Понятие разреза

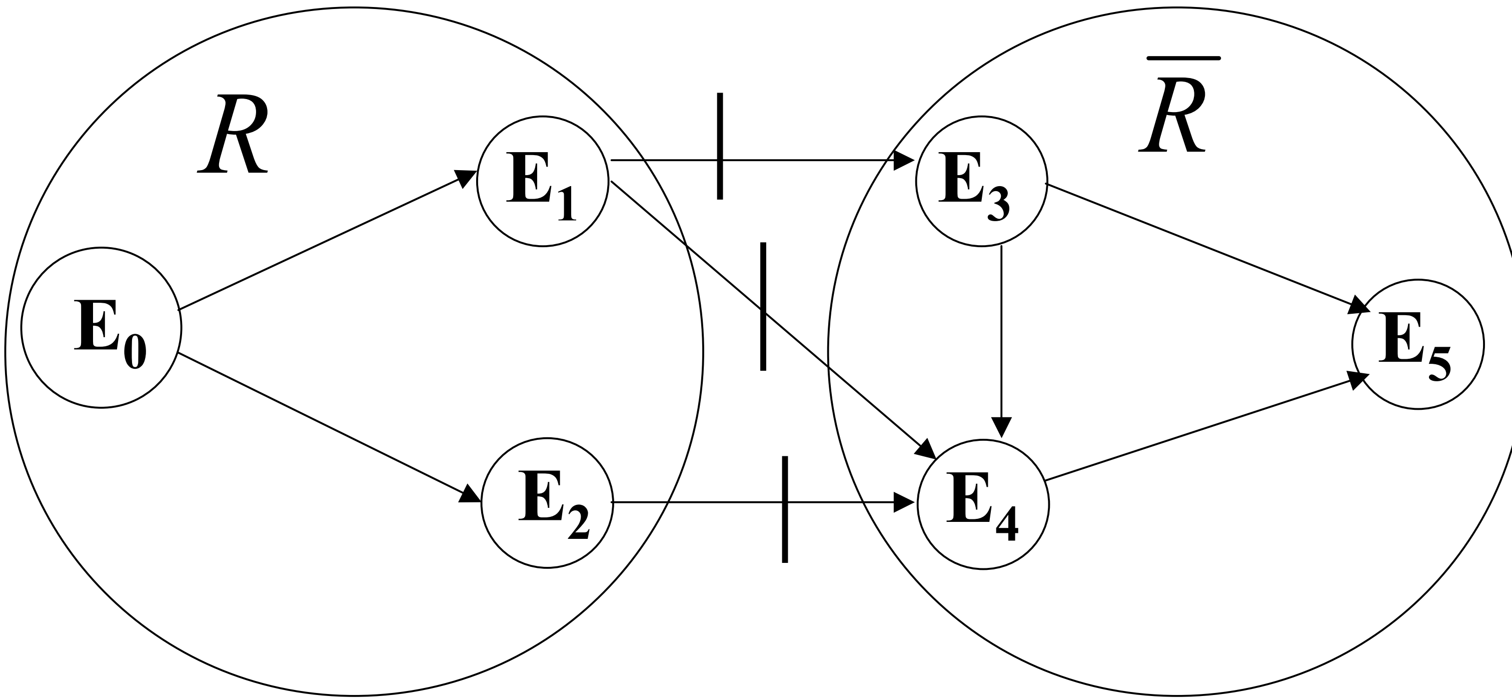
Все множество вершин сети E разобьем на два подмножества, R и $\overline{R}$, которые не пересекаются между собой: $R \cup \overline{R} = E$

Причем $E_0 \in R$, а $E_n \in \overline{R}$.

Выделим все дуги, начальные вершины которых принадлежат подмножеству R, а конечные – подмножеству $\overline{R}$.

Определение

- **Разрез** – это некоторое подмножество дуг (ребер, дуг и ребер) сети, начальные вершины которых относятся к подмножеству вершин R, содержащих источник E_0, а конечные вершины – к подмножеству вершин $\overline{R}$, содержащих сток E_n.



R
$\overline{R}$
E_0
E_1
E_2
E_3
E_4
E_5

Пропускная способность разреза

$$b(R,\overline{R}) = \sum_{\substack{E_i \in R \\ E_j \in \overline{R}}} b_{ij}$$

Теорема Форда–Фалкерсона

В любой сети максимальная величина потока из источника E_0 *в сток* E_n *равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего источник от стока .*

АЛГОРИТМ ФОРДА

Предварительный шаг

- Строим квадратную таблицу с количеством строк и столбцов, равным числу вершин. На пересечении строк и столбцов заносим пропускные способности дуг.

Если пропускная способность дуги (E_i, E_j) больше нуля, а симметричной ей – равна нулю, то в клетку (i, j) заносим b_{ij}, а в клетку (j, i) – нуль; если $b_{ij} = b_{ji} = 0$, то соответствующие клетки не заполняются.

Общий шаг

- **1-й этап**. Определяем путь из источника в сток, у которого пропускная способность больше нуля. Столбец, соответствующий вершине E_0, помечаем * (звездочкой).

Двигаясь по строке E_0, находим $b_{0j} > 0$ и помечаем соответствующие им столбцы цифрой 0 (по номеру строки). Таким образом, определяются первые дуги пути из E_0 в E_n.

Просматриваем строки с номерами, совпадающими с номерами помеченных столбцов. Отыскиваем $b_{ij} > 0$, находящиеся в непомеченных столбцах, и присваиваем им номера просматриваемых строк. И т.д.

	*	0		f	r	k
	E_0	E_1	$\cdots$	E_r	E_k	E_n
E_0		b_{01}^{-}	$\cdots$			
E_1	b_{10}^{+}					
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
E_r			$\cdots$		b_{rk}^{-}	
E_k			$\cdots$	b_{kr}^{+}		b_{kn}^{-}
E_n			$\cdots$		b_{nk}^{+}	

- **2-й этап.** Определяем пропускную способность θ найденного пути из выражения

$$\theta = \min_{(i,j)\in\mu}\{b_{ij}^{-}\}$$

- **3-й этап.** Определяем остаточные пропускные способности дуг найденного пути и симметричных к ним. Для этого выполняем действия

$$\underset{(i,j)\in\mu}{b'_{ij} = b^{-}_{ij} - \theta}; \qquad \underset{(i,j)\in\mu}{b'_{ji} = b^{+}_{ji} + \theta}.$$

Заключительный шаг

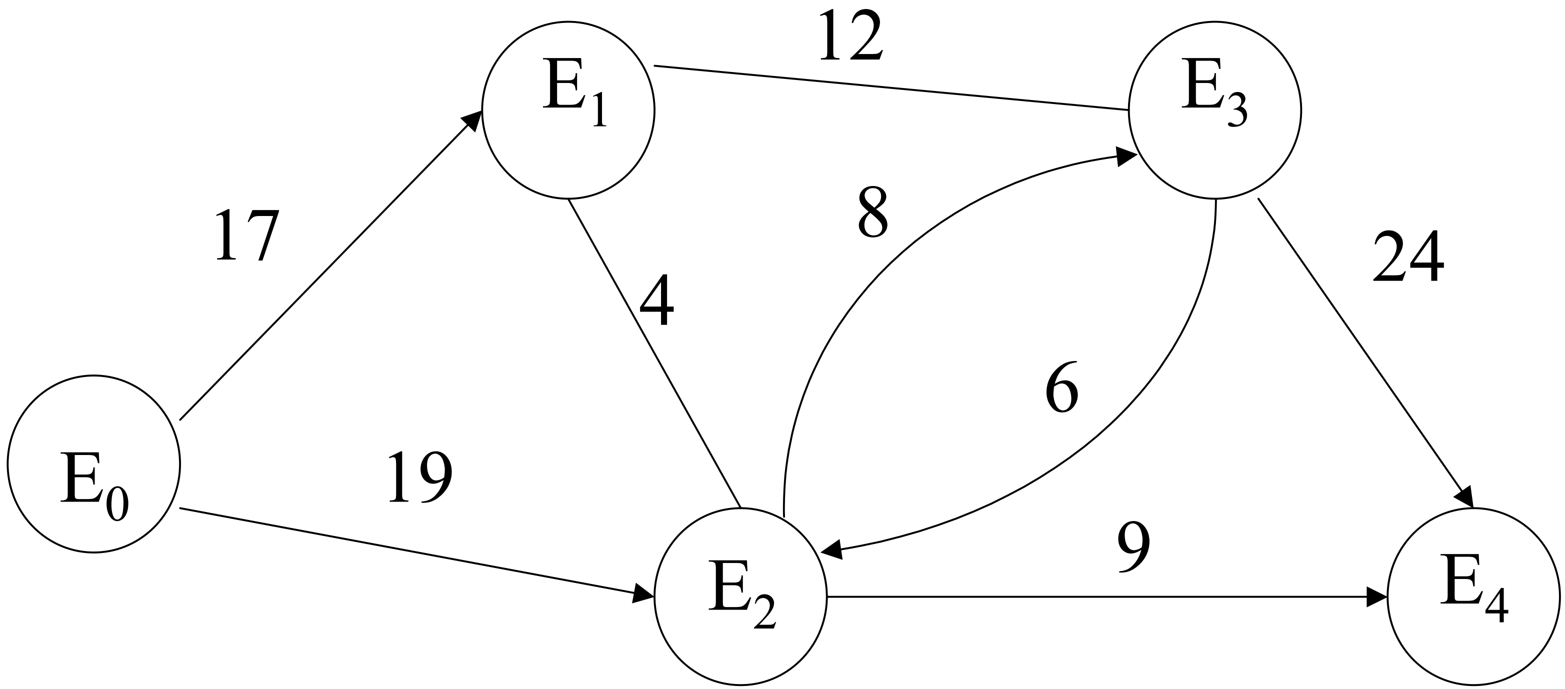
Находим разности между соответствующими элементами исходной таблицы и полученной на последнем шаге. Получаем таблицу, в которой положительные элементы равны искомым x_{ij} – величинам потоков, движущимся по дугам $\left(E_i, E_j\right)$.

Максимальный поток

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_{0j} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{in}$$

Пример

Для приведенной сети найти величину максимального потока из E_0 в E_n. Пропускные способности дуг и ребер заданы.



E0
E1
E2
E3
E4
17
19
4
12
8
6
24
9

Решение

Предварительный шаг

Матрица пропускных способностей дуг сети

Вершины	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		17	19		
E_1	0		4	12	
E_2	0	4		8	9
E_3		12	6		24
E_4			0	0	

Первый шаг

Этап 1

Определяем путь из E_0 в E_n с пропускной способностью больше нуля

	Пометки				
	*	0	0	1	2
Вершины	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		17	19		
E_1	0		4	12	
E_2	0	4		8	9
E_3		12	6		24
E_4			0	0	

Вершины	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		17	19^{-}		
E_1	0		4	12	
E_2	0^{+}	4		8	9^{-}
E_3		12	6		24
E_4			0^{+}	0	

$$\mu_1 = (E_0 - E_2 - E_4)$$

Этап 2

Определяем пропускную способность найденного пути

$$\theta_1 = \mathbf{min}\left\{b_{02}^-, b_{24}^-\right\} = \mathbf{min}\left\{19, 9\right\} = 9$$

Этап 3

Корректируем пропускные способности

Вершины	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		17	10		
E_1	0		4	12	
E_2	9	4		8	0
E_3		12	6		24
E_4			9	0	

Второй шаг

Этап 1

Находим второй путь

	*	0	0	1	3
Вершины	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		17^-	10		
E_1	0^+		4	12^-	
E_2	9	4		8	0
E_3		12^+	6		24^-
E_4			9	0^+	

$$\mu_2 = \left(E_0 - E_1 - E_3 - E_4\right)$$

Этап 2

Находим пропускную способность второго пути

$$\theta_2 = \min\left\{b_{01}^{-}, b_{13}^{-}, b_{34}^{-}\right\} = \min\{17, 12, 24\} = 12$$

Этап 3

Изменяем пропускные способности дуг

Вершины	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		5	10		
E_1	12		4	0	
E_2	9	4		8	0
E_3		24	6		12
E_4			9	12	

Третий шаг

Этап 1

	*	0	0	2	3
Вершины	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		5	10^-		
E_1	12		4	0	
E_2	9^+	4		8^-	0
E_3		24	6^+		12^-
E_4			9	12^+	

Этап 2

$$\theta_3 = \mathbf{min}\left\{b_{02}^{-}, b_{23}^{-}, b_{34}^{-}\right\} = \mathbf{min}\{10, 8, 12\} = 8$$

Этап 3

Вершины	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		5	2		
E_1	12		4	0	
E_2	17	4		0	0
E_3		24	14		4
E_4			9	20	

Четвертый шаг

Этап 1

	*	0	0		
Вершины	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		5	2		
E_1	12		4	0	
E_2	17	4		0	0
E_3		24	14		4
E_4			9	20	

Заключительный шаг

Вершины	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
E_0		12	17		
E_1	–12		0	12	
E_2	–17	0		8	9
E_3		–12	–8		20
E_4			–9	–20	

Величины дуговых потоков

$$x_{01} = 12,\ x_{02} = 17,\ x_{13} = 12,\ x_{23} = 8,\ x_{24} = 9,\ x_{34} = 20$$

Величина максимального потока

$$v = 12 + 17 = 9 + 20 = 29$$

$$v = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 9 + 12 + 8 = 29$$

$$b(R, \overline{R}) = b_{13} + b_{23} + b_{24} = 12 + 8 + 9 = 29$$

Сеть, соответствующая полученному результату