

ТЕМА 6

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Полностью целочисленная задача линейного программирования

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2,$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 12,$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 - \text{целые.}$$

Частично-целочисленная задача

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2,$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 12,$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

$$x_1 - \text{целая}.$$

Задача с булевыми переменными

$$\max Z = x_1 - x_2,$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 10,$$

$$4x_1 - 2x_2 \leq 2,$$

$$x_1, x_2 = 0 \text{ или } 1.$$

Определение

- Задача ЛП, полученная путем отмены условия целочисленности или ограничения типа «0 или 1», называется линейно-ослабленной задачей целочисленного программирования

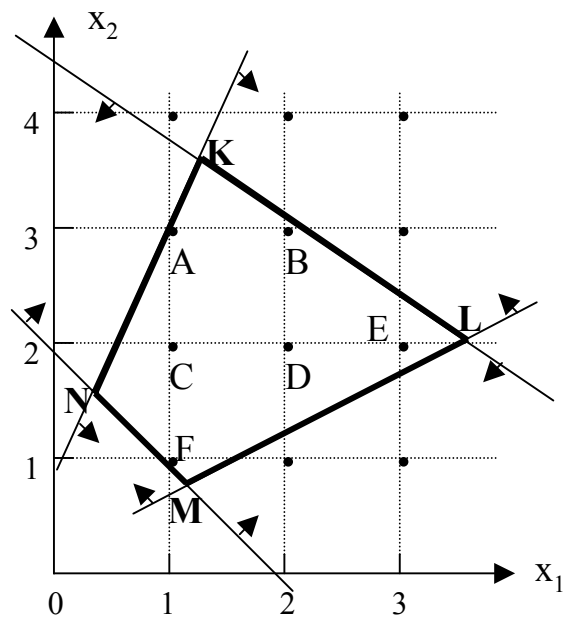
Соотношения между ЦФ задач ЛП и ЦП

Задача на максимум ЦФ

$$Z_{\text{лп.}}^{\text{опт.}} \geq Z_{\text{цп.}}^{\text{опт.}}$$

Задача на минимум ЦФ

$$Z_{\text{лп.}}^{\text{опт.}} \leq Z_{\text{цп.}}^{\text{опт.}}$$



Определение

- Область допустимых значений задачи целочисленного программирования – это множество целочисленных точек, удовлетворяющих ограничениям задачи и ограничениям на знак

Подходы к решению задач целочисленного программирования

- Путем перебора всех целочисленных точек ОДЗ и расчета для каждой из них значения целевой функции с последующим выбором наилучшего.

- Путем округления полученных нецелочисленных решений до целых (в случае, когда искомая единица составляет незначительную часть от общего значения переменной).
- Путем построения дополнительных ограничений в рамках имеющейся ОДЗ с целью отсеечения нецелочисленных значений переменных.

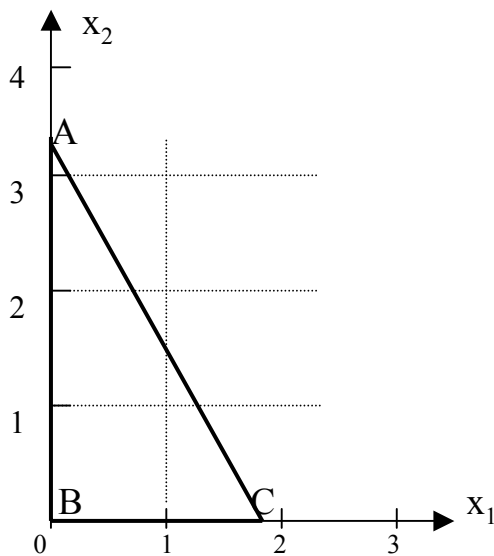
Иллюстрация ошибочности приема округления

$$\max Z = 42x_1 + 22x_2,$$

$$21x_1 + 12x_2 \leq 39,$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 - \text{целые.}$$



ОДЗ: $S = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1)\}$

Оптимальное решение задачи ЛП

$$Z = 78, x_1 = 1\frac{6}{7}, x_2 = 0$$

Округление

$$Z = 42, x_1 = 1, x_2 = 0$$

Оптимальное целочисленное решение

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad Z = 66$$

- **ФОРМУЛИРОВКИ НЕКОТОРЫХ
ЗАДАЧ ЦП**

- 1. ПРОБЛЕМА
КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЙ**

- Компания рассматривает возможность инвестирования средств по четырем направлениям: инвестиции №1 принесут чистый доход в размере 16000 грн., инвестиции №2 – 22000 грн., инвестиции №3 – 12000 грн. и инвестиции №4 – 8000 грн.

- *Каждый из четырех видов инвестиций требует определенного вложения средств в настоящее время: №1 – 5000 грн., №2 – 7000 грн., №3 – 4000 грн., №4 – 3000 грн.*

- *В распоряжении компании имеется 14000 грн. Сформулируйте модель целочисленного программирования, которая бы позволила максимизировать чистый доход, полученный от инвестиций.*

Решение

- Переменные

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если инвестиции } j \text{ осуществлены} \\ 0, & \text{если инвестиции } j \text{ не осуществлены} \end{cases}$$

$$(j = \overline{1,4})$$

- Модель

$$\begin{aligned}\max Z &= 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4, \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 14, \\ x_j &= 0 \text{ или } 1, \quad j = \overline{1,4}.\end{aligned}$$

- Оптимальное решение

$$x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, Z = 42$$

- При частичном вложении средств

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, Z = 44$$

Задача о рюкзаке

- *Из набора предметов, которые могут понадобиться в походе, необходимо подобрать такое их сочетание, которое бы принесло максимальную пользу.
Ограничивающим условием является либо вес помещающихся в рюкзаке вещей, либо объем.*

Модификации задачи об инвестициях

- Компания может инвестировать средства не более чем по двум направлениям;
- Если компания вложит средства в инвестиции №2, то она должна также инвестировать средства и в инвестиции №1;
- Если компания вкладывает средства в инвестиции №2, то она не может инвестировать средства в инвестиции №4.

1. Ограничения типа
«не более k альтернатив из n »

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$$

2 и 3. Ограничения типа «зависимых условий»

- если $x_2 = 1$, то переменная x_1 тоже должна быть равна 1

$$x_2 \leq x_1$$

ИЛИ

$$x_2 - x_1 \leq 0$$

- если $x_2 = 1$, то переменная x_4 должна быть равна 0

$$x_2 + x_4 \leq 1$$

2. ПРОБЛЕМЫ С ФИКСИРОВАННЫМИ РАСХОДАМИ

- *Компания «Сафари» может производить три типа одежды: рубашки, шорты и брюки. Для производства каждого вида одежды необходимо оборудование различных типов.*

- Данное оборудование может быть арендовано по следующим ценам: для производства рубашек – 200 грн. в неделю, для производства шортов – 150 грн., для производства брюк – 100 грн. Затраты матери и рабочей силы на каждый из видов продукции приведены в таблице

<i>Продукция</i>	<i>Труд (часы)</i>	<i>Материя (м²)</i>
<i>Рубашка</i>	3	4
<i>Шорты</i>	2	3
<i>Брюки</i>	6	4

- *В распоряжении компании еженедельно имеется 150 часов рабочего времени и 160 м² материи. Переменные затраты и цена продажи на единицу продукции каждого вида приведены в таблице*

<i>Продукция</i>	<i>Цена продажи, грн.</i>	<i>Переменные затраты, грн.</i>
<i>Рубашка</i>	12	6
<i>Шорты</i>	8	4
<i>Брюки</i>	15	8

- *Сформулируйте модель
целочисленного программирования
для максимизации недельной
прибыли компании «Сафари».*

- Переменные

x_1 — количество рубашек, производимых
еженедельно;

x_2 — количество шортов, производимых
еженедельно;

x_3 — количество пар брюк, производимых
еженедельно.

$$y_1 = \begin{cases} 1, & \text{если выпускается одна или больше рубашек,} \\ 0, & \text{если не выпускается,} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1, & \text{если хотя бы одна единица шортов выпускается,} \\ 0, & \text{если не выпускается,} \end{cases}$$

$$y_3 = \begin{cases} 1, & \text{если выпускается одна пара брюк или больше,} \\ 0, & \text{если не выпускается.} \end{cases}$$

- Модель

$$\begin{aligned}\max Z &= 12x_1 + 8x_2 + 15x_3 - 6x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3 = \\ &= 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3.\end{aligned}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150$$

$$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160$$

$$x_1 \leq M_1 y_1,$$

$$x_2 \leq M_2 y_2,$$

$$x_3 \leq M_3 y_3.$$

$M_i?$

$$M_1 = \min\{150/3; 160/4\} = \min\{50; 40\} = 40$$

$$M_2 = \min\{150/2; 160/3\} = \min\{75; 53.3\} = 53$$

$$M_3 = \min\{150/6; 160/4\} = \min\{25; 40\} = 25$$

$$\max Z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3,$$

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150,$$

$$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160,$$

$$x_1 \leq 40y_1,$$

$$x_2 \leq 53y_2,$$

$$x_3 \leq 25y_3,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

$$x_1, x_2, x_3 - \text{целые},$$

$$y_1, y_2, y_3 - 0 \text{ или } 1.$$

Ограничение на фиксированные затраты

$$f_j(x_j) = \begin{cases} c_j x_j + k_j, & \text{если } x_j > 0 \\ 0, & \text{если } x_j = 0, \end{cases}$$

3. ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕКРЫТИЯ НАБОРА ЭЛЕМЕНТОВ

- *В некотором районе имеется 6 городов. Необходимо определить, где построить пожарные станции. В районе должно быть построено минимальное количество этих станций.*

- *При этом необходимо учитывать условие, чтобы, по крайней мере, одна пожарная станция находилась в 15 минутах езды от каждого из городов. Время езды между городами района приведено в таблице*

Из горо -да	В город										
	1		2		3		4		5		6
1	0		10		20		30		30		20
2	10		0		25		35		20		10
3	20		25		0		15		30		20
4	30		35		15		0		15		25
5	30		20		30		15		0		14
6	20		10		20		25		14		0

- *Требуется сформулировать модель целочисленного программирования для определения числа пожарных станций, которые следует построить в районе, и мест расположения этих станций.*

Решение

- Переменные

x_i определяют строительство

$$(x_i = 1)$$

или нестроительство

$$(x_i = 0)$$

пожарной станции в i -м городе

Город отправления	Город назначения
1	1,2
2	1,2,6
3	3,4
4	3,4,5
5	4,5,6,
6	2,5,6

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$x_1 + x_2 \geq 1 \quad \text{хотя бы одна станция находится в 15 минутах езды от городов 1 и 2}$$

$$x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 \quad x_3 + x_4 \geq 1$$

$$x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \quad x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$$

$$x_2 + x_5 + x_6 \geq 1 \quad x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1,6}$$

- Оптимальное решение

$$Z = 2, x_2 = x_4 = 1, x_1 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$$