ЗАДАЧИ С АЛЬТЕРНАТИВНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

- **ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА «ИЛИ-ИЛИ»**

Из пары ограничений типа

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0,$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0,$$

по крайней мере, одно должно удовлетворяться

Реализация условия

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le My,$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le M(1 - y),$$
$$y = 0 \vee 1$$

M – достаточно большое число

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le M,$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le M$$

Проверка

$$y = 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0 \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le M \end{array}$$

$$y = 1 \Longrightarrow \begin{array}{l} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le M \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0 \end{array}$$

Пример

Компания рассматривает возможность производства автомобилей трех типов: компактных автомобилей, автомобилей среднего размера и больших автомобилей. Необходимые для их производства ресурсы и приносимая прибыль приведены в таблице

Ресурс	Компакт-ный автомо-биль	Автомо-биль среднего размера	Автомо-биль большого размера
Сталь Труд Прибыль	1.5 т 30 часов 2000 грн.	3 т 25 часов 3000 грн.	5 т 40 часов 4000 грн.

В распоряжении компании имеется 6000 т стали и 60000 часов рабочего времени. Для того чтобы производство любого вида автомобиля было экономически оправданным, необходимо выпускать не менее 1000 автомобилей этого типа.

Требуется сформулировать модель целочисленного программирования для максимизации прибыли компании

Переменные

x_1 – количество производимых компактных автомобилей;

x_2 – количество производимых автомобилей среднего размера;

x_3 – количество производимых автомобилей большого размера.

Прибыль

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$x_i \le 0 \ \text{ или } \ x_i \ge 1000$$

Для x_1

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1000 - x_1 . \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \le M_1 y_1 \\ 1000 - x_1 \le M_1\left(1 - y_1\right) \end{cases}$$

$$y_1 = 0 \vee 1$$

Максимальный выпуск компактных автомобилей

$$\frac{60000}{30} = 2000$$

$$M_1 = 2000$$

Для x_2

$$\begin{cases} x_2 \le M_2 y_2 \\ 1000 - x_2 \le M_2 (1 - y_2) \end{cases}$$

$$y_2 = 0 \vee 1$$

$$M_2 = 2000$$

Для x_3

$$\begin{cases} x_3 \le M_3 y_3 \\ 1000 - x_3 \le M_3 \left(1 - y_3\right) \end{cases}$$

$$y_3 = 0 \vee 1$$

$$M_3 = 1200$$

Ограничение по использованию стали

$$1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 6000$$

Ограничение по использованию рабочего времени

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \leq 60000$$

Модель в развернутом виде

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$x_1 \le 2000 y_1$$

$$1000 - x_1 \le 2000(1 - y_1)$$

$$x_2 \le 2000 y_2$$

$$1000 - x_2 \le 2000(1 - y_2)$$

$$x_3 \leq 1200 y_3$$

$$1000 - x_3 \leq 1200(1 - y_3)$$

$$1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 6000$$

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \leq 60000$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$y_1, y_2, y_3 = 0 \vee 1$$

Оптимальное решение задачи

$$Z = 6000,\ x_2 = 2000,\ y_2 = 1,\ y_1 = y_3 = x_1 = x_3 = 0$$

Без ограничения на выпуск автомобилей

$$Z = 6285 \quad x_1 = 570 \quad x_2 = 1715 \quad x_3 = 0$$

- **ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА «ЕСЛИ, ТО»**

Если ограничение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$$

выполняется, то ограничение

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$$

также выполняется

Реализация

$$
\left.
\begin{aligned}
& -g(x_1, x_2, \dots, x_n) \le My \\
& f(x_1, x_2, \dots, x_n) \le M(1 - y) \\
& y = 0 \vee 1
\end{aligned}
\right. \qquad (*)
$$

M - достаточно большое число

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \le M,$$

$$-g\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \le M.$$

Рассмотрим два случая:

1) когда $f > 0$ выполняется;

2) когда $f > 0$ не выполняется.

$f > 0$ выполняется

Условия (*) выполняются, когда $y = 0$

Тогда $-g \le 0$ или $g \ge 0$, что и требовалось

$f > 0$ не выполняется

Тогда $y = 0 \vee 1$

При $y = 1$ условие $-g \leq M$ автоматически выполняется. Так, если $f > 0$ не выполняется, то значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – не ограничены, и возможны оба случая: $g < 0$ или $g \geq 0$

• **ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ УСЛОВИЯ: «ДОЛЖНЫ ВЫПОЛНЯТЬСЯ *К* ИЗ *N* ОГРАНИЧЕНИЙ»**

Пусть имеется ***N*** ограничений

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_1,$$

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_2,$$

$$\vdots$$

$$f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_N.$$

Условие осуществления *K* ограничений из *N*

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_1 + My_1,\\
&f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_2 + My_2,\\
&\vdots\\
&f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_N + My_N,\\
&\sum_{i=1}^{N} y_i = N - K,\\
&y_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{1, N}
\end{aligned}
$$

M – большое положительное число

Другая форма записи

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_1 y_1 + M(1 - y_1),$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_2 y_2 + M(1 - y_2),$$
$$\vdots$$
$$f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_N y_N + M(1 - y_N),$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = K,$$

$$y_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{1, N}.$$

- ФУНКЦИИ С *N* ВОЗМОЖНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

$$f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \leq d_1 \quad \text{или} \quad d_2, \ldots, \text{или} \quad d_N$$

Реализация

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{N} d_i y_i,$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1,$$

$$y_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{1, N}.$$

Пример

Имеется условие по мощности предприятия

$$4x_1 + x_2 \leq P$$

Общая мощность составляет 100 единиц.

В результате решения задачи выяснилось, что ее загрузка не превышает 80%. Оставшиеся 20% могут быть использованы для выпуска дополнительной продукции.

Предприятие рассматривает возможность утилизации оставшихся 20 единиц мощности по трем вариантам:

- использовать их только на 40%,
- использовать на 80%,
- использовать полностью – на 100%.

Варианты использования недогруженной мощности:

$$d_1 = 8,\ d_2 = 16,\ d_3 = 20$$

Реализация

$$4x_1 + x_2 = 8y_1 + 16y_2 + 20y_3,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1,$$

$$y_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{1,3}.$$