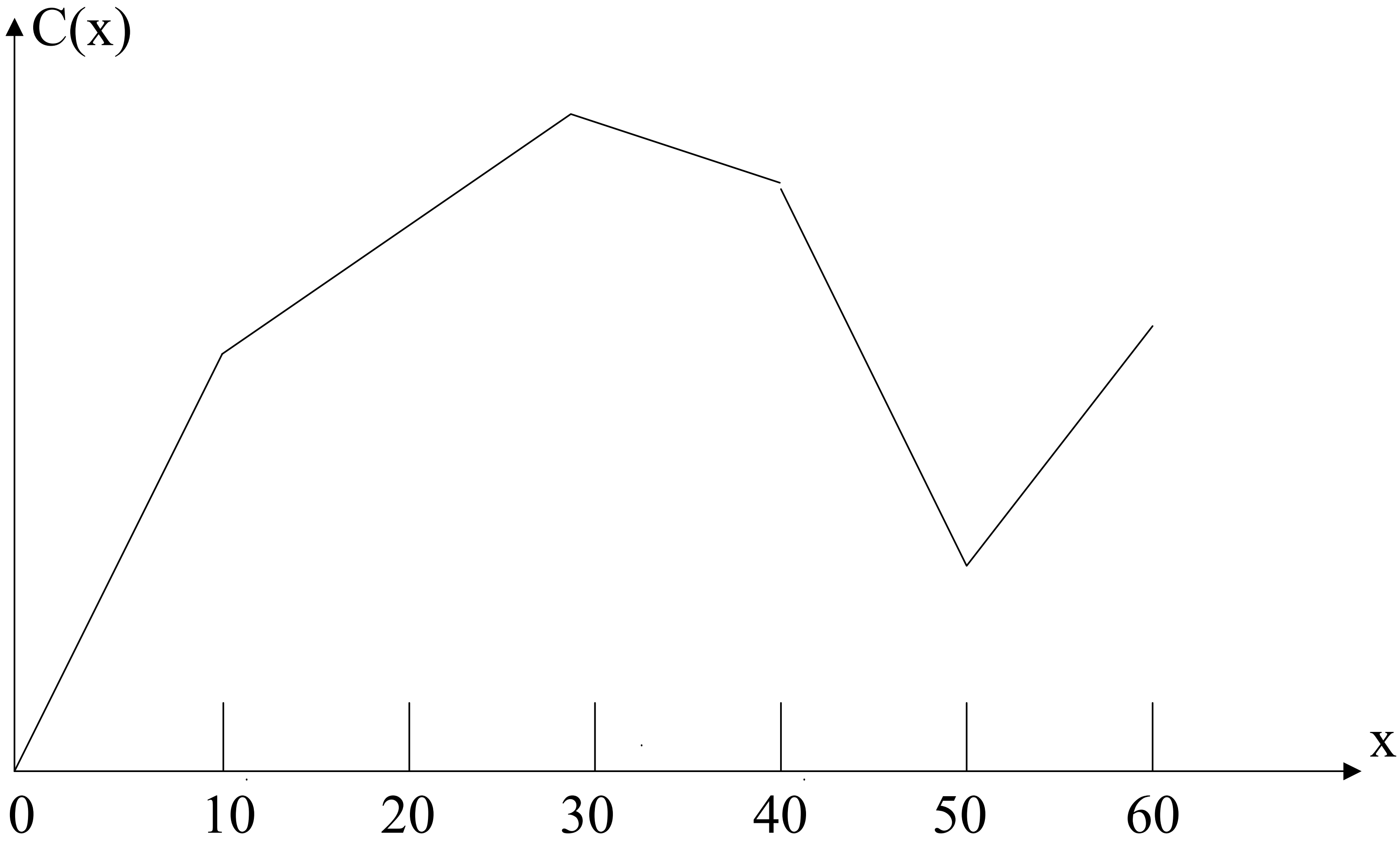
ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

- **кусочно-линейная функция** – это такая функция, которая состоит из нескольких прямолинейных отрезков



Пример кусочно-линейной функции

Иллюстрация

- Для производства муки зерно покупается у фермера. В зависимости от объема покупки зерна можно получить скидку в цене. Так, первые 50 т зерна стоят 40 грн./т, следующие 50 т – 35 грн./т и, наконец, еще 50 т – 25 грн./т. Всего может быть куплено не более 150 т зерна

Условные обозначения

x – количество покупаемого зерна (т)

$C(x)$ – стоимость покупки x тонн зерна (грн.)

Затраты на приобретение зерна

$x \le 0 \quad \Longrightarrow \quad C(x) = 0$

$0 \le x \le 50 \quad \Longrightarrow \quad C(x) = 40x$

$50 \le x \le 100 \quad \Longrightarrow \quad C(x) =$ стоимости покупки первых 50 т по 40 грн. + стоимость покупки следующих

$x - 50$ т по 35 грн. за тонну

$$C(x) = C(50) + 35(x - 50) =$$
$$= 40 \times 50 + 35(x - 50) = 35x + 250$$

$100 \leq x \leq 150 \Longrightarrow C(x) =$ стоимости покупки первых 100 т + стоимость покупки следующих $x - 100$ т по 25 грн. за тонну

$$C(x) = C(100) + 25(x - 100) =$$
$$= 25x + 1250$$

$f(x)$ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – точки излома

k $\left(k = \overline{1, n-1}\right)$ x

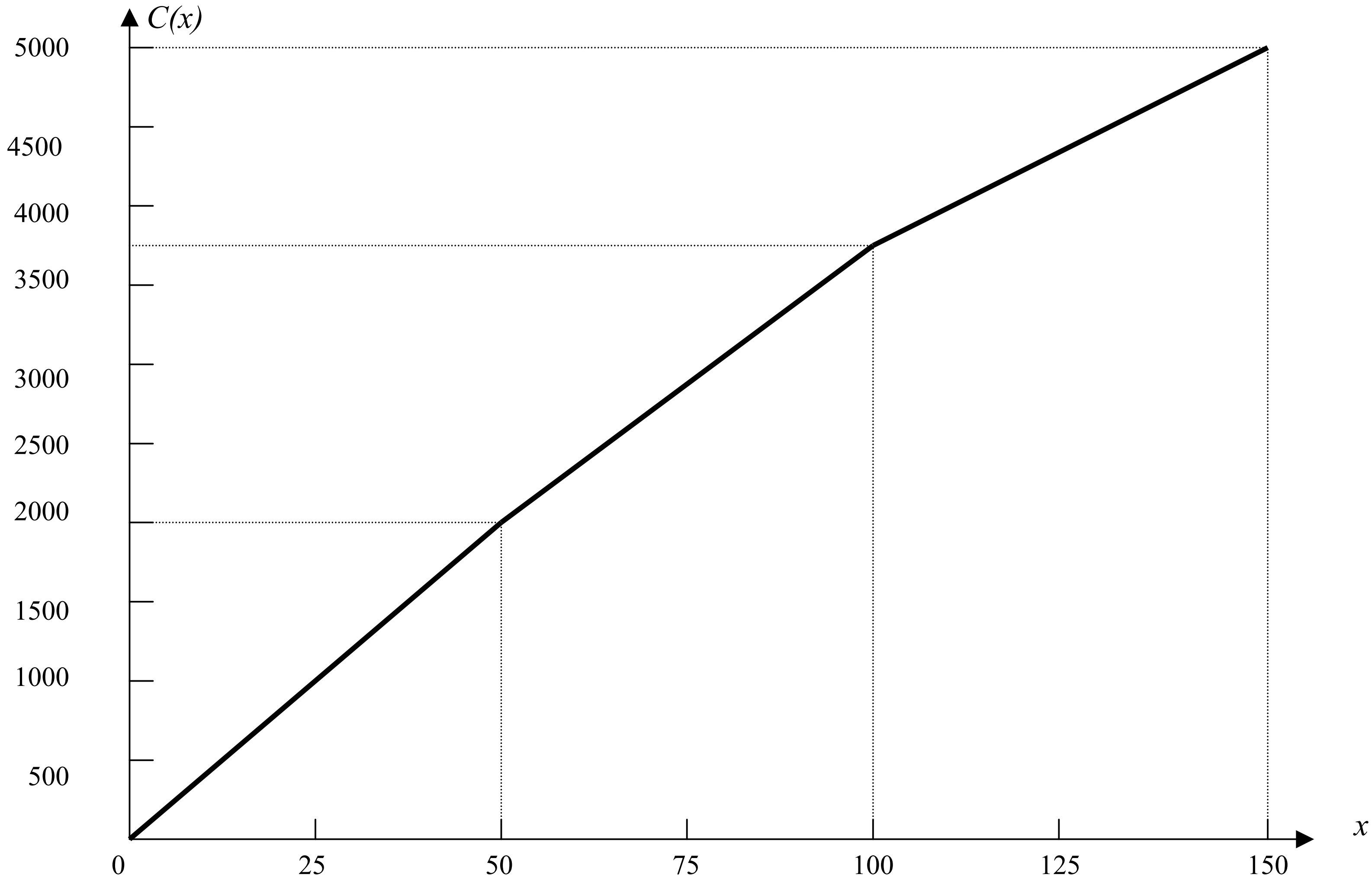
$\left[b_k, b_{k+1}\right] \Rightarrow b_k \le x \le b_{k+1}$

Z_k $\left(0 \le \mathrm{Z}_k \le 1\right)$

$$\boxed{x = \mathrm{Z}_k b_k + (1 - \mathrm{Z}_k) b_{k+1}}$$

Z_k – долевая переменная, соответствующая

k -й точке излома



Графическая иллюстрация изменения уровня затрат на покупку зерна

Для $b_k \le x \le b_{k+1}$

$$\boxed{f(x) = Z_k f(b_k) + (1 - Z_k) f(b_{k+1})}$$

Точки излома $b_1 = 0$ $b_2 = 50$ $b_3 = 100$

$b_4 = 150$

$x = 70$

$$b_2 = 50 \le 70 \le 100 = b_3$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = f(70) = \frac{3}{5} f(50) + \frac{2}{5} f(100) = \frac{3}{5} \cdot 2000 + \frac{2}{5} \cdot 3750 = 2700$$

Метод представления кусочно-линейной функции через линейные ограничения и переменные типа 0 или 1

- **Шаг 1.**

  Где-либо, когда кусочно-линейная функция появляется в оптимизационной задаче, заменяем ее на выражение

$$Z_1 f\left(b_1\right) + Z_2 f\left(b_2\right) + \ldots + Z_n f\left(b_n\right)$$

$$f(x) = Z_1 f\left(b_1\right) + Z_2 f\left(b_2\right) + \ldots + Z_n f\left(b_n\right)$$

- **Шаг 2.**

В задачу добавляем ограничения

$$Z_1 \le y_1$$

$$Z_2 \le y_1 + y_2$$

$$Z_3 \le y_2 + y_3$$

$$\vdots$$

$$Z_{n-1} \le y_{n-2} + y_{n-1}$$

$$Z_n \le y_{n-1}$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} = 1$$

$$Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 1$$

$$x = Z_1 b_1 + Z_2 b_2 + \ldots + Z_n b_n$$

$$y_l = 0 \text{ или } 1, \quad l = \overline{1, n-1},$$

$$Z_k \ge 0, \qquad k = \overline{1, n}.$$

y_l – интервальная (булева) переменная

$\left(l = \overline{1, n-1}\right)$;

Z_k – переменная (непрерывная на отрезке от 0 до 1), соответствующая *k*-й точке излома $\left(k = \overline{1, n}\right)$.

Пример

- Мукомольная компания производит два сорта муки (№1 и №2), используя два сорта зерна (А и Б). Каждая тонна муки сорта №1 должна содержать, по меньшей мере, 50 % зерна А, а каждая тонна муки сорта №2 должна содержать, по меньшей мере, 60 % зерна А. Тонна муки №1 может быть продана по 20 грн., а тонна муки №2 – по 25 грн.

- В настоящее время имеется 50 т зерна А и 100 т зерна Б, которые могут быть использованы для производства муки. Дополнительно может быть куплено до 150 т зерна А по следующим ценам: первые 50 т по 40 грн. за тонну, следующие 50 т – по 35 грн. за тонну и, наконец, последние 50 т – по 25 грн. за тонну.

- Сформулируйте модель целочисленного программирования, которая позволит максимизировать прибыль мукомольной компании (доходы – стоимость покупки зерна).

Обозначения

i – сорт используемого зерна $(i = 1,2)$;

j – сорт получаемой муки $(j = 1,2)$;

x – количество купленного зерна сорта *A*;

x_{ij} – количество зерна i, использованное при производстве муки j $(i, j = 1,2)$

Целевая функция – максимум прибыли:

$$\max Z = 20\left(x_{11} + x_{21}\right) + 25\left(x_{12} + x_{22}\right) - C(x)$$

где

$$C(x) = \begin{cases} 40x & (0 \le x \le 50) \\ 35x + 250 & (50 \le x \le 100) \\ 25x + 1250 & (100 \le x \le 150) \end{cases}$$

Ограничение 1 Компания может использовать не более $x + 50$ тонн зерна сорта *А*;

Ограничение 2 Компания может использовать не более 100 тонн зерна сорта *Б*;

Ограничение 3 При производстве муки сорта №1, зерно сорта *А* должно составлять не менее 50%;

Ограничение 4 При производстве муки сорта №2, зерно сорта *А* должно составлять не менее 60%.

$$x_{11} + x_{12} \le x + 50 \qquad x_{21} + x_{22} \le 100$$

$$\frac{x_{11}}{x_{11} + x_{21}} \ge 0.5 \qquad \frac{x_{12}}{x_{12} + x_{22}} \ge 0.6$$

Ограничения на знак переменных

$$x_{ij} \ge 0, \quad i, j = 1,2, \quad x \ge 0$$

Шаг 1

Заменяем $C(x)$ на

$$C(x) = Z_1 C(0) + Z_2 C(50) + Z_3 C(100) + Z_4 C(150)$$

Шаг 2

Добавляем ограничения

$$x = 0Z_1 + 50Z_2 + 100Z_3 + 150Z_4$$

$$Z_1 \le y_1$$

$$Z_2 \le y_1 + y_2$$

$$Z_3 \le y_2 + y_3$$

$$Z_4 \le y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 1$$

$$y_l = 0 \text{ или } 1, \quad l = \overline{1,3}$$

$$Z_k \ge 0, \qquad k = \overline{1,4}$$

$$y_l = 0 \vee 1$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$y_2 = 1$$

$$y_1 = y_3 = 0$$

$$Z_1 \le 0,\ Z_2 \le 1,\ Z_3 \le 1,\ Z_4 \le 0$$

$$Z_1 = Z_4 = 0$$

Пусть $x = 70$ $b_2 = 50 \le 70 \le 100 = b_3$

$$y_1, y_2, y_3 - ?$$

Если $y_1 = 1$, то $y_2 = y_3 = 0$ и $Z_3 = Z_4 = 0$

Отсюда $70 = x = 50Z_2$

что невозможно при $Z_2 \le 1$ Т.о. $y_1 \ne 1$

Аналогично $y_3 \neq 1$

При $y_2 = 1$ $Z_1 = Z_4 = 0$ и

$$Z_2 \leq 1,\ Z_3 \leq 1$$

тогда

$$70 = x = 50Z_2 + 100Z_3$$

Учитывая $\quad Z_2 + Z_3 = 1$,

получаем $\quad Z_2 = \dfrac{3}{5}$, $\quad Z_3 = \dfrac{2}{5}$

$$Z = 20x_{11} + 20x_{21} + 25x_{12} + 25x_{22} - \frac{3C(50)}{5} - \frac{2C(100)}{5}$$

$$C(70) = \frac{3C(50)}{5} + \frac{2C(100)}{5}$$

Оптимальное решение

$$Z = 2500,\ x = 100,\ x_{12} = 150,\ x_{22} = 100,\ y_2 = Z_3 = 1$$