Методы решения задач ЦЛП

МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

- **Шаг 1**

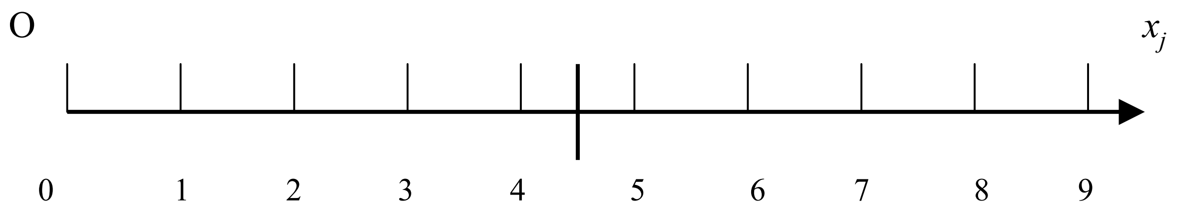
  Решаем линейно ослабленную задачу целочисленного линейного программирования симплекс методом. Если полученное решение является целочисленным, то процесс решения задачи окончен. Если хотя бы одна переменная в оптимальном решении является нецелочисленной, то переходим к шагу 2.

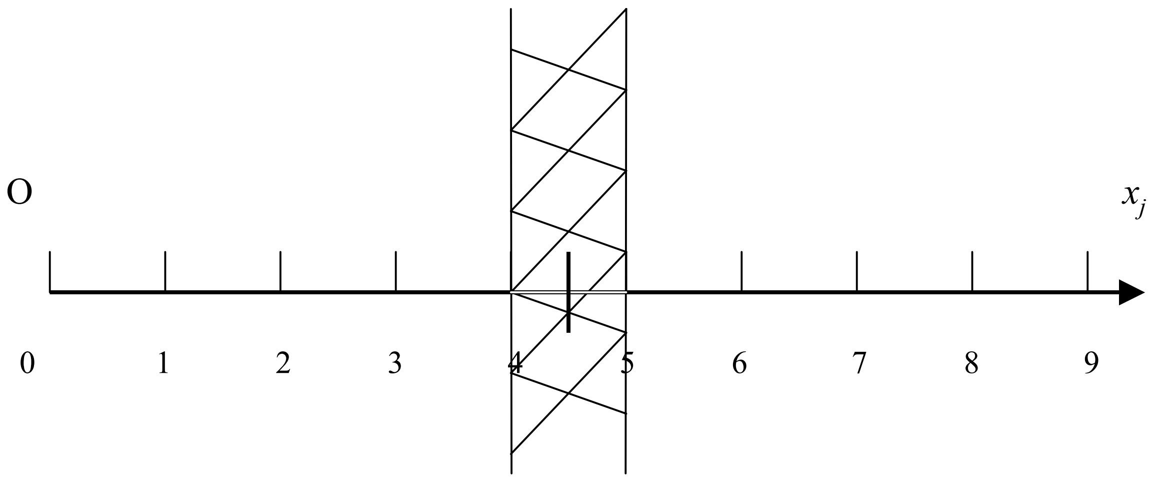
- **Шаг 2**

  Рассматриваем любую переменную (например, x_j), которая в результате решения на первом шаге приняла нецелочисленное значение. Для данной переменной составляем два ограничения

$$a)\quad x_j \le \left[x_j^*\right]$$

$$б)\quad x_j \ge \left[x_j^*\right]+1$$



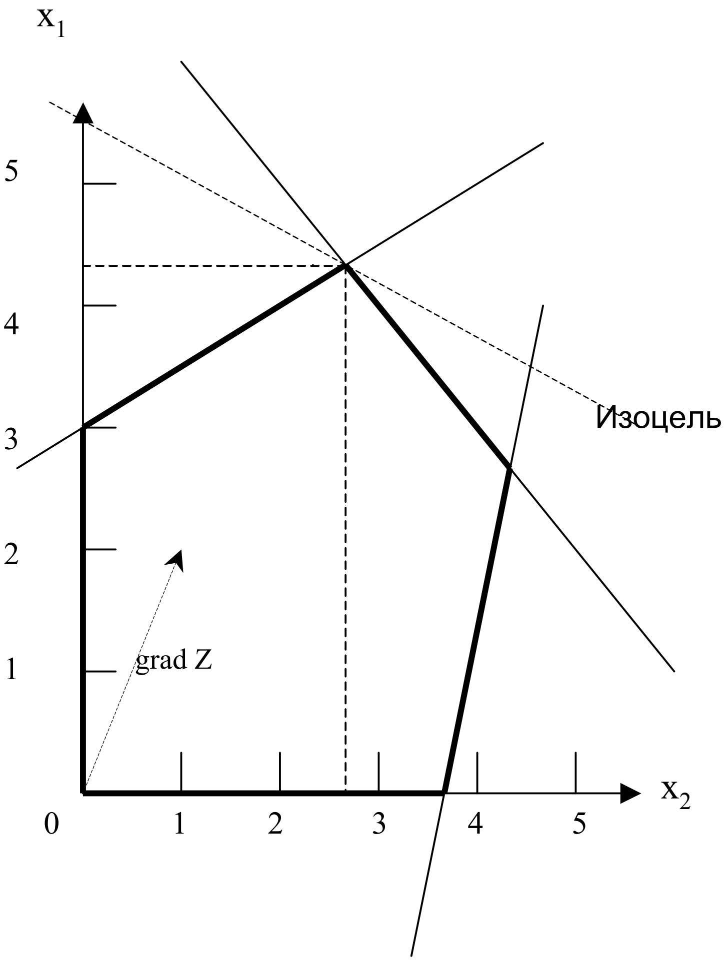


Переходим к шагу 3

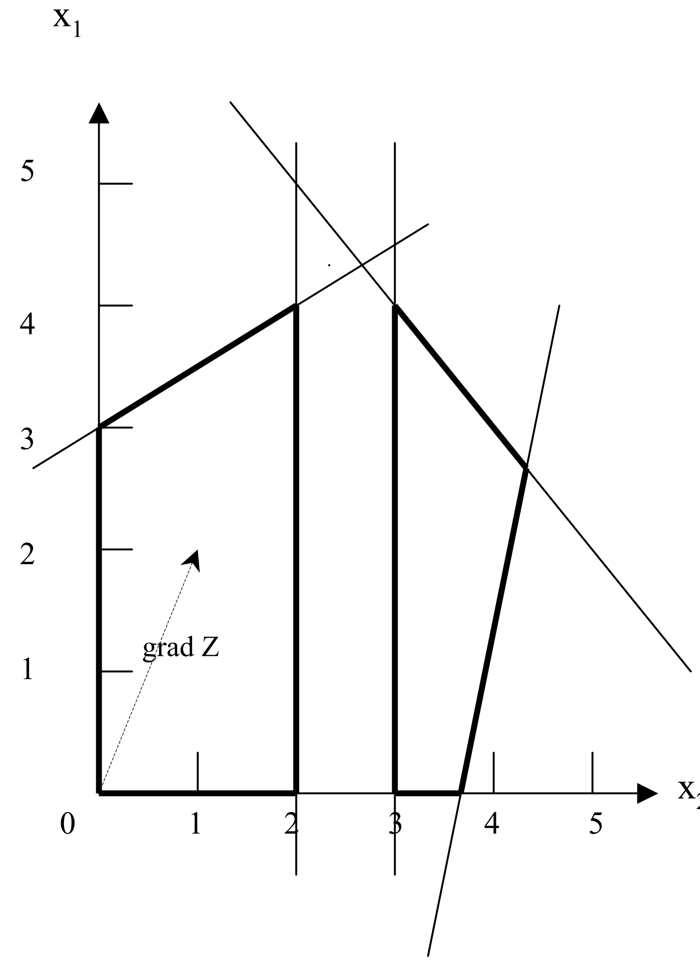
- **Шаг 3**

На основе исходной формируем две новые задачи линейного программирования. Первая содержит все условия исходной, плюс дополнительное ограничение типа а); вторая также содержит все условия исходной задачи, плюс дополнительное ограничение типа б).

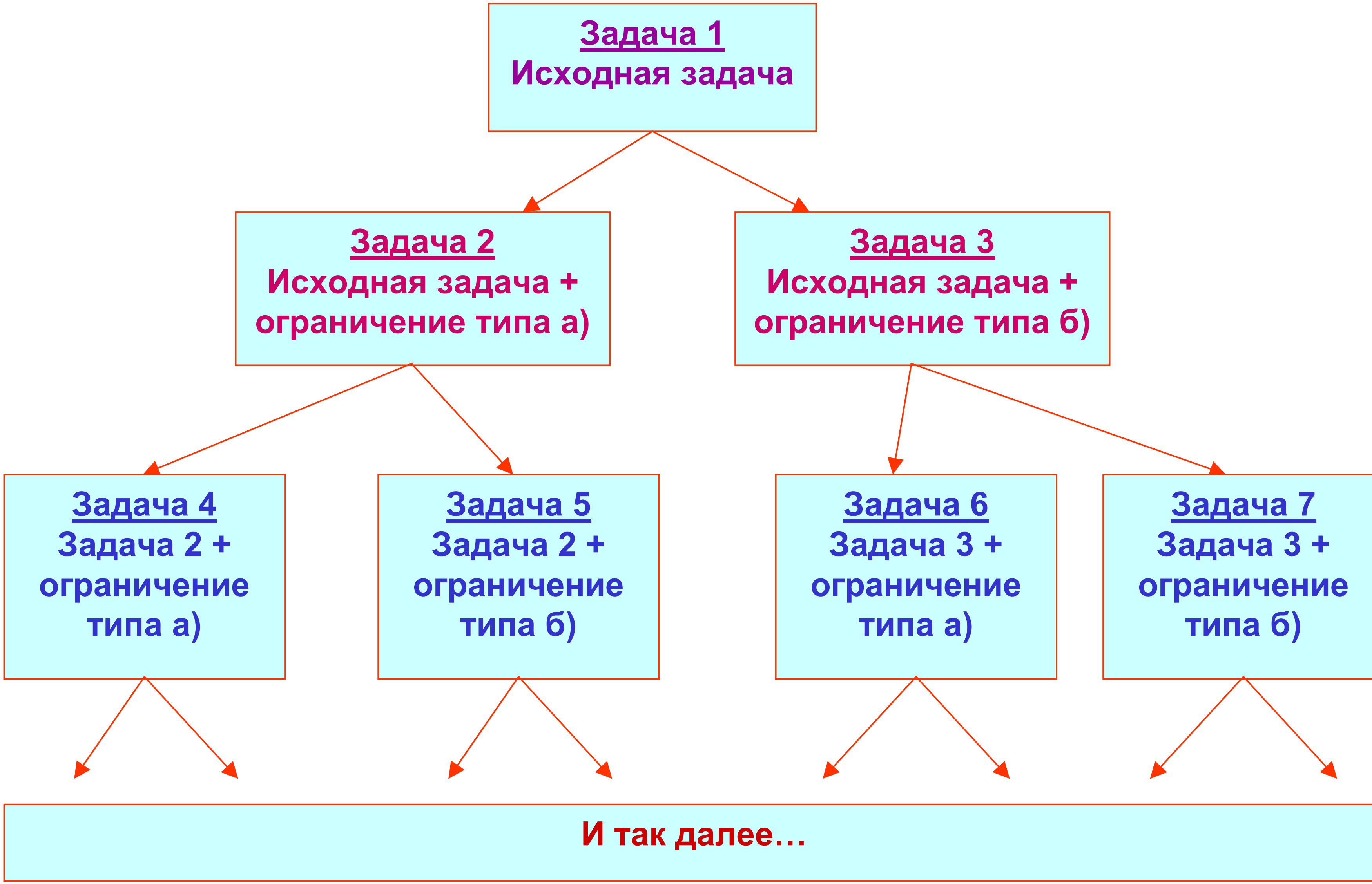
Переходим к шагу 1.



x1
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
x2
grad Z
Изоцель



x1
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
x2
grad Z


Задача 1
Исходная задача
Задача 2
Исходная задача + ограничение типа а)
Задача 3
Исходная задача + ограничение типа б)
Задача 4
Задача 2 + ограничение типа а)
Задача 5
Задача 2 + ограничение типа б)
Задача 6
Задача 3 + ограничение типа а)
Задача 7
Задача 3 + ограничение типа б)
И так далее…

Признаки остановки решения по ветвям

- Получено новое целочисленное решение. Если данное решение $\left(Z^{нов.}\right)$ имеет значение целевой функции лучше ранее полученного $\left(Z^{ориент.}\right)$, то оно принимается в качестве нового ориентира, если нет, то отбрасывается.

- Получено недопустимое решение. Естественно, что решение по данной ветви прекращается.

- Получено нецелочисленное решение, значение целевой функции которого хуже ранее найденного целочисленного $\left(Z^{ориент.}\right)$. Остановка решения основана на том положении, что значение целевой функции линейно ослабленной задачи всегда не хуже значения целевой функции целочисленной.

Пример

1

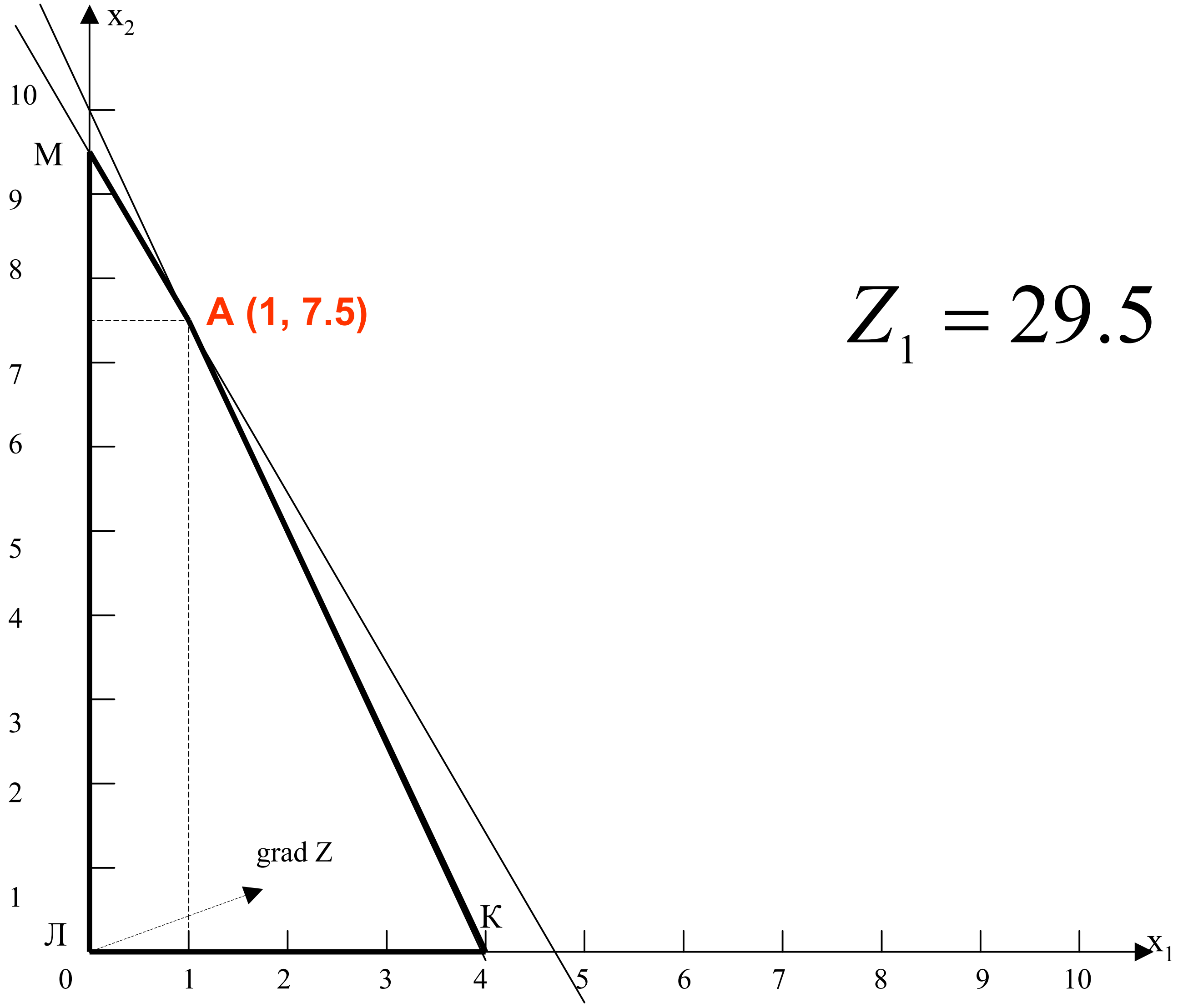
$$\max Z = 7x_1 + 3x_2,$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 20,$$

$$8x_1 + 4x_2 \le 38,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

x_1, x_2 - целые .



$$Z_1 = 29.5$$

$$x_2 = 7.5$$

а) $x_2 \leq 7$

б) $x_2 \geq 8$

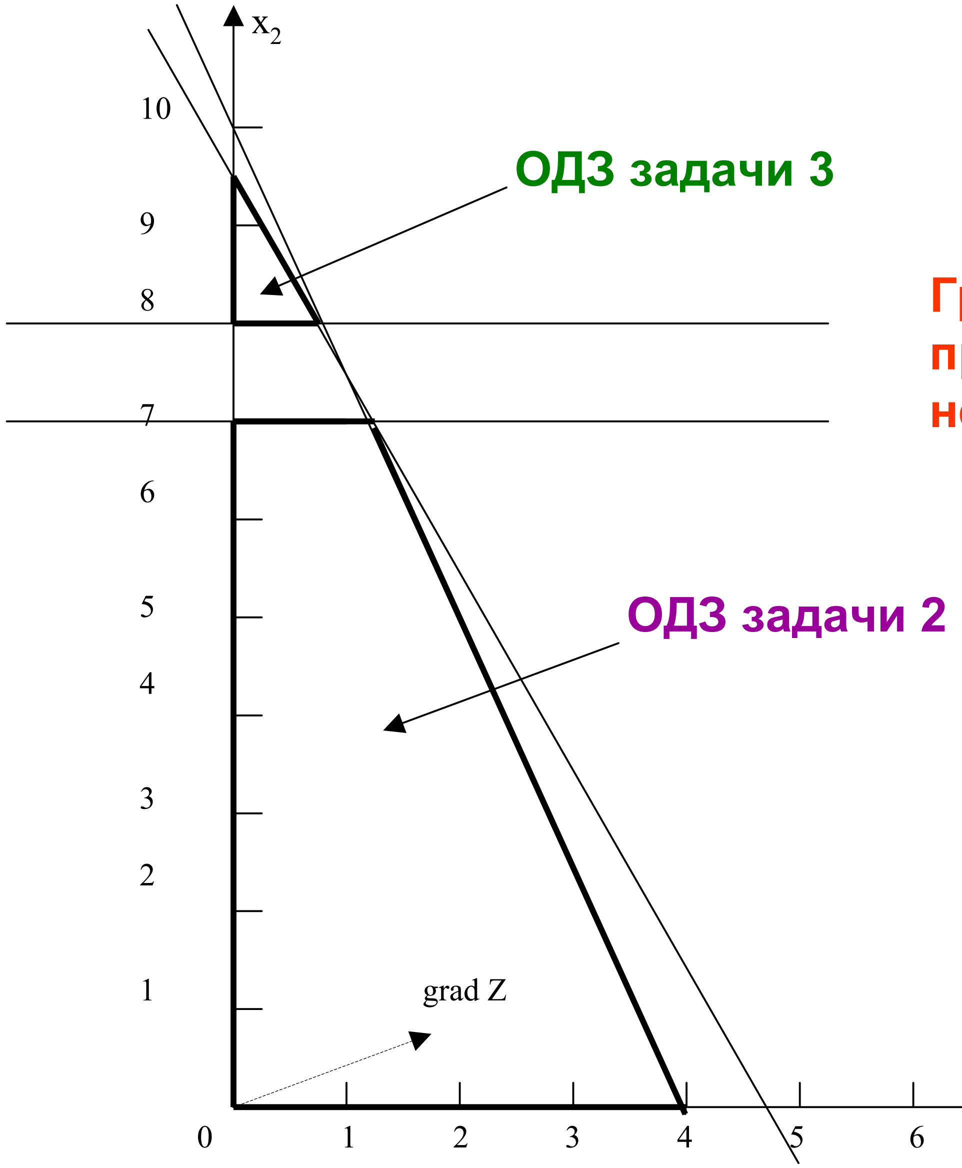
2

$$\max Z = 7x_1 + 3x_2,$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 20,$$
$$8x_1 + 4x_2 \le 38,$$
$$x_2 \le 7,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

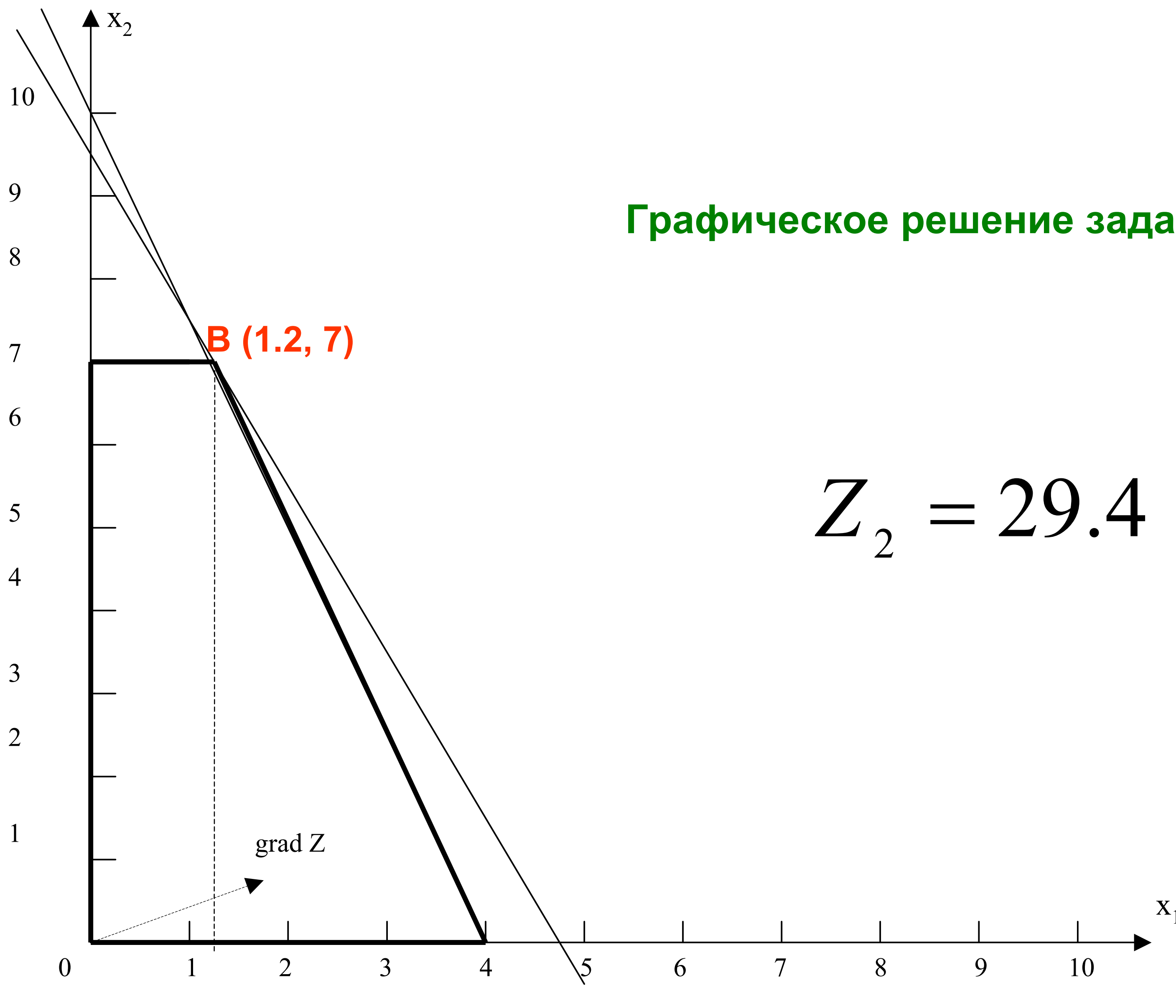
3

$$\max Z = 7x_1 + 3x_2,$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 20,$$
$$8x_1 + 4x_2 \le 38,$$
$$x_2 \ge 8,$$
$$x_1 \ge 0.$$

Графическая иллюстрация процедуры отсечения нецелочисленных точек



Графическое решение задачи 2



$$Z_2 = 29.4$$

$$x_1 = 1.2$$

а) $x_1 \leq 1$

б) $x_1 \geq 2$

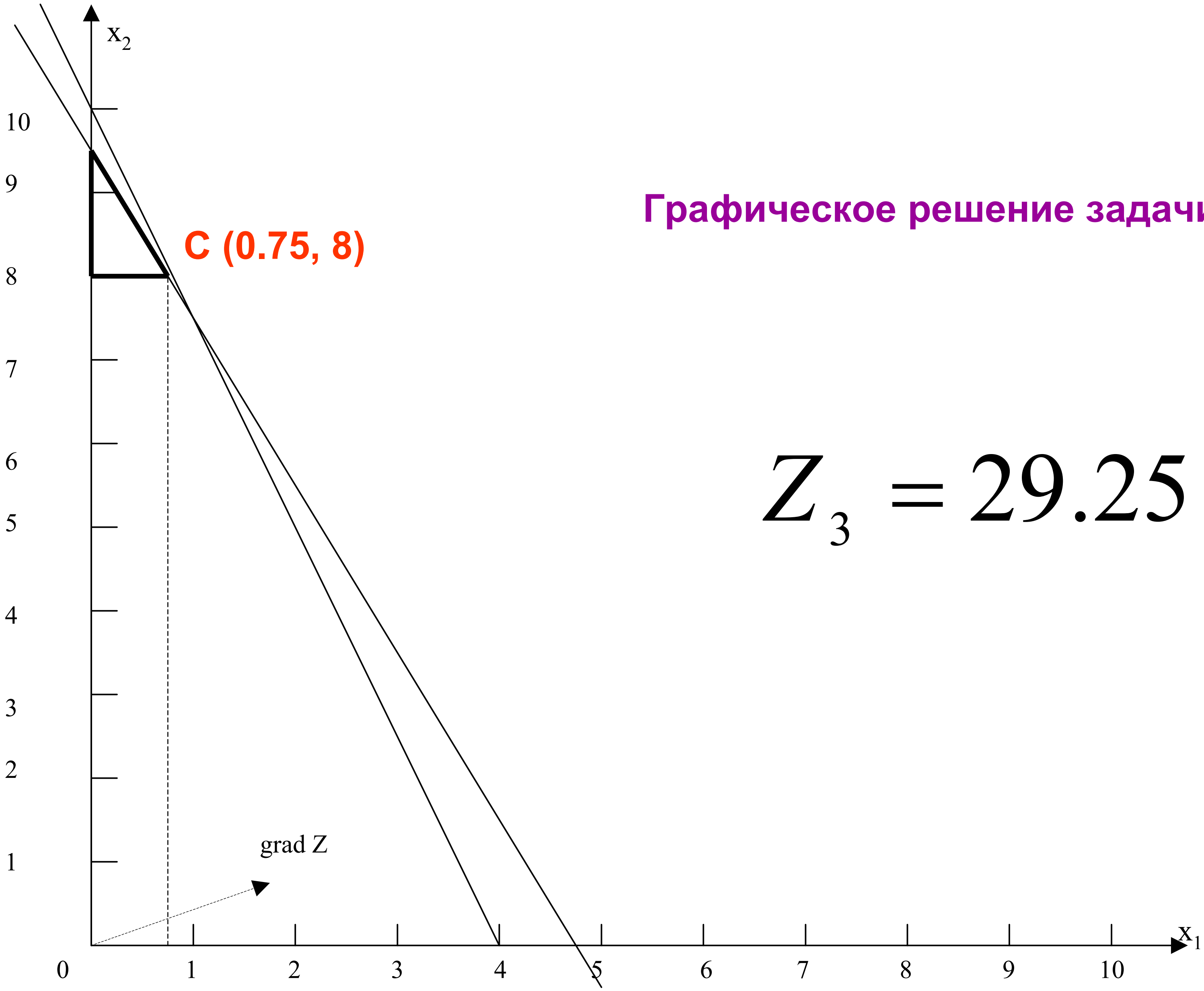
4

$$\max Z = 7x_1 + 3x_2,$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 20,$$
$$8x_1 + 4x_2 \le 38,$$
$$\mathrm{x}_1 \le 1,$$
$$x_2 \le 7,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$\max Z = 7x_1 + 3x_2,$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 20,$$
$$8x_1 + 4x_2 \le 38,$$
$$\mathrm{x}_1 \ge 2,$$
$$x_2 \le 7,$$
$$x_2 \ge 0.$$

5

Графическое решение задачи 3



$$Z_3 = 29.25$$

$$x_1 = 0.75$$

а) $x_1 \le 0$

б) $x_1 \ge 1$

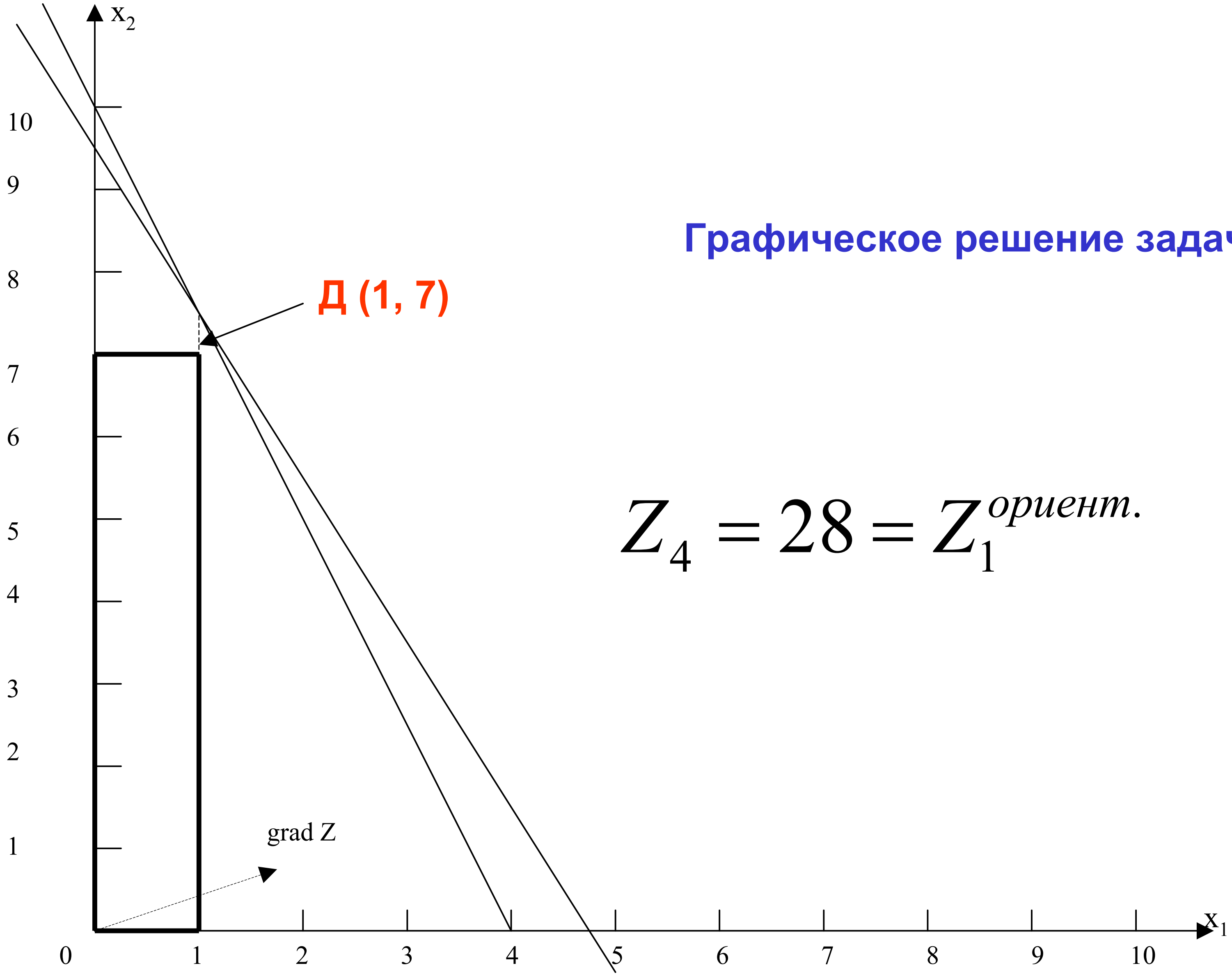
6

$$\max Z = 7x_1 + 3x_2,$$
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &\le 20, \\ 8x_1 + 4x_2 &\le 38, \\ x_2 &\ge 8, \\ x_1 \qquad &\le 0. \end{aligned}$$

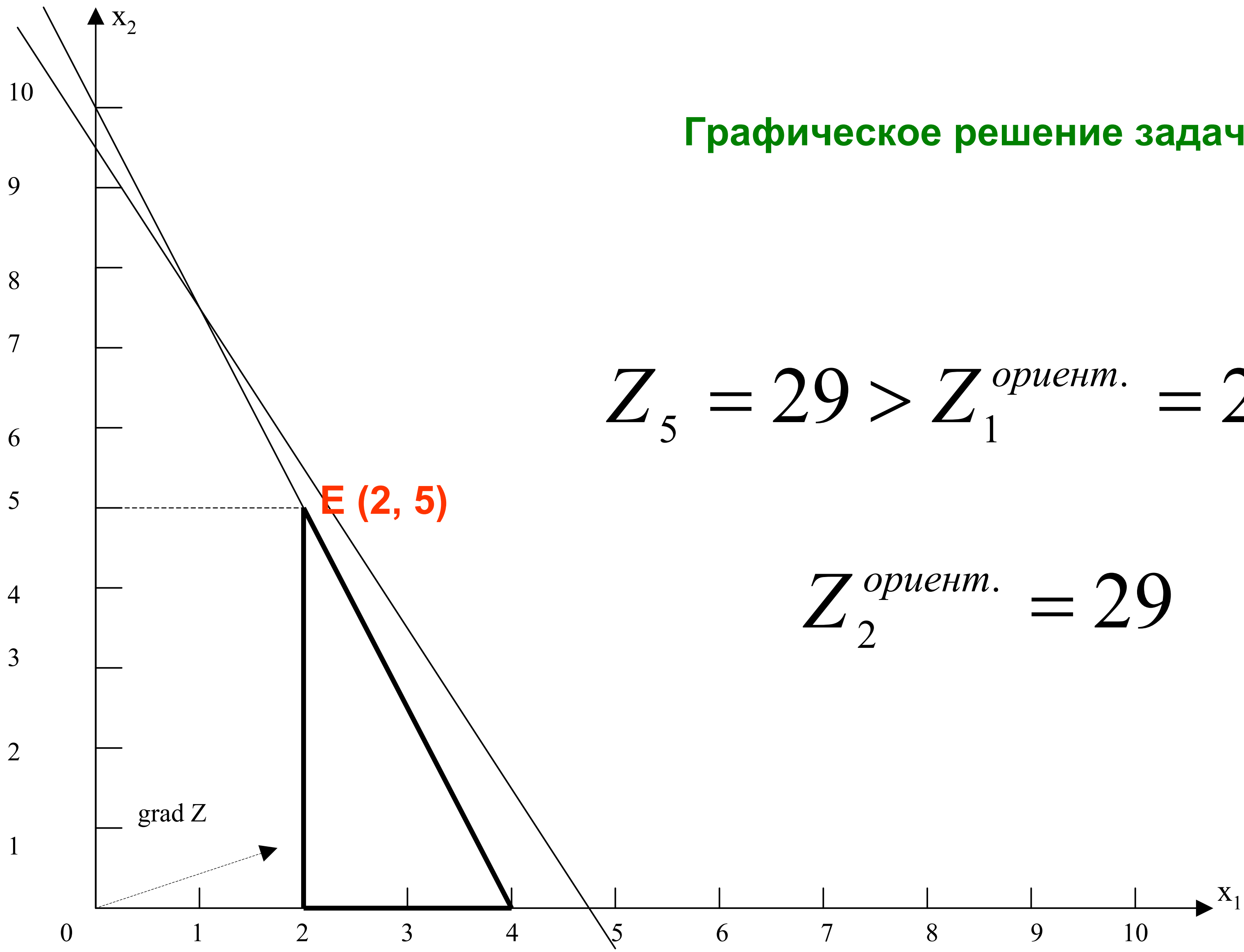
7

$$\max Z = 7x_1 + 3x_2,$$
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &\le 20, \\ 8x_1 + 4x_2 &\le 38, \\ x_2 &\ge 8, \\ x_1 \qquad &\ge 1. \end{aligned}$$

Графическое решение задачи 4



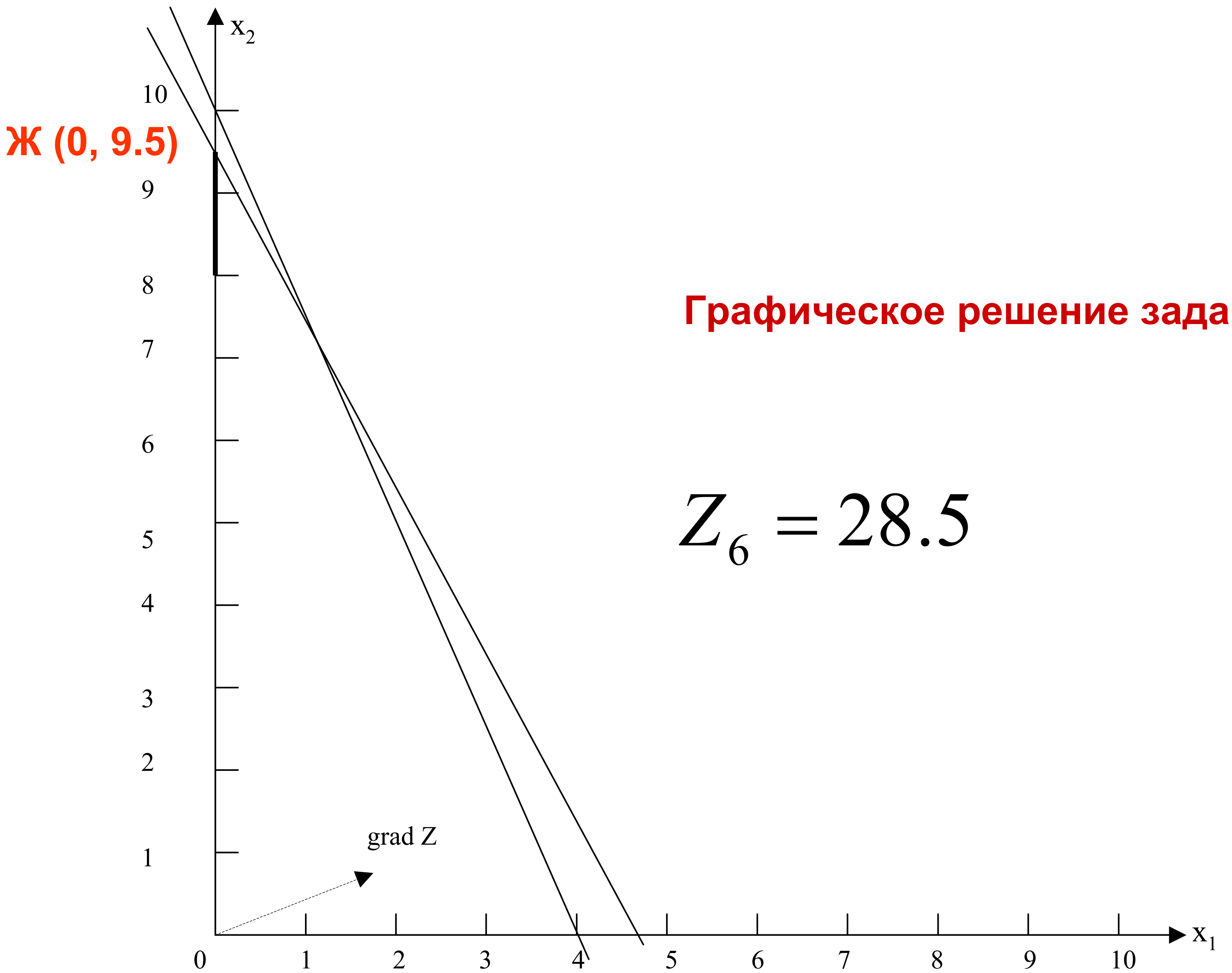
$$Z_4 = 28 = Z_1^{ориент.}$$



Графическое решение задачи 5

$$Z_5 = 29 > Z_1^{ориент.} = 28$$

$$Z_2^{ориент.} = 29$$



Графическое решение задачи 6

$$Z_6 = 28.5$$

$$Z_6 = 28.5 < Z_2^{ориент.}$$

$$x_1 = 2, x_2 = 5, Z^{opt.} = 29$$

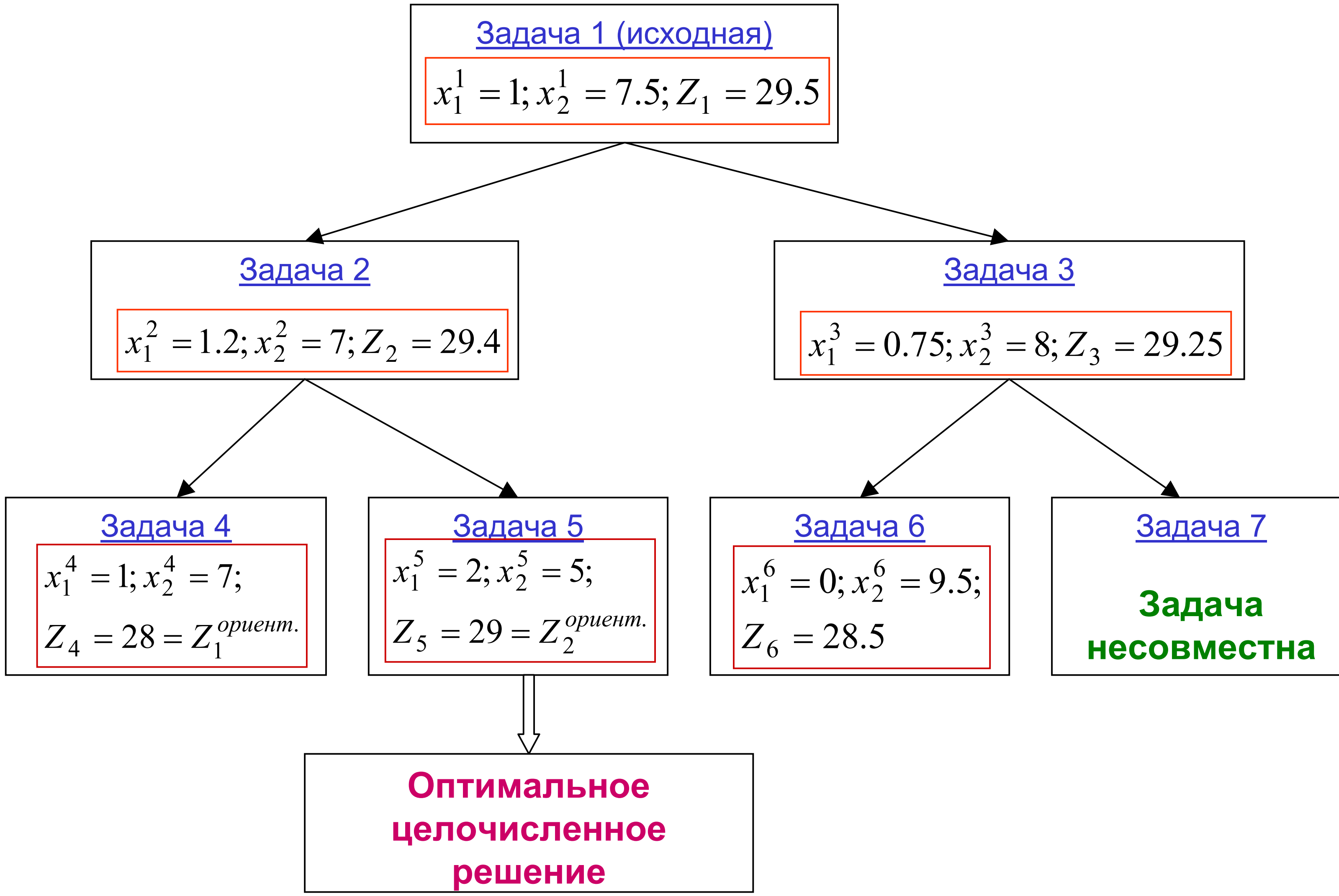


Схема решения задачи методом ветвей и границ

МЕТОД ОТСЕКАЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ Р.ГОМОРИ

$$\max Z = 7x_1 + 3x_2,$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20,$$

$$8x_1 + 4x_2 \leq 38,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

x_1, x_2 - целые.

$$\max Z = 7x_1 + 3x_2,$$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + S_1 \qquad &= 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \qquad + S_2 &= 38, \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0.$$

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	S_1	S_2
			7	3	0	0
x_1	7	1	1	0	1	–0.5
x_2	3	**7.5**	0	1	–2	1.25
$Z–c_j$	–	29.5	0	0	1	0.25

$$x_2 - 2S_1 + 1.25S_2 = 7.5$$

$$x_2 - 2S_1 + S_2 + 0.25S_2 = 7 + 0.5$$

$$x_2 - 2S_1 + S_2 + 7 = 0.5 - 0.25S_2$$

$$0.5 - 0.25S_2 \le 0$$ – отсечение

Особенности отсечения:

1. Любая допустимая точка целочисленной задачи удовлетворяет отсечению;

2. Текущее оптимальное решение линейно ослабленной задачи не удовлетворяет отсечению.

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
			7	3	0	0	0
x_1	7	1	1	0	1	–0.5	0
x_2	3	7.5	0	1	–2	1.25	0
S_3	0	–0.5	0	0	0	–0.25	1
$Z–c_j$	–	29.5	0	0	1	0.25	0

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
			7	3	0	0	0
x_1	7	2	1	0	1	0	–2
x_2	3	5	0	1	–2	0	5
S_2	0	2	0	0	0	1	–4
$Z–c_j$	–	29	0	0	1	0	1

$$x_1 = 2, x_2 = 5, Z = 29$$

- **Шаг 1**

  Решаем линейно ослабленную задачу целочисленного линейного программирования. Если все переменные в результате решения оказались целыми, то процесс решения прекращаем. В противном случае переходим к шагу 2

- **Шаг 2**

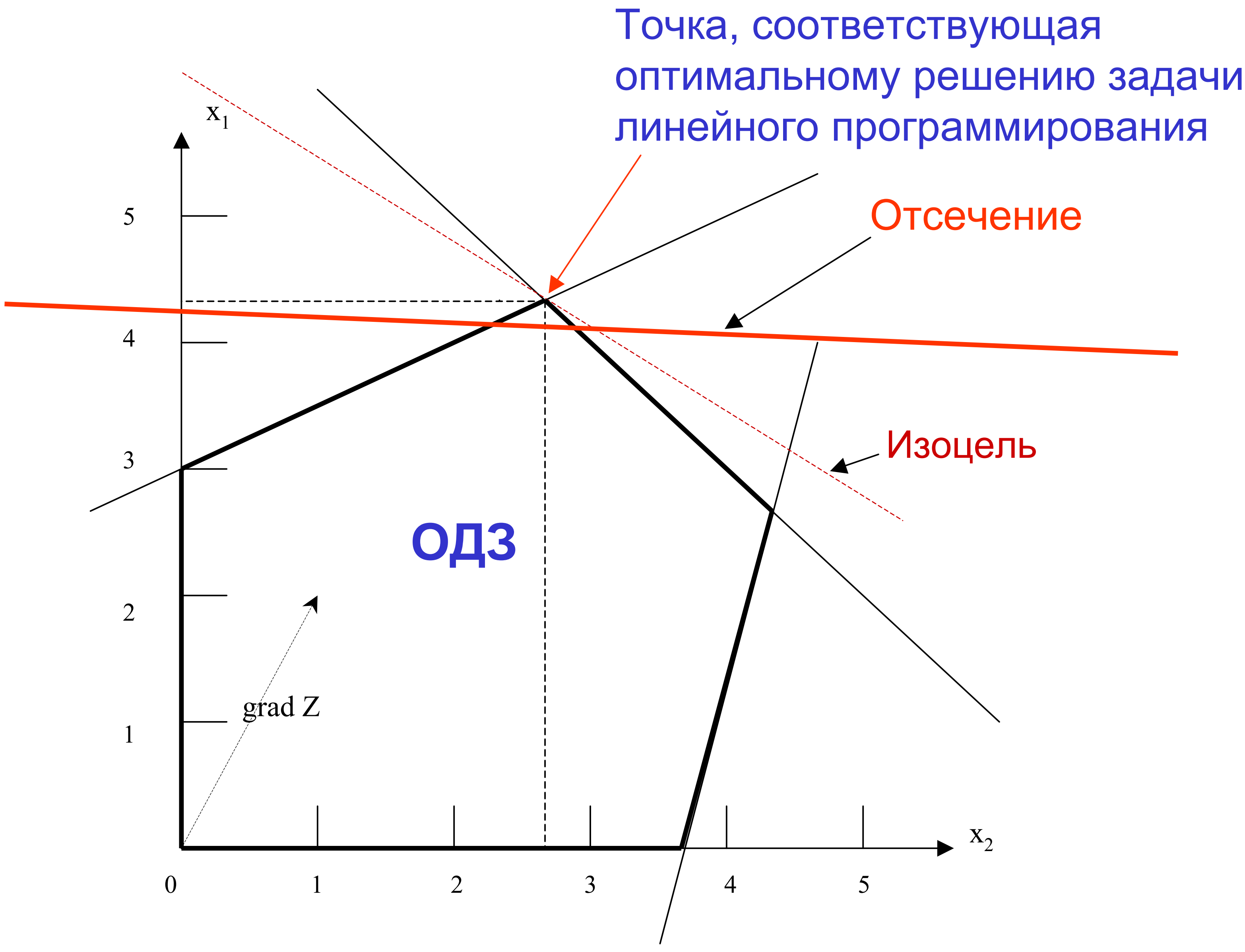
  Выбираем в заключительной таблице ограничение, у которого правая часть дробная. Данное ограничение используем для построения отсечения. Записываем правую часть ограничения и все коэффициенты при переменных в виде суммы целых и дробных их частей

  $[x]+\{l\}$, где $0 \le l \le 1$

Переписываем ограничение таким образом, что целые части переносим в левую часть, а дробные – в правую. На базе полученной правой части формируем отсечение

Правая часть ≤ 0

Переходим к шагу 3



Точка, соответствующая оптимальному решению задачи линейного программирования
Отсечение
Изоцель
ОДЗ
grad Z
x_1
x_2
0
1
2
3
4
5
1
2
3
4
5

- **Шаг 3**

Дополняем исходную проблему (на стадии полученного оптимального нецелочисленного решения) полученным ограничением (отсечением) и решаем ее двойственным симплекс методом. Если полученное решение является целочисленным, то процесс решения оканчивается. В противном случае переходим к шагу 2