

Тема 7

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ



Фрагмент проблемной карты

Решение		Дождь	
Взять зонтик		0	
Не брать		−20	

Направления вкладывания средств	Отдача через два года, грн.
Акции	22000
Строительство дороги	21500
Строительство больницы	21750
Кредиты частным лицам	22500

Сочетание: машины – корабли	Прибыль, грн.
0 – 0	0
10 – 10	50
20 – 20	100
40 – 20	160
⋮	⋮
20 – 60	180

Составляющие процесса принятия решений

- Присутствует лицо, ответственное за принятие решения.
- Имеется множество альтернатив, из которых человек, принимающий решение, должен выбрать одну.
- Цель человека, принимающего решение – выбрать наилучшую из альтернатив.

- После того, как решение человеком принято, происходит событие, которое им не контролируется.
- Каждая комбинация альтернативы, выбранной человеком, и произошедшего события приводит к результату, который имеет определенную меру ценности.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

$S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$

r_{ij}

Решение	Состояние			
	S_1	S_2	$\dots$	S_n
a_1	r_{11}	r_{12}	$\dots$	r_{1n}
a_2	r_{21}	r_{22}	$\dots$	r_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	r_{m1}	r_{m2}	$\dots$	r_{mn}

$$O = \sum_{j=1}^n r_j p_j(S_j)$$

$$O_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} p_j(S_j), \quad i = \overline{1, m}$$

$$O_{i^*} = \max_{i=\overline{1, m}} O_i$$

Пример

- Распространитель газет хочет определить, сколько газет ему заказывать в почтовом отделении. Он платит за газету почтовому отделению 20 копеек, а продает по 30 копеек.

- Газеты, не проданные к концу дня, становятся бесполезными и потраченные на них деньги считаются потерями распространителя. Он знает, что каждый день сможет продать от 5 до 9 газет. Опыт ему подсказывает, что распределение вероятностей потребности в газетах следующее:

$$p_5 = 0.1 \quad p_6 = 0.3 \quad p_7 = 0.3 \quad p_8 = 0.2 \quad p_9 = 0.1$$

Распространитель должен решить, сколько газет ему заказывать в почтовом отделении, чтобы получить наибольший ожидаемый доход.

$$r_{ij} = 30j - 20i, \quad j < i,$$

$$r_{ij} = 30i - 20i = 10i, \quad j \geq i.$$

Заказ	Потребность									
	5	6	7	8	9					
5	50	50	50	50	50					
6	30	60	60	60	60					
7	10	40	70	70	70					
8	−10	20	50	80	80					
9	−30	0	30	60	90					

- **Критерии принятия решений**

Определение

- Действие a_i подавляется действием a_i^1 (иначе, действие a_i^1 доминирует над действием a_i), если для всех состояний $S_j \in S$, $r_{ij} \leq r'_{ij}$ (где r_{ij} и r'_{ij} – доход) и для некоторых состояний

$$S_j \in S, \quad r_{ij} < r'_{ij}.$$

1. Критерий Байеса

$$O_5 = 0.1 \times 50 + 0.3 \times 50 + 0.3 \times 50 + 0.2 \times 50 + 0.1 \times 50 = 50$$

$$O_6 = 0.1 \times 30 + 0.3 \times 60 + 0.3 \times 60 + 0.2 \times 60 + 0.1 \times 60 = 57$$

$$O_7 = 0.1 \times 10 + 0.3 \times 40 + 0.3 \times 70 + 0.2 \times 70 + 0.1 \times 70 = 55$$

$$O_8 = 0.1 \times (-10) + 0.3 \times 20 + 0.3 \times 50 + 0.2 \times 80 + 0.1 \times 80 = 44$$

$$O_9 = 0.1 \times (-30) + 0.3 \times 0 + 0.3 \times 30 + 0.2 \times 60 + 0.1 \times 90 = 27$$

2. Критерий максимин (критерий Вальда)

- Определяем для каждого действия наихудший исход (наименьший доход).
- Среди полученных результатов выбираем действие с наилучшим исходом.

Определение

- Критерий максимин выбирает действие с наибольшим значением среди минимальных в строке

$$\max_{i=1,\overline{m}} \left[\min_{j=1,\overline{n}} \{ r_{ij} \} \right]$$

Заказано газет	Наихудшее из состояний	Доход при наихудшем состоянии, коп.
5 6 7 8 9	5 6 7 8 9 5 5 5 5	50 30 10 -10 -30

3. Критерий максимакс

- Для каждого действия выбираем наилучший исход (наибольший доход).
- Среди полученных результатов выбираем действие с наилучшим исходом.

Определение

- Критерий максимакс выбирает действие с наибольшим значением среди максимальных

$$\max_{i=1, m} \left[\max_{j=1, n} \{ r_{ij} \} \right]$$

Заказано газет	Состояние, приносящее наилучший исход	Наивысший доход
5 6 7 8 9	5 6 7 8 9 6 7 8 9 7 8 9 8 9 9	50 60 70 80 90

4. Критерий Гурвица

- Для каждой строки вычисляется выражение

$$R_i = \alpha M_i + (1 - \alpha) m_i,$$

R_i – оценка i -го действия;

M_i – максимальное значение в i -й строке;

m_i – минимальное значение в i -й строке.

α – «коэффициент оптимизма»

- Среди полученных R_i выбирается наибольшее:

$$\max_{i=1, m} \{R_i\}$$

Заказ	Значение α					
	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	
5	50	50	50	50	50	
6	36	40.5	45	49.5	54	
7	22	31	40	49	58	
8	8	21.5	35	48.5	62	
9	– 6	12	30	48	66	

5. Критерий минимаксного сожаления (критерий Сэвиджа)

- Для каждого состояния S_j из множества состояний S находим действие, которое максимизирует доход.
- Затем для каждого состояния S_j рассчитываем возможные потери или «сожаления»

$$L_{ij} = r_{ij(\max)} - r_{ij}, \quad i = \overline{1, m}$$

$r_{ij(\max)}$ — максимальное значение оценки j -го
состояния

- Строим матрицу сожалений.
- Для каждого действия $a_i \in A$ выбираем наибольшее сожаление.
- Среди полученных сожалений выбираем наименьшее.

Заказ	Потребность									
	5	6	7	8	9					
5	$50 - 50 = 0$	$60 - 50 = 10$	$70 - 50 = 20$	$80 - 50 = 30$	$90 - 50 = 40$					
6	$50 - 30 = 20$	$60 - 60 = 0$	$70 - 60 = 10$	$80 - 60 = 20$	$90 - 60 = 30$					
7	$50 - 10 = 40$	$60 - 40 = 20$	$70 - 70 = 0$	$80 - 70 = 10$	$90 - 70 = 20$					
8	$50 - (-10) = 60$	$60 - 20 = 40$	$70 - 50 = 20$	$80 - 80 = 0$	$90 - 80 = 10$					
9	$50 - (-30) = 80$	$60 - 0 = 60$	$70 - 30 = 40$	$80 - 60 = 20$	$90 - 90 = 0$					
Максимальное значение оценки	$r_{i5_{(\max)}} = 50$	$r_{i6_{(\max)}} = 60$	$r_{i7_{(\max)}} = 70$	$r_{i8_{(\max)}} = 80$	$r_{i9_{(\max)}} = 90$					

Заказано газет		Максимальные потери	
5		40	
6		30	
7		40	
8		60	
9		80	

6. Критерий ожидаемой ценности (критерий Лапласа)

Заказано газет	Ожидаемый доход, копеек
5	$1/5(50 + 50 + 50 + 50 + 50) = 50$
6	$1/5(30 + 60 + 60 + 60 + 60) = \mathbf{54}$
7	$1/5(10 + 40 + 70 + 70 + 70) = 52$
8	$1/5(-10 + 20 + 50 + 80 + 80) = 44$
9	$1/5(-30 + 0 + 30 + 60 + 90) = 30$

ПРОБЛЕМА ВЫБОРА КРИТЕРИЯ

Критерий	Оптимальное решение
Принятие решений в условиях риска (критерий Байеса с распределением вероятностей: 0.1, 0.3, 0.3, 0.2, 0.1)	Заказ 6 газет
Вальда (максимина)	Заказ 5 газет
Максимакса	Заказ 9 газет
Гурвица	? (зависит от «уровня оптимизма» лица, принимающего решение)
Сэвиджа (минимаксного сожаления)	Заказ 6 газет
Лапласа (ожидаемой ценности)	Заказ 6 газет

ОЦЕНКА ОЖИДАЕМОЙ ЦЕННОСТИ ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Наибольшая плата за информацию о том состоянии, которое наступит, называется **ожидаемой ценностью полной информации** – EVPI (*Expected Value of Perfect Information*)

Оценка **EVPI** – разность между ожидаемой отдачей в случае, когда будет точно известно, какое состояние наступит, и ожидаемой отдачей при текущем состоянии дел.

$$O_{(opt.)} = 0.1 \times 50 + 0.3 \times 60 + 0.3 \times 70 + 0.2 \times 80 + 0.1 \times 90 = 69 \text{ коп.}$$

$$EVPI = O_{(opt.)} - O_6 = 69 - 57 = 12 \text{ коп.}$$

Оценка EVPI показывает верхнюю границу затрат на сбор информации о состоянии природы, которое произойдет.

Свойство оценки

- *Она всегда равна минимальному ожидаемому сожалению, получаемому при принятии оптимального решения в условиях риска.*

$$OC_5 = 0.1 \times 0 + 0.3 \times 10 + 0.3 \times 20 + 0.2 \times 30 + 0.1 \times 40 = 19$$

$$OC_6 = 0.1 \times 20 + 0.3 \times 0 + 0.3 \times 10 + 0.2 \times 20 + 0.1 \times 30 = 12$$

$$OC_7 = 0.1 \times 40 + 0.3 \times 20 + 0.3 \times 0 + 0.2 \times 10 + 0.1 \times 20 = 14$$

$$OC_8 = 0.1 \times 60 + 0.3 \times 40 + 0.3 \times 20 + 0.2 \times 0 + 0.1 \times 10 = 25$$

$$OC_9 = 0.1 \times 80 + 0.3 \times 60 + 0.3 \times 40 + 0.2 \times 20 + 0.1 \times 0 = 42$$

Заказ	Потребность									
	5	6	7	8	9					
5	0	10	20	30	40					
6	20	0	10	20	30					
7	40	20	0	10	20					
8	60	40	20	0	10					
9	80	60	40	20	0					