Тема 8

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ МНОЖЕСТВЕ ЦЕЛЕЙ. ЦЕЛЕВОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- Пусть мы имеем дело с некоторой оценочной функцией

$$V\left[x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a)\right]$$

или

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- или функцией затрат

$$C\left[x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a)\right]$$

или

$$C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Определение

- Оценочная функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является **аддитивной оценочной функцией,** если существует n функций $v_1(x_1), v_2(x_2), \ldots, v_n(x_n)$, удовлетворяющих условию

$$\boxed{V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_i)}$$

Определение

- *Функция затрат* $C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *является* ***аддитивной функцией затрат****, если существует* n *функций* $c_1(x_1), c_2(x_2), \ldots, c_n(x_n)$ *, удовлетворяющих условию*

$$\boxed{C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)}$$

Определение

- *Фактор 1* ***предпочтительно независим*** *от другого фактора 2, если выбор оценок 1-го фактора не зависит от оценок 2-го фактора*

Определение

- *Если фактор 1 предпочтительно независим по отношению к фактору 2, а фактор 2 предпочтительно независим по отношению к фактору 1, то эти факторы называются* ***совместно предпочтительно независимыми***

Определение

- *Множество факторов* S ***совместно предпочтительно независимо*** *от другого множества факторов* S^I, *если оценки факторов* S^I *не затрагивают выбор оценок факторов из* S *, и оценки факторов множества* S *не затрагивают выбора оценок множества* S^I

Определение

- ***Множество факторов*** $S=\{1,2,\ldots,n\}$ ***совместно предпочтительно независимо***, *если для всех подмножеств* S^{I} *из множества* $S=\{1,2,\ldots,n\}$, S^{I} *является совместно предпочтительно независимым по отношению к* S^{II} *(* S^{II} *– подмножество факторов из* $S=\{1,2,\ldots,n\}$, *не вошедших в* S^{I} *)*

Теорема

- *Если множество факторов $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ является совместно предпочтительно независимым, то предпочтения человека, принимающего решение, могут быть представлены в виде аддитивной функции (оценок или затрат)*

- Термин **«целевое программирование»** *употребляется для того чтобы отразить идею, когда человек, принимающий решение, ищет не лучшее, т.е. оптимальное, а скорее такое решение, которое «достаточно хорошее» или «достаточно близкое» к оптимальному.*

Пример (постановка задачи)

- *Рекламное агентство собирается определить: как обеспечить максимально эффективный показ рекламы автомобильной компании.*

  При этом преследуются 3 цели:

1. *рекламу должны просмотреть, по крайней мере, 40 млн. мужчин с высоким доходом (МВД)*
2. *рекламу должны просмотреть, по меньшей мере, 60 млн. людей с низким доходом (ЛНД)*
3. *рекламу должны просмотреть, по крайней мере, 35 млн. женщин с высоким доходом (ЖВД)*

Агентство может приобрести 2 типа рекламы: показываемой во время трансляции футбольных матчей и мыльных опер. На рекламу может быть израсходовано не более $600000. Стоимость одноминутной рекламы и потенциальная аудитория каждого типа телепередач представлены в таблице:

Охват рекламой и затраты на нее

Телепередача	Категория людей			Затраты, $
	МВД	ЛНД	ЖВД	
Футбол	7 млн.	10 млн.	5 млн.	100000
Мыльная опера	3 млн.	5 млн.	4 млн.	60000

- Агентство должно определить: ***сколько минут рекламы необходимо приобрести для автомобильной компании для показа во время трансляции футбольных матчей и мыльных опер с целью достижения поставленных целей***

Переменные

x_1 – количество минут рекламы, показываемой во время трансляции футбольных матчей

x_2 – количество минут рекламы, показываемой во время трансляции мыльных опер

Математическая модель

$7x_1 + 3x_2 \geq 40$ ограничение по МВД

$10x_1 + 5x_2 \geq 60$ ограничение по ЛНД

$5x_1 + 4x_2 \geq 35$ ограничение по ЖВД

$100x_1 + 60x_2 \leq 600$ ограничение по бюджету

$x_1, x_2 \geq 0$

$\min(\max)Z = q_1x_1 + q_2x_2$

Система ограничений несовместна!

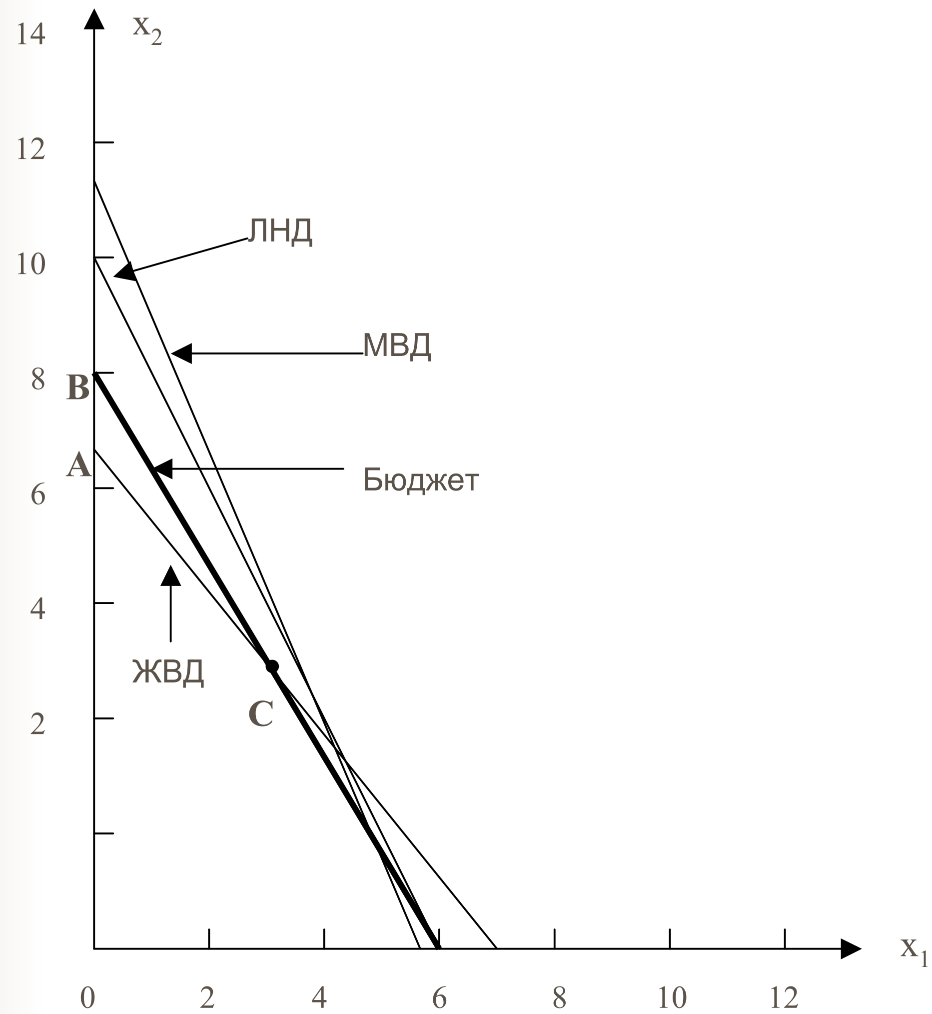

Иллюстрация отсутствия решений задачи по рекламе автомобилей

Целевое программирование (модификация модели)

- В ограничения, определяющие цели, вводим отклоняющиеся переменные

$$S_i^+ \geq 0 \quad \text{и} \quad S_i^- \geq 0$$

S_i^+ – количество, на которое цель i численно «переудовлетворяется»

S_i^- – количество, на которое цель i численно «недоудовлетворяется»

$$7x_1 + 3x_2 + S_1^- - S_1^+ = 40$$

$$10x_1 + 5x_2 + S_2^- - S_2^+ = 60$$

$$5x_1 + 4x_2 + S_3^- - S_3^+ = 35$$

Пусть, например: $x_1 = 5,\ x_2 = 2$

$$7 \times 5 + 3 \times 2 = 41 \quad \Rightarrow \quad S_1^- = 0, S_1^+ = 1$$

$$10 \times 5 + 5 \times 2 = 60 \quad \Rightarrow \quad S_2^- = S_2^+ = 0$$

$$5 \times 5 + 4 \times 2 = 33 \quad \Rightarrow \quad S_3^- = 2, S_3^+ = 0$$

Модифицированная модель (1)

$$7x_1 + 3x_2 + S_1^- - S_1^+ = 40$$

$$10x_1 + 5x_2 + S_2^- - S_2^+ = 60$$

$$5x_1 + 4x_2 + S_3^- - S_3^+ = 35$$

$$100x_1 + 60x_2 \le 600$$

$$x_1, x_2, S_1^+, S_1^-, S_2^+, S_2^-, S_3^+, S_3^- \ge 0$$

$$\min Z = S_1^- + S_2^- + S_3^-$$

Модифицированная модель (2)

(с учетом весов целей)

$$7x_1 + 3x_2 + S_1^- - S_1^+ = 40$$

$$10x_1 + 5x_2 + S_2^- - S_2^+ = 60$$

$$5x_1 + 4x_2 + S_3^- - S_3^+ = 35$$

$$100x_1 + 60x_2 \le 600$$

$$x_1, x_2, S_1^+, S_1^-, S_2^+, S_2^-, S_3^+, S_3^- \ge 0$$

$$\min Z = 200S_1^- + 100S_2^- + 50S_3^-$$

Интерпретация весов

- Каждый миллион зрителей, на который агентство недовыполнит 1-ю цель, будет стоить $200000 в связи с потерями от недопродаж автомобилей
- Каждый миллион зрителей, на который агентство недовыполнит 2-ю цель, будет стоить $100000 в связи с потерями от недопродаж автомобилей
- Каждый миллион зрителей, на который агентство недовыполнит 3-ю цель, будет стоить $50000 в связи с потерями от недопродаж автомобилей

Оптимальное решение модели (2)

$$Z = 250$$

$$x_1 = 6, x_2 = 0$$

$$S_1^+ = 2, S_2^+ = 0, S_3^+ = 0$$

$$S_1^- = 0, S_2^- = 0, S_3^- = 5$$

Модифицированная модель (3)

(с учетом дополнительного условия по выполнению ограничения по бюджету)

$$7x_1 + 3x_2 + S_1^- - S_1^+ = 40$$

$$10x_1 + 5x_2 + S_2^- - S_2^+ = 60$$

$$5x_1 + 4x_2 + S_3^- - S_3^+ = 35$$

$$100x_1 + 60x_2 + S_4^- - S_4^+ = 600$$

$$x_1, x_2, S_1^+, S_1^-, S_2^+, S_2^-, S_3^+, S_3^-, S_4^+, S_4^- \geq 0$$

$$\min Z = 200S_1^- + 100S_2^- + 50S_3^- + S_4^+$$

Оптимальное решение модели (3)

$$Z = 33\tfrac{1}{3}$$

$$x_1 = 4\tfrac{1}{3}, x_2 = 3\tfrac{1}{3}$$

$$S_1^+ = \frac{1}{3}, S_2^+ = 0, S_3^+ = 0, S_4^+ = 33\tfrac{1}{3}$$

$$S_1^- = 0, S_2^- = 0, S_3^- = 0, S_4^- = 0$$

Обобщения

- *Если неудача достичь i-ю цель возникает тогда, когда достигнутое значение цели численно меньше желаемого ее значения, то в целевую функцию вводится переменная* S_i^-.

- *Если неудача достичь i-ю цель возникает тогда, когда достигнутое значение цели численно больше желаемого ее значения, то в целевую функцию вводится переменная* S_i^+ .

- *Если необходимо достичь точного значения i-й цели и штрафы определены как за ее недовыполнение, так и за перевыполнение, то обе переменные, S_i^- и S_i^+, включаются в целевую функцию.*

- *Целевая функция задачи целевого программирования* ***всегда*** *стремится к минимуму, так как отражает необходимость минимизации отклонений от заданных целей.*

Модифицированная модель (4)

(для случая, когда $P_1 >>> P_2 >>> P_3$)

$$7x_1 + 3x_2 + S_1^- - S_1^+ = 40$$
$$10x_1 + 5x_2 + S_2^- - S_2^+ = 60$$
$$5x_1 + 4x_2 + S_3^- - S_3^+ = 35$$
$$100x_1 + 60x_2 \leq 600$$
$$x_1, x_2, S_1^+, S_1^-, S_2^+, S_2^-, S_3^+, S_3^- \geq 0$$
$$\min Z_1 = P_1 S_1^-$$
$$\min Z_2 = P_2 S_2^-$$
$$\min Z_3 = P_3 S_3^-$$

Варианты решений для различных сочетаний приоритетов целей

Приоритеты			Оптимальное решение		Отклонение от цели по категориям лиц		
Наивыс-ший	Средний	Наимень-ший	x_1	x_2	МВД	ЛНД	ЖВД
МВД	ЛНД	ЖВД	6	0	0	0	5
МВД	ЖВД	ЛНД	5	5/3	0	5/3	10/3
ЛНД	МВД	ЖВД	6	0	0	0	5
ЛНД	ЖВД	МВД	6	0	0	0	5
ЖВД	МВД	ЛНД	3	5	4	5	0
ЖВД	ЛНД	МВД	3	5	4	5	0