

ГЛАВА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ НА СЕТЯХ

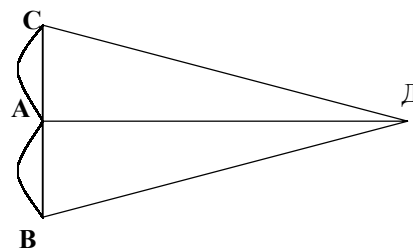
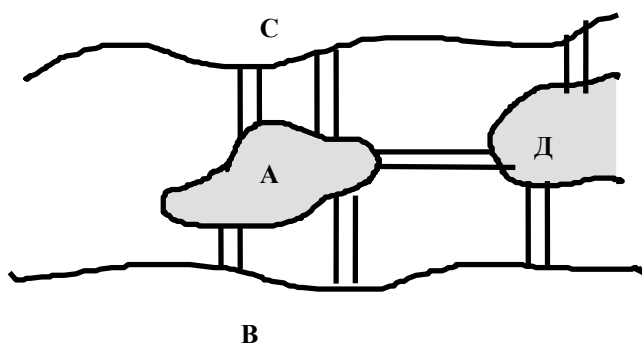
Задачи на сетях представляют собой один из довольно часто применяемых в практике разделов исследования операций. Среди сетевых задач могут быть рассмотрены как детерминированные, так и задачи с вероятностными характеристиками. Тема включает классические постановки сетевых задач и методы их решения: метод критического пути, ПЕРТ-анализ, нахождение кратчайших расстояний на заданной сети (алгоритм Дейкстры), нахождение максимального потока на сети (алгоритм Форда), задачу на нахождение минимально связного дерева. Рассматриваются некоторые задачи оптимизации на сети, а также применение линейного программирования для решения задач на нахождение критического пути. Элементы теории графов рассматриваются в данной теме в качестве основы методов сетевого моделирования.

5.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

5.1.1. ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Понятие графа исключительно наглядно: **это совокупность точек, соединенных линиями**. В виде графа можно представить сеть железных дорог, сеть трубопроводов, совокупность работ, образующих сложное задание, информационную систему, структуру управления сложной иерархической системой. На языке теории графов формулируются многие практические задачи.

Свое начало теория графов берет в 1736 г., когда швейцарский математик Л.Эйлер сформулировал «задачу о кенигсбергских мостах». Это задача-головоломка. Суть ее сводится к следующему: город Кенигсберг, ныне Калининград, расположен на берегах реки Преголь и двух ее островах. Различные части города были соединены семью мостами. Вопрос заключается в том, можно ли совершить прогулку по городу таким образом, чтобы, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя в точности один раз по каждому мосту? Эйлер показал, что такие задачи неразрешимы.



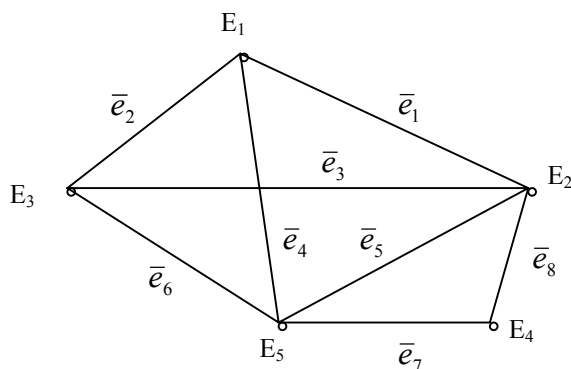
Поначалу теория графов имела дело в основном с математическими развлечениями и головоломками (например, головоломка ирландского математика У.Гамильтона, 1859, додекаэдр с 20 вершинами). Каждой вершине додекаэдра соответствовал крупный город. Необходимо было определить путь между городами (по ребрам додекаэдра), проходящий через каждый город только один раз.

Дальнейшее развитие математики и особенно ее приложений дало сильный толчок развитию теории графов. Уже в XIX веке графы использовались при

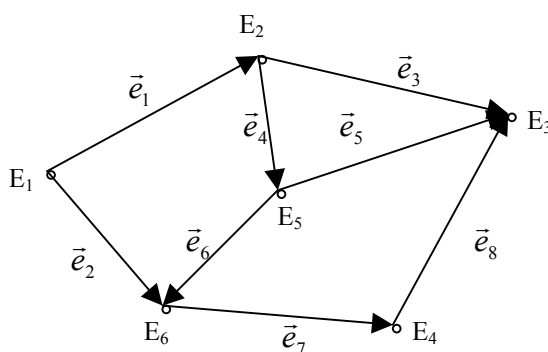
построении схем электрических цепей и молекулярных схем. Но как самостоятельная дисциплина теория графов сформировалась сравнительно недавно – в 30-е годы XX столетия.

Основные положения теории графов успешно применяются в настоящее время на транспорте, при планировании производства, в генетике, химии и других разделах науки и техники (не исключается также применение теории графов и при составлении различных головоломок).

Итак, рассмотрим геометрическое изображение графа:



или

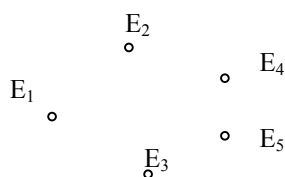


и дадим его определение.

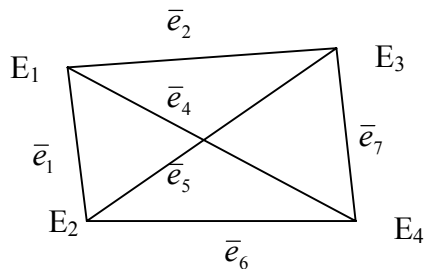
Определение. Математически конечным графом (G) называется пара (E, e) , где E – непустое конечное множество вершин, а e – конечное (возможно пустое) множество дуг или ребер. Обозначается граф через $G = (E, e)$.

Частными случаями являются:

а) нуль-граф (множество e – пустое)

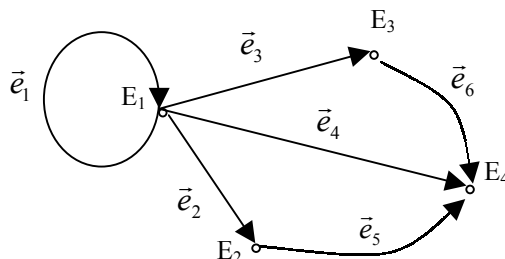


б) полный граф (все вершины связаны между собой)

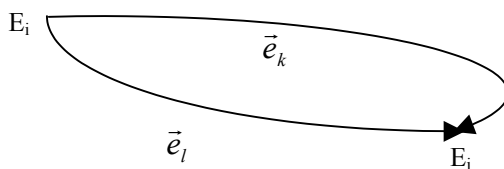


Определение. *Дугой называется ориентированная пара (E_i, E_j) вершин, где E_i – начальная вершина дуги, а E_j – конечная. Дуга на графе всегда имеет стрелку, которая показывает порядок вершин и обозначается буквой с индексом: $\vec{e}_i$.*

Определение. *Дуга вида (E_i, E_i) называется петлей.*



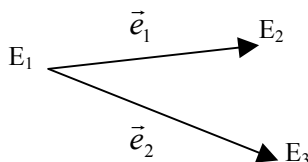
Определение. *Если начальные и конечные вершины дуг совпадают, то такие дуги называются кратными.*



Иногда две дуги с одинаковыми вершинами, но противоположной ориентацией, объединяют. Данное объединение называют **ребром**.

Определение. *Неориентированная пара (E_i, E_j) вершин графа называется ребром и обозначается $\bar{e}_i$ или $(\overline{E_i, E_j})$.*

Определение. *Если две дуги или ребра имеют хотя бы одну общую вершину, то они называются смежными.*



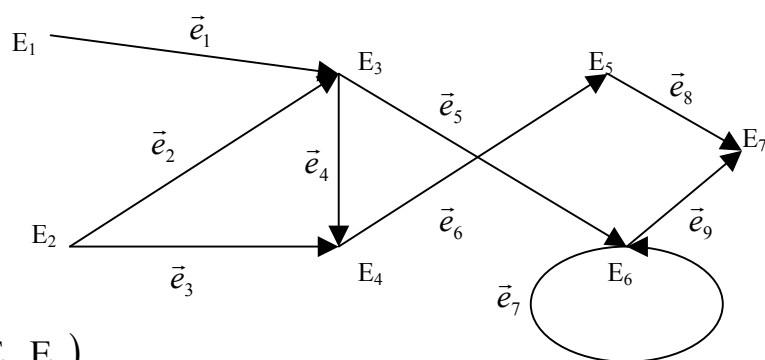
Определение **кратных ребер** аналогично определению **кратных дуг**.

Различают три типа графов:

- ориентированный;
- неориентированный;
- смешанный.

Определение. Если все связи между вершинами графа заданы дугами, то такой граф называется **ориентированным** (или **орграфом**). Орграф обозначается $G = (E, \vec{e})$, где $\vec{e}$ – множество дуг графа.

Например,



- $\vec{e}_1 = (E_1, E_3)$
- $\vec{e}_2 = (E_2, E_3)$
- $\vec{e}_3 = (E_2, E_4)$
- $\vec{e}_4 = (E_3, E_4)$
- $\vec{e}_5 = (E_3, E_6)$
- $\vec{e}_6 = (E_4, E_5)$
- $\vec{e}_8 = (E_5, E_7)$
- $\vec{e}_9 = (E_6, E_7)$
- $\vec{e}_7 = (E_6, E_6)$ – петля.

Определение. **Симметрическим** называется орграф, у которого для любой дуги $(E_i, E_j) \in \vec{e}$ дуга $(E_j, E_i) \in \vec{e}$. Если данное условие не выполняется, т.е. $(E_j, E_i) \notin \vec{e}$, то орграф называется **антисимметрическим**.

Определение. **Неориентированный** – это такой граф, у которого все связи заданы ребрами. Обозначается $G = (E, \bar{e})$, где $\bar{e}$ – множество ребер графа.

Определение. **Смешанным** называется граф, содержащий и дуги, и ребра.

Определение. Концевые точки (вершины) ребра (дуги) называются **смежными вершинами**, при этом они **инцидентны** этому ребру (дуге), а ребро **инцидентно** (дуга инцидентна) вершинам.

$$E_1 \xrightarrow{\bar{e}_1} E_2$$

E_1 и E_2 – смежные вершины.

Для каждого ориентированного графа существует понятие пути и контура. Дадим их определения:

Определение. *Путь* – это конечная последовательность дуг $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m)$, $\bar{e}_j \in \bar{e}$, у которой начало каждой последующей дуги совпадает с концом предыдущей.

Записать путь можно, например, так: $S_1 = (\bar{e}_1, \bar{e}_5, \bar{e}_9)$ или $S_2 = (\bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_6, \bar{e}_8)$.

Если на графе отсутствуют кратные дуги, то путь можно представить набором вершин, через которые он проходит $S_1 = (E_1 - E_3 - E_6 - E_7)$.

Определение. *Контур* – это путь, начальная вершина которого совпадает с конечной.

Путь и контур имеют такую характеристику, как **длина**, которая равна числу дуг, входящих в путь или контур. Так, для пути $S_1 = (\bar{e}_1, \bar{e}_5, \bar{e}_9)$ его длина равна 3.

Определение. Если дуги не повторяются, то **путь** называется **простым**, если вершины не повторяются, то **элементарным**.

Аналогичными понятиям пути и контура в ориентированном графе для неориентированного графа являются понятия цепи и цикла.

Определение. *Цепь* – последовательность ребер графа $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m)$, $\bar{e}_i \in \bar{e}$, у которой любые два соседних ребра имеют общую вершину.

Можно дать и другое определение цепи – это линия на графе, не проходящая ни по какому ребру более одного раза.

Цепь обозначается так: $\bar{S} = (\bar{e}_i, \bar{e}_j)$, или $\bar{S} = [(E_f, E_i), (E_i, E_j)]$.

Определение. Если начальная и конечная вершины цепи совпадают, то мы имеем дело с **циклом** (иначе, **цикл** – это замкнутая цепь).

Длина цепи и цикла определяется числом ребер, в них входящих.

На основании определения симметрического орграфа его можно рассматривать как неориентированный граф, причем каждому ребру соответствует пара симметрических дуг орграфа. Обратное утверждение также верно.

Неориентированный граф – это (симметрический) орграф.

Локальной степенью графа $\rho(E_i)$ в вершине E_i называется число ребер, инцидентных данной вершине.

Если $\rho(E_i) = 1$, то вершина называется висячей, если $\rho(E_i) = 0$, то изолированной.

Для орграфов существуют также такие показатели, как полустепень исхода и полустепень захода.

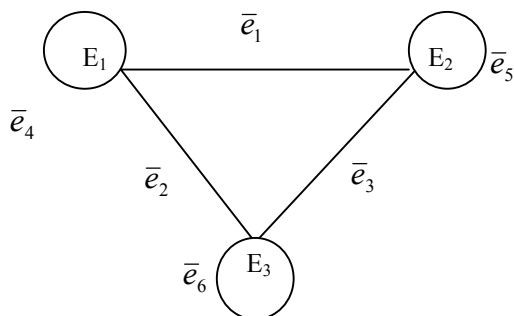
Первая величина определяется числом дуг, исходящих из вершины $\rho\left(\overset{\geq}{E}_i\right)$,

вторая – числом заходящих дуг – $\rho\left(\overset{\leq}{E}_i\right)$.

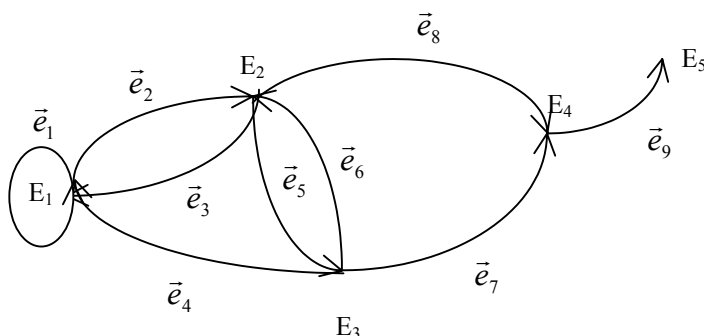
Определение. *Сильно связным* называется такой граф, для которого между каждой парой вершин $E_i, E_j \in E, E_i \neq E_j$ существует путь $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m)$ такой, что E_i является начальной вершиной пути, а E_j – конечной (иначе, это граф, у которого любые две вершины i и j можно соединить путем, идущим из i в j .)

Определение. *Связным* называется граф, который для каждой пары $E_i, E_j \in E, (E_i \neq E_j)$ его вершин имеет такую последовательность дуг или ребер, или и дуг, и ребер, что любая пара соседних элементов этой последовательности имеет общую вершину (другими словами, это граф, у которого любые две вершины можно соединить цепью.) Здесь ориентация дуг не учитывается.

Любой сильно связный граф является связным, обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

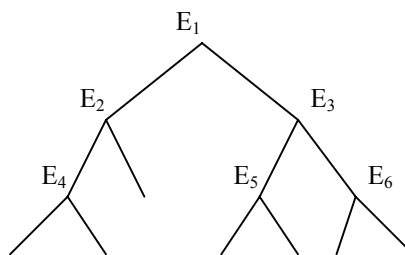


Сильно связный граф.
Он же одновременно и связный.



Связный граф, но не сильно связный, так как от вершины E_5 нет ни одного пути к другим вершинам.

Определение. *Связный неориентированный граф называется **деревом**, если он не имеет циклов.*



5.1.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФА

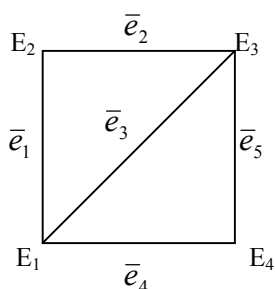
Для задания графа используются различные способы. Рассмотрим некоторые из них.

5.1.2.1. МАТРИЦЫ СМЕЖНОСТИ И ИНЦИДЕНТНОСТИ

Граф можно задать **матрицей смежности вершин**, представляющей собой прямоугольную таблицу (матрицу), каждый элемент которой показывает количество дуг, идущих из E_i -й вершины в E_j -ю.

Если $G = (E, \bar{e})$ – неориентированный граф, то соответствующая ему матрица смежности является симметрической.

Например,

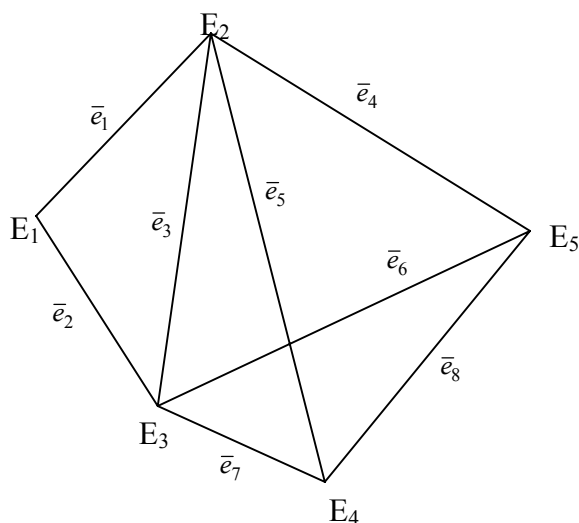
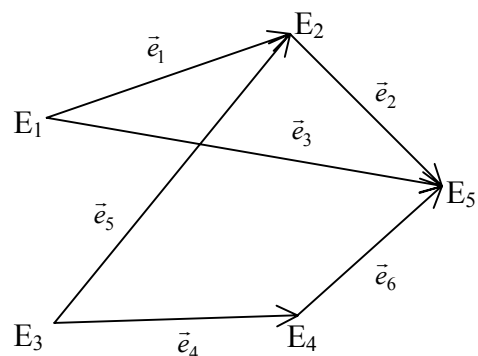


	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	0	1	1	1
E_2	1	0	1	0
E_3	1	1	0	1
E_4	1	0	1	0

Другой способ задания графа – **матрица смежности дуг (ребер)**. Для простоты будем считать, что граф не имеет петель и кратных ребер.

Это – квадратичная матрица, у которой каждый ij -й элемент равен единице, если конечная вершина дуги $\bar{e}_i$ и начальная вершина дуги $\bar{e}_j$ совпадают (или ребра имеют общую вершину), и нулю – в остальных случаях.

Построим, например, матрицы для следующих графов:

А**Б**

Матрица для графа **А** будет симметрической, так как граф неориентированный, а для графа **Б** – несимметрической.

Матрица смежности ребер для графа **А**:

	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$	$\bar{e}_4$	$\bar{e}_5$	$\bar{e}_6$	$\bar{e}_7$	$\bar{e}_8$
$\bar{e}_1$	0	1	1	1	1	0	0	0
$\bar{e}_2$	1	0	1	0	0	1	1	0
$\bar{e}_3$	1	1	0	1	1	1	1	0
$\bar{e}_4$	1	0	1	0	1	1	0	1
$\bar{e}_5$	1	0	1	1	0	0	1	1
$\bar{e}_6$	0	1	1	1	0	0	1	1
$\bar{e}_7$	0	1	1	0	1	1	0	1
$\bar{e}_8$	0	0	0	1	1	1	1	0

Матрица смежности ребер для графа **Б**:

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$	$\vec{e}_6$
$\vec{e}_1$	0	1	0	0	0	0
$\vec{e}_2$	0	0	0	0	0	0
$\vec{e}_3$	0	0	0	0	0	0
$\vec{e}_4$	0	0	0	0	0	1
$\vec{e}_5$	0	1	0	0	0	0
$\vec{e}_6$	0	0	0	0	0	0

Рассмотрим матрицу инцидентности графа.

Матрица инцидентности – это прямоугольная матрица, у которой строки соответствуют вершинам, а столбцы – дугам. При этом предполагается, что граф не имеет петель. Элементами матрицы являются следующие величины: 1, –1 или 0.

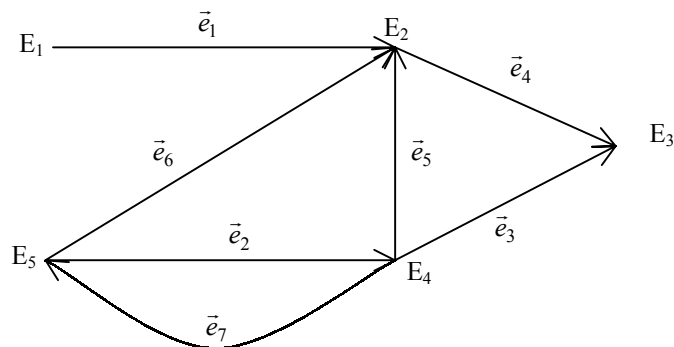
Причем, если E – начальная вершина дуги $\vec{e}$, то в матрице на пересечении этих величин стоит 1 (иначе $\varepsilon(E, \vec{e}) = 1$).

Если E – конечная вершина дуги $\vec{e}$, то в матрице стоит -1 : $\varepsilon(E, \vec{e}) = -1$.

Если вершина E неинцидентна дуге $\vec{e}$, то $\varepsilon(E, \vec{e}) = 0$.

Если граф не является ориентированным, то полагают, что $\varepsilon = 0 \forall 1$.

Пример.

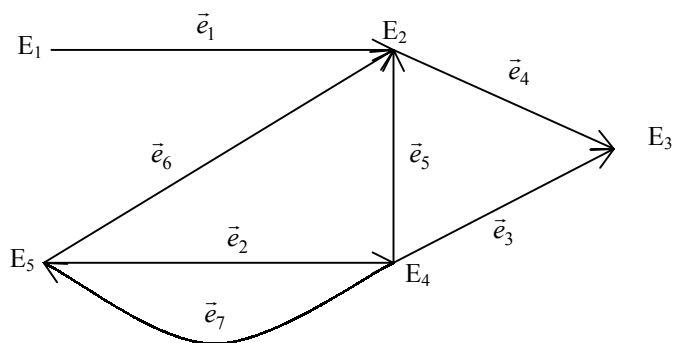


$E_i \quad \vec{e}_j$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$	$\vec{e}_6$	$\vec{e}_7$
E_1	1	0	0	0	0	0	0
E_2	-1	0	0	1	-1	-1	0
E_3	0	0	-1	-1	0	0	0
E_4	0	-1	1	0	1	0	1
E_5	0	1	0	0	0	1	-1

5.1.2.2. СПИСКОВЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ГРАФА

Матричный способ не всегда удобен для задания графа. Поэтому используется другой способ – **списковый**, который основан на записи с помощью определенных соотношений связей между вершинами графа.

Пусть ΓE_i – множество вершин, которые соединены с вершиной E_i дугами, исходящими из нее. Тогда орграф можно представить в следующем виде:



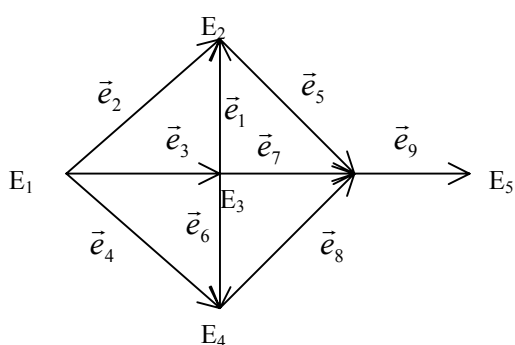
$$\begin{aligned}
 \Gamma E_1 &= \{E_2\}, \\
 \Gamma E_2 &= \{E_3\}, \\
 \Gamma E_3 &= \emptyset, \\
 \Gamma E_4 &= \{E_2, E_3, E_5\}, \\
 \Gamma E_5 &= \{E_2, E_4\}.
 \end{aligned}$$

Иногда вместо записи $G = (E, \vec{e})$ используется запись $G = (E, \Gamma)$, так как множество дуг $\{\vec{e}\}$ и отображение (Γ) взаимно определяют друг друга. Аналогично можно представить неориентированные графы.

5.1.2.3. ЗАДАНИЕ ГРАФА С ПОМОЩЬЮ СТРУКТУРНОЙ ТАБЛИЦЫ

Данный способ учитывает дуги и информацию о том, на какие дуги они опираются.

Считается, что дуга $\vec{e}_i$ предшествует дуге $\vec{e}_j$ или дуга $\vec{e}_j$ опирается на дугу $\vec{e}_i$, если конечная вершина дуги $\vec{e}_i$ совпадает с начальной вершиной дуги $\vec{e}_j$. Приведем пример построения структурной таблицы для следующего графа:



Дуга графа	Опирается на дуги
$\vec{e}_1$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_2$	—
$\vec{e}_3$	—
$\vec{e}_4$	—
$\vec{e}_5$	$\vec{e}_2, \vec{e}_1$
$\vec{e}_6$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_7$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_8$	$\vec{e}_4, \vec{e}_6$
$\vec{e}_9$	$\vec{e}_5, \vec{e}_7, \vec{e}_8$