ГЛАВА 6. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.1. ВВЕДЕНИЕ В ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Значительная часть экономических задач предполагает целочисленное решение. Примерами таких задач являются задачи загрузки оборудования, строительства судов на судоверфи, раскроя промышленных материалов, планирования поголовья скота, распределения транспортных средств по видам работ и т.д. Во всех таких случаях к обычной формулировке задачи добавляется **требование целочисленности переменных.** Например,

$$\begin{aligned} &\max Z = 3x_1 + 2x_2, \\ &2x_1 + 2x_2 \le 12, \\ &x_1, x_2 \ge 0, \\ &x_1, x_2 - \text{целые.} \end{aligned} \qquad (6.1)$$

В данном случае мы имеем дело с **полностью целочисленной задачей линейного программирования**.

Задача может быть поставлена с условием, что только какая-то часть переменных является целочисленной, а остальные могут принимать как целые, так и дробные значения. В этом случае имеем дело с **частично-целочисленной задачей**. Например,

$$\begin{aligned} &\max Z = 3x_1 + 2x_2, \\ &2x_1 + 2x_2 \le 12, \\ &x_1, x_2 \ge 0, \\ &x_1 - \text{целая.} \end{aligned} \qquad (6.1')$$

Таким образом, переменная x_2 не обязательно должна быть целой. Можно также рассмотреть задачу, в которой переменные x_j принимают значения 0 или 1. Например,

$$\begin{aligned} &\max Z = x_1 - x_2, \\ &5x_1 + 10x_2 \le 10, \\ &4x_1 - 2x_2 \le 2, \\ &x_1, x_2 = 0 \text{ или } 1. \end{aligned} \qquad (6.2)$$

Такого рода задачи носят название задач с **булевыми переменными**.

Задача линейного программирования, полученная путем отмены условия целочисленности или ограничения типа «0 или 1», называется **линейно-ослабленной задачей целочисленного программирования.** Например, задача

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2,$$
$$2x_1 + 2x_2 \le 12, \qquad (6.1'')$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

является линейно-ослабленной задачей по отношению к (6.1). Задача

$$\max Z = x_1 - x_2,$$
$$5x_1 + 10x_2 \le 10,$$
$$4x_1 - 2x_2 \le 2, \qquad (6.2')$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

является линейно-ослабленной по отношению к задаче (6.2).

Любая задача целочисленного программирования может быть рассмотрена как соответствующая линейно-ослабленная модель плюс дополнительные ограничения на целочисленность переменных или условие типа «0 или 1».

Следовательно, ослабленная линейная модель является менее ограниченной или более свободной версией задачи целочисленного программирования. Это означает, что область допустимых значений любой задачи целочисленного программирования должна входить в ОДЗ соответствующей линейно-ослабленной задачи. Для любой задачи на максимум это означает, что оптимальное значение целевой функции ослабленной задачи всегда не меньше оптимального значения целевой функции задачи целочисленного программирования

$$Z_{лп.}^{опт.} \ge Z_{цп.}^{опт.},$$

для задачи на минимум – не больше

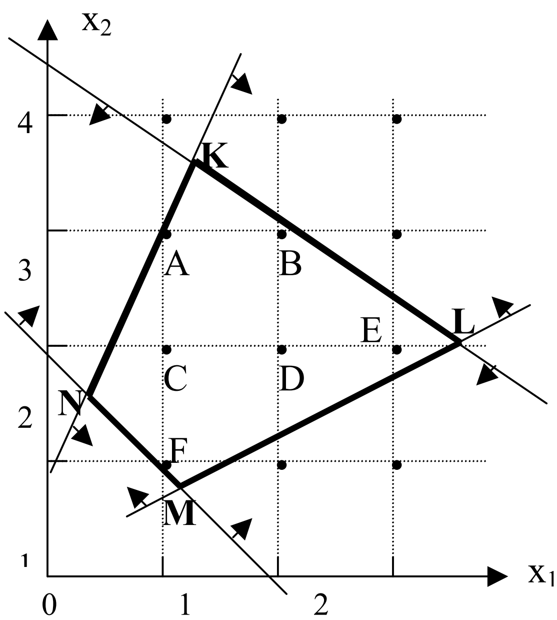
$$Z_{лп.}^{опт.} \le Z_{цп.}^{опт.}.$$

В случае если ОДЗ линейно-ослабленной задачи по отношению к задаче целочисленного программирования является ограниченной, то ОДЗ задачи целочисленного программирования содержит конечное множество точек.

Теоретически, такая задача целочисленного программирования может быть решена путем пересчета значений целевой функции для каждой допустимой точки и определения точки с наибольшим значением Z. Но такой подход требует больших затрат времени, особенно тогда, когда задача целочисленного программирования имеет большую размерность.

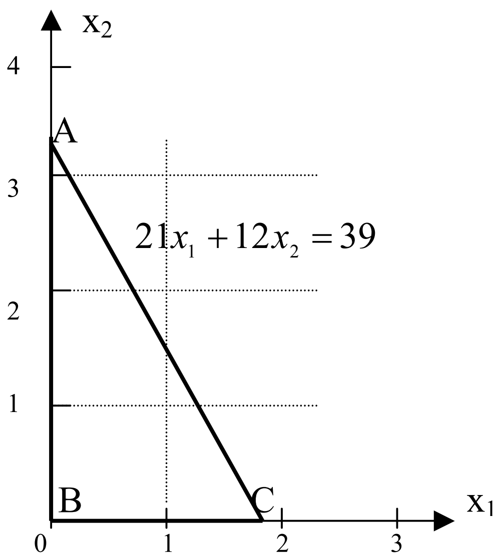
Приведенный ниже графический пример показывает, что областью допустимых значений некоторой задачи целочисленного программирования являются точки *A*,*B*,*C*,*D*,*E* и *F*.

В то же время, для линейно-ослабленной задачи, построенной на базе данной задачи целочисленного программирования, областью допустимых значений является площадь, ограниченная четырехугольником *KLMN*.



Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \max Z &= 42x_1 + 22x_2, \\ 21x_1 + 12x_2 &\le 39, \\ x_1, x_2 &\ge 0, \\ x_1, x_2 &- \text{целые}. \end{aligned} \qquad (6.3)$$



Приведенная на рисунке область допустимых значений данной задачи, содержит следующий набор точек: $S = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1)\}$. Как видим, все точки имеют целочисленные координаты.

В отличие от ОДЗ любой задачи линейного программирования, ОДЗ задачи (6.3) не является выпуклым множеством точек. Исходя из этого, можно дать определение области допустимых значений задачи целочисленного программирования.

Определение. ***Область допустимых значений задачи целочисленного программирования*** *– это множество целочисленных точек, удовлетворяющих ограничениям задачи и ограничениям на знак.*

Методом простого расчета и сравнения значений целевой функции для каждой из 6-ти точек ОДЗ находим оптимальное решение задачи (6.3) $Z = 66$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Таким образом, на практике используются, по крайней мере, **три подхода к решению задач целочисленного программирования**:

1. Путем перебора всех целочисленных точек ОДЗ и расчета для каждой из них значения целевой функции с последующим выбором наилучшего.

2. Путем округления полученных нецелочисленных решений до целых (в случае, когда искомая единица составляет незначительную часть от общего значения переменной).

3. Путем построения дополнительных ограничений в рамках имеющейся ОДЗ с целью отсечения нецелочисленных значений переменных.

Метод округлений, хотя и более удобный, но не всегда позволяет получить действительно оптимальное решение задачи целочисленного программирования. В качестве примера попробуем округлить значения переменных для линейно-ослабленной задачи по отношению к задаче (6.3).

Оптимальное решение задачи линейного программирования следующее:

$$Z = 78, x_1 = 1\frac{6}{7}, x_2 = 0.$$

Округляя его в большую сторону, получим $x_1 = 2, x_2 = 0$. Но эта точка лежит вне ОДЗ. Если округлим в меньшую сторону, то получим $x_1 = 1, x_2 = 0$. В этом случае решение далеко от оптимального при $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$ $Z = 42$.

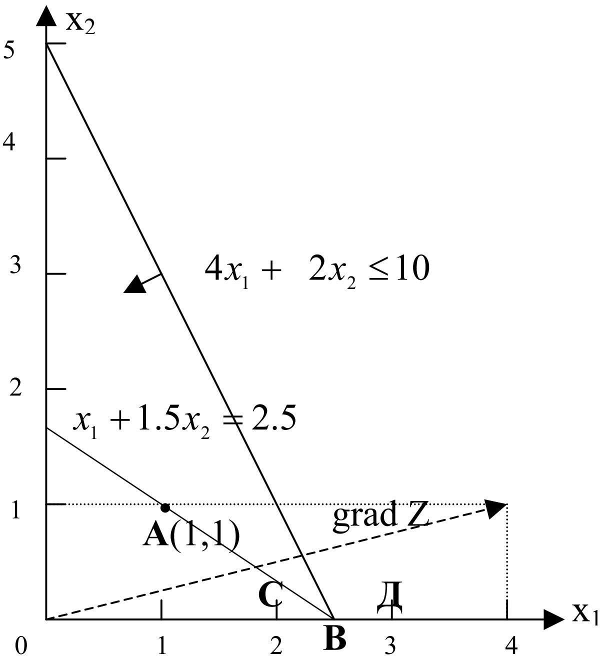
Оптимальной же точкой, как было уже показано, является точка с координатами $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. При этом $Z = 66$.

Для задачи

$$\begin{aligned}
\max Z = 6x_1 + 1.5x_2, \\
4x_1 + 2x_2 \le 10, \\
x_1 + 1.5x_2 = 2.5, \\
x_1, x_2 \ge 0, \\
x_1, x_2 - \text{целые.}
\end{aligned}$$

ни одно из округлений оптимального решения $\left(Z = 10, x_1 = \dfrac{5}{2}, x_2 = 0\right)$: ни $x_1 = 2, x_2 = 0$, ни $x_1 = 3, x_2 = 0$ не входит в ОДЗ. Это иллюстрирует ошибочность метода округления.

На графике, приведенном ниже, точка В соответствует оптимальному решению задачи линейного программирования; С и Д – точки округления; А – точка, соответствующая оптимальному решению задачи целочисленного программирования.



6.2. ФОРМУЛИРОВКИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

6.2.1. ПРОБЛЕМА КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЙ

Компания рассматривает возможность инвестирования средств по четырем направлениям: инвестиции №1 принесут чистый доход в размере 16000 грн., инвестиции №2 – 22000 грн., инвестиции №3 – 12000 грн. и инвестиции №4 – 8000 грн.

Каждый из четырех видов инвестиций требует определенного вложения средств в настоящее время: №1 – 5000 грн., №2 – 7000 грн., №3 – 4000 грн., №4 – 3000 грн.

В распоряжении компании имеется 14000 грн. Сформулируйте модель целочисленного программирования, которая бы позволила максимизировать чистый доход, полученный от инвестиций.

Решение.

Определим переменные

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если инвестиции } j \text{ осуществлены} \\ 0, & \text{если инвестиции } j \text{ не осуществлены} \end{cases} \qquad \left(j = \overline{1,4}\right).$$

Общий чистый доход будет определяться выражением

$$NPV = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 .$$

Компания заинтересована в максимизации данного выражения:

$$\max Z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 .$$

Общее количество инвестируемых средств не должно превышать 14000 грн., т.е.

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 14 .$$

Объединяя полученные выражения с условием изменения переменной x_j, получаем модель целочисленного программирования с булевыми переменными

$$\max Z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 ,$$
$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 14,$$
$$x_j = 0 \text{ или } 1,\ j = \overline{1,4}.$$

В качестве решения задачи может рассматриваться любая комбинация значений x_j, удовлетворяющая ограничению по использованию средств. Например, $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$. При этом *Z* будет равно 30. Количество используемых средств равно $10 = 7 \times 1 + 3 \times 1$.

Оптимальное решение приносит следующая комбинация:

$$x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, Z = 42 .$$

При этом все средства, отводимые для инвестирования, используются полностью

$$5 \times 0 + 7 \times 1 + 4 \times 1 + 3 \times 1 = 14 .$$

Примечательно, что инвестиции №1, приносящие больше всего дохода на 1 грн. вложенных средств (3.2), не входят в оптимальный план. Для сравнения: инвестиции №2 приносят 3.14 грн. дохода в расчете на 1 грн., инвестиции №3 – 3, инвестиции №4 – 2.67. Дело в том, что любая комбинация инвестиций, использующая инвестиции №1, не позволяет вложить все средства (можно вложить не более 12000 грн.). Таким образом, неинвестированными остаются 2000 грн. С другой стороны, оптимальная комбинация позволяет использовать все средства.

Если бы были возможны частичные вложения средств, то оптимальной была бы стратегия

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, Z = 44 .$$

Любая задача, подобная рассмотренной, относится к так называемой ***задаче о рюкзаке***.

Суть задачи о рюкзаке заключается в том, что *из набора предметов, которые могут понадобиться в походе, необходимо подобрать такое их сочетание, которое бы принесло максимальную пользу. Ограничивающим условием является либо вес помещающихся в рюкзаке вещей, либо объем.*

Модифицируем задачу об инвестициях с учетом трех дополнительных условий:

1. Компания может инвестировать средства не более чем по двум направлениям;
2. Если компания вложит средства в инвестиции №2, то она должна также инвестировать средства и в инвестиции №1;

3. Если компания вкладывает средства в инвестиции №2, то она не может инвестировать средства в инвестиции №4.

Чтобы выполнить первое условие, необходимо в модель добавить ограничение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 2 .$$

Ограничения подобного типа называются условием выполнения **«не более *k* альтернатив из *n*».**

Второе условие предполагает, что, если $x_2 = 1$, то x_1 тоже должно быть равно 1. Для того чтобы это условие учесть в модели, мы должны добавить в нее ограничение

$$x_2 \le x_1 \qquad \text{или}$$

$$x_2 - x_1 \le 0 \qquad (6.4)$$

Чтобы проверить правильность данного ограничения с точки зрения удовлетворения второго условия, рассмотрим два случая $x_2 = 1$ и $x_2 = 0$.

<u>1-й случай.</u> Пусть $x_2 = 1$.

Если $x_2 = 1$, то ограничение (6.4) подразумевает, что

$$x_1 \ge 1.$$

Так как переменная x_1 может быть равна либо нулю $(x_1 = 0)$, либо единице $(x_1 = 1)$, то это приведет к тому, что x_1 будет равна единице $(x_1 = 1)$, что требуется по условию 2.

<u>2-й случай.</u> Пусть $x_2 = 0$.

В этом случае ограничение (6.4) уменьшается до $x_1 \ge 0$, что позволяет x_1 принять значение либо 0, либо 1. Это также согласуется с условием 2.

Рассмотренный тип ограничений носит название **«зависимых условий»**.

Третье условие описывается ограничением типа

$$x_2 + x_4 \le 1.$$

Также как и в предыдущем случае, рассмотрим возможность принятия переменной x_2 двух значений: 0 или 1.

<u>1-й случай.</u> Пусть $x_2 = 1$.

Это означает, что инвестиции №2 осуществлены. Тогда компания не может помещать средства в инвестиции №4 (т.е. переменная x_4 должна быть равна 0).

Если $x_2 = 1$, то это означает, что

$$1 + x_4 \le 1 \qquad \text{или}$$

$$x_4 = 0 .$$

Таким образом, условие 3 выполняется.

2-й случай. Пусть $x_2 = 0$.

В этом случае ограничение, соответствующее 3-му условию, не лимитирует значение переменной x_4: она может быть равной либо 0, либо 1

$$0 + x_4 \le 1.$$

Данный тип ограничений будет также рассмотрен в §6.3.2.

6.2.2. ПРОБЛЕМЫ С ФИКСИРОВАННЫМИ РАСХОДАМИ

При расчете затрат на производство естественным считается учитывать фиксированные затраты или затраты на подготовку к осуществлению определенного вида деятельности. Такие затраты имеют место, как правило, когда продукция выпускается небольшими партиями и периодически возникает необходимость в переналадке оборудования. В данных случаях общие затраты – это сумма переменных затрат, связанных с определенным уровнем активности (расход сырья, материалов, затраты на оплату труда и т.д.), и постоянных расходов, необходимых для осуществления подобной деятельности.

Рассмотрим **пример**, иллюстрирующий данную ситуацию.

Компания «Сафари» по производству одежды может производить три типа одежды: рубашки, шорты и брюки. Для производства каждого вида одежды необходимо оборудование различных типов. Данное оборудование может быть арендовано по следующим ценам: для производства рубашек – 200 грн. в неделю, для производства шортов – 150 грн., для производства брюк – 100 грн. Затраты материи и рабочей силы на каждый из видов продукции приведены в таблице

Продукция	***Труд (часы)***	***Материя ($м^2$)***
Рубашка	*3*	*4*
Шорты	*2*	*3*
Брюки	*6*	*4*

В распоряжении компании еженедельно имеется 150 часов рабочего времени и 160 $м^2$ материи. Переменные затраты и цена продажи на единицу продукции каждого вида приведены в таблице

Продукция	***Цена продажи, грн.***	***Переменные затраты, грн.***
Рубашка	*12*	*6*
Шорты	*8*	*4*
Брюки	*15*	*8*

Сформулируйте модель целочисленного программирования для максимизации недельной прибыли компании «Сафари».

Решение.

Определим переменные

x_1 – количество рубашек, производимых еженедельно;

x_2 – количество шортов, производимых еженедельно;

x_3 – количество пар брюк, производимых еженедельно.

Заметим, что стоимость аренды оборудования зависит только от типа производимой одежды, но не от ее количества. Это дает нам возможность использовать переменные

$$y_1 = \begin{cases} 1, & \text{если выпускается одна или больше рубашек}, \\ 0, & \text{если не выпускается}, \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1, & \text{если хотя бы одна единица шортов выпускается}, \\ 0, & \text{если не выпускается}, \end{cases}$$

$$y_3 = \begin{cases} 1, & \text{если выпускается одна пара брюк или больше}, \\ 0, & \text{если не выпускается}. \end{cases}$$

С помощью этих переменных можно отразить затраты на аренду оборудования. Переменные y_i будут отличны от 0 в том случае, когда соответствующие x_i также отличны от нуля. Недельная прибыль компании выразится с помощью следующей функции:

$$\max Z = 12x_1 + 8x_2 + 15x_3 - 6x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3 =$$
$$= 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3.$$

Два типа ограничений должны отражать условия по использованию в производстве рабочего времени (1) и материи (2)

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 150 \qquad \text{(труд)},$$

$$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 160 \qquad \text{(материя)}.$$

В модели должна также найти отражение связь между производством конкретного типа продукции и арендой соответствующего оборудования. Для того чтобы учесть это условие, введем большие числа M_1, M_2 и M_3.

Ограничения, показывающие вышеуказанную связь, запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &\le M_1 y_1, \\ x_2 &\le M_2 y_2, \\ x_3 &\le M_3 y_3. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Проверим, как «работают» данные ограничения. Так, если, например, $x_1 > 0$, то переменная y_1 не может быть равной 0.

Для случая, когда $y_1 = 0$, переменная x_1 должна быть меньше или равна 0:

$$x_1 \le 0 \qquad \text{или}$$
$$x_1 = 0.$$

Таким образом, если $x_1 > 0$, то $y_1 = 1$. Если хотя бы одна рубашка производится (т.е. $x_1 > 0$), то это будет означать, что $y_1 = 1$ и, следовательно, затраты на аренду будут включены в целевую функцию.

Заметим, что, если $y_1 = 1$, то это приводит к тому, что $x_1 \le M_1$. Это выражение, тем не менее, не должно ограничивать значение x_1 сверх имеющихся ограничений, наложенных на данную переменную. Если M_1 выбрано не очень большим, то такая ситуация может возникнуть, что не является верным. Поэтому значения M_i подбираются равными максимально допустимым значениям выпуска соответствующих видов продукции (исходя из мощности и наличия сырья).

В нашей задаче

$$M_1 = \min\{150/3; 160/4\} = \min\{50; 40\} = 40,$$

$$M_2 = \min\{150/2; 160/3\} = \min\{75; 53.3\} = 53 \text{ и}$$

$$M_3 = \min\{150/6; 160/4\} = \min\{25; 40\} = 25.$$

При $x_1 = 0$ ограничение (6.5) превращается в

$$0 \le M_1 y_1$$

Это позволяет y_1 принять значение либо 0, либо 1. Так как $y_1 = 0$ менее «затратно» для оптимального решения, то нет сомнений, что при $x_1 = 0$ переменная y_1 будет равна 0.

В окончательном виде модель задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\max Z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3&,\\
3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &\le 150,\\
4x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\le 160,\\
x_1 \qquad\qquad\quad &\le 40y_1,\\
x_2 \qquad &\le 53y_2,\\
x_3 &\le 25y_3,
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 - \text{целые},$$
$$y_1, y_2, y_3 - 0 \text{ или} 1.$$

Оптимальное решение задачи $Z = 75, x_3 = 25, y_3 = 1$. Таким образом, компания должна производить ежедневно по 25 пар брюк.

Рассмотренная задача относится к задачам с **фиксированными расходами**, когда затраты ассоциируются с выполнением некоторого действия на уровне, отличном от нуля, независимо от того, каков этот уровень активности.

В общем виде условие включения в целевую функцию или ограничение фиксированных затрат может быть представлено следующим образом:

$$f_j(x_j) = \begin{cases} c_j x_j + k_j, & \text{если } x_j > 0 \\ 0, & \text{если } x_j = 0, \end{cases}$$

где x_j определяет уровень активности *j* $(x_j \ge 0)$; k_j – затраты, ассоциирующиеся с данной активностью (например, затраты на подготовительные операции, связанные с наладкой и переналадкой оборудования, затраты на аренду и т.д.).

Проблемы, в которых человек, принимающий решение, должен выбрать место, где расположить мощности, часто относятся к числу задач с фиксированными затратами, при этом затраты связываются со строительством или управлением данными мощностями.

6.2.3. ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕКРЫТИЯ НАБОРА ЭЛЕМЕНТОВ

В проблемах такого типа каждый элемент из заданного множества элементов должен быть «перекрыт» приемлемым элементом некоторого другого множества. Цель состоит в том, чтобы определить минимальное число перекрывающих элементов. Рассмотрим **пример**.

В некотором районе имеется 6 городов. Необходимо определить, где построить пожарные станции. В районе должно быть построено минимальное количество этих станций. При этом необходимо учитывать условие, чтобы, по крайней мере, одна пожарная станция находилась в 15 минутах езды от каждого из городов. Время езды между городами района приведено в таблице

Из города	*В город*					
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	*0*	*10*	*20*	*30*	*30*	*20*
2	*10*	*0*	*25*	*35*	*20*	*10*
3	*20*	*25*	*0*	*15*	*30*	*20*
4	*30*	*35*	*15*	*0*	*15*	*25*
5	*30*	*20*	*30*	*15*	*0*	*14*
6	*20*	*10*	*20*	*25*	*14*	*0*

Требуется сформулировать модель целочисленного программирования для определения числа пожарных станций, которые следует построить в районе, и мест расположения этих станций.

Решение.

Для каждого города определим переменную x_i, принимающую значение 0 или 1 и определяющую строительство $(x_i = 1)$ или нестроительство $(x_i = 0)$ пожарной станции в *i*-м городе.

Общее количество пожарных станций определяется суммой

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6,$$

оно должно быть минимальным, т.е.

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6.$$

Ограничения модели должны отражать условие того, чтобы пожарная станция находилась в 15 минутах езды от каждого города. Для построения ограничений рассмотрим таблицу, в которой отразим достижимость городов из каждого другого города в 15-минутный интервал времени

Город отправления	Город назначения
1	1,2
2	1,2,6
3	3,4
4	3,4,5
5	4,5,6,
6	2,5,6

С учетом данных этой таблицы построим ограничения:

Для города 1 $x_1 + x_2 \geq 1$ (хотя бы одна станция находится в 15 минутах езды от городов 1 и 2),

для города 2 $x_1 + x_2 + x_6 \geq 1$,

для города 3 $x_3 + x_4 \geq 1$,

для города 4 $x_3 + x_4 + x_5 \geq 1$,

для города 5 $x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$,

для города 6 $x_2 + x_5 + x_6 \geq 1$,

$x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1,6}$.

Оптимальное решение задачи $Z = 2,\ x_2 = x_4 = 1,\ x_1 = x_3 = x_5 = x_6 = 0.$

Таким образом, необходимо построить только две пожарные станции во втором и четвертом городах.

6.3. ЗАДАЧИ С АЛЬТЕРНАТИВНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

6.3.1. ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА «ИЛИ-ИЛИ»

Данные задачи требуют, чтобы из пары ограничений типа

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ &g(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \end{aligned} \qquad (6.6)$$

по крайней мере, одно удовлетворялось. Такие ограничения носят название **ограничений типа “или-или”**.

Чтобы включить подобные ограничения в модель, пользуются следующей формой записи:

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, ..., x_n) \le My, \\ &g(x_1, x_2, ..., x_n) \le M(1 - y), \\ &y = 0 \vee 1, \end{aligned} \qquad (6.7)$$

где *M* – достаточно большое число, чтобы быть уверенным в том, что

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, ..., x_n) \le M \quad \text{и} \\ &g(x_1, x_2, ..., x_n) \le M. \end{aligned}$$

Убедимся, что включение в модель ограничений (6.7) обеспечит выполнение хотя бы одного из ограничений (6.6). Переменная *y* может принимать два значения: 0 или 1.

Пусть $y = 0$, тогда (6.7) превращается в

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ &g(x_1, x_2, ..., x_n) \le M. \end{aligned}$$

Так, если $y = 0$, то, по крайней мере, одно из ограничений из системы (6.6) выполняется точно (и, возможно, второе тоже выполнится).

Когда $y = 1$, ограничения (6.7) превращаются в

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, ..., x_n) \le M, \\ &g(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0. \end{aligned}$$

Ситуация аналогична только что рассмотренной, только со сменой ограничений.

Пример.

Компания рассматривает возможность производства автомобилей трех типов: компактных автомобилей, автомобилей среднего размера и *больших автомобилей. Необходимые для их производства ресурсы и приносимая прибыль приведены в таблице*

Ресурс	*Компактный автомобиль*	*Автомобиль среднего размера*	*Автомобиль большого размера*
Сталь	*1.5 т*	*3 т*	*5 т*
Труд	*30 часов*	*25 часов*	*40 часов*
Прибыль	*2000 грн.*	*3000 грн.*	*4000 грн.*

В настоящее время в распоряжении компании имеется 6000 т стали и 60000 часов рабочего времени. Для того чтобы производство любого вида автомобиля было экономически оправданным, необходимо выпускать не менее 1000 автомобилей этого типа.

Требуется сформулировать модель целочисленного программирования для максимизации прибыли компании.

Решение.

Определим переменные

x_1 – количество производимых компактных автомобилей;

x_2 – количество производимых автомобилей среднего размера;

x_3 – количество производимых автомобилей большого размера.

С учетом этого прибыль определится в размере

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3.$$

Мы знаем, что если производство автомобилей будет осуществлено, то их количество должно быть не меньше 1000, в противном случае соответствующая переменная x_i должна быть меньше либо равна нулю. Таким образом, для $i = 1,2,3$ мы имеем дело с ограничениями

$$x_i \le 0 \text{ или } x_i \ge 1000.$$

Кроме того, компания имеет ограниченные ресурсы: сталь и рабочее время. Для записи ограничений по выпуску автомобилей определим функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ для первого вида автомобилей следующим образом (ограничения типа (6.6))

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \\ g(x_1, x_2, ..., x_n) = 1000 - x_1 \end{cases}.$$

Заменяем ограничения типа (6.6) $x_i \le 0$, $x_i \ge 1000$ ограничениями типа (6.7)

$$\begin{cases} x_1 \le M_1 y_1 \\ 1000 - x_1 \le M_1(1 - y_1) \end{cases},$$
$$y_1 = 0 \vee 1.$$

Значение M_1 необходимо выбрать достаточно большим, чтобы быть уверенным, что ни x_1, ни $1000 - x_1$ никогда его не превысит.

Максимальный выпуск компактных автомобилей определяется количеством имеющегося в распоряжении компании рабочего времени $\frac{60000}{30} = 2000$ (сталь еще будет оставаться в некотором количестве).

Таким образом, $M_1 = 2000$.

Аналогично для второго типа автомобилей

$$\begin{cases} x_2 \le M_2 y_2 \\ 1000 - x_2 \le M_2(1 - y_2) \end{cases}, \qquad M_2 = 2000,$$
$$y_2 = 0 \vee 1.$$

Для больших автомобилей запишем

$$\begin{cases} x_3 \le M_3 y_3 \\ 1000 - x_3 \le M_3(1 - y_3) \end{cases}, \qquad M_3 = 1200,$$
$$y_3 = 0 \vee 1.$$

Ограничение по использованию стали

$$1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 6000.$$

Ограничение по использованию рабочего времени

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \le 60000.$$

С учетом условий целочисленности и неотрицательности x_i модель выглядит следующим образом:

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,$$
$$x_1 \le 2000y_1,$$
$$1000 - x_1 \le 2000(1 - y_1),$$
$$x_2 \le 2000y_2,$$
$$1000 - x_2 \le 2000(1 - y_2),$$

$$x_3 \le 1200 y_3,$$
$$1000 - x_3 \le 1200(1 - y_3),$$
$$1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 6000,$$
$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \le 60000,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0,$$
$$y_1, y_2, y_3 = 0 \vee 1.$$

Оптимальное решение задачи $Z = 6000, x_2 = 2000, y_2 = 1, y_1 = y_3 = x_1 = x_3 = 0$.

Если условие по производству минимум 1000 автомобилей не учитывать, то оптимальным будет следующее решение: $Z = 6285$, $x_1 = 570$, $x_2 = 1715$, $x_3 = 0$.

6.3.2. ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА «ЕСЛИ, ТО»

Во многих случаях возникает ситуация, когда мы хотели бы быть уверенными в том, что, если ограничение $f(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ выполняется, то ограничение $g(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0$ также выполняется. И пока $f(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ не выполняется, ограничение $g(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0$ может выполняться, а может и не выполняться. Иначе, мы хотим быть уверенными в том, что выполнение ограничения $f(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ влечет за собой выполнение ограничения $g(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0$. Для того чтобы отразить данное условие, в модель вводятся следующие ограничения:

$$\begin{aligned} &-g(x_1, x_2, ..., x_n) \le My, \\ &f(x_1, x_2, ..., x_n) \le M(1 - y), \\ &y = 0 \vee 1. \end{aligned} \qquad (6.8)$$

где *M* – большое положительное число.

Число M должно быть выбрано достаточно большим, чтобы условия

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \le M,$$
$$-g(x_1, x_2, ..., x_n) \le M.$$

выполнялись для всех значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, которые удовлетворяют остальным ограничениям модели.

Чтобы убедиться в том, что эти ограничения правильно отражают указанные условия, рассмотрим два случая:

1) когда $f > 0$ выполняется;
2) когда $f > 0$ не выполняется.

1) пусть $f > 0$ выполняется. Тогда условия (6.8) выполняются в том случае, когда $y = 0$. Это предполагает $-g \le 0$ или $g \ge 0$, что и требовалось.

2) пусть $f > 0$ не выполняется. Тогда переменная y может быть равна либо 0, либо 1. При $y = 1$ условие $-g \le M$ автоматически выполняется. Так, если $f > 0$ не выполняется, то значения $x_1, x_2, ..., x_n$ – не ограничены, и оба случая: $g < 0$ или $g \ge 0$ возможны. Для иллюстрации рассмотрим следующую проблему.

Проблема почтовых ящиков

Джон Николс получает оплату по кредитным карточкам из четырех регионов страны (с Запада, со Среднего Запада, Востока и Юга). Средняя дневная стоимость посылаемых клиентами платежей следующая: с Запада – 70000, со Среднего Запада – 50000, с Востока – 60000, с Юга – 40000. Николс должен решить, куда клиентам посылать свои платежи. Так как Николс может получить 20% годовых, инвестируя доходы, он хотел бы получить платежи как можно быстрее. Николс рассматривает возможность осуществления операций по обработке платежей в четырех городах: Лос-Анджелесе, Нью-Йорке, Чикаго и Атланте. Среднее количество дней, с того момента, когда платежи отправлены, до дня, когда чеки подтверждаются и Николс может вкладывать свои деньги, зависит от города, куда посланы платежи. Данные приведены ниже в таблице.

Годовая стоимость содержания в городе почтового ящика составляет 50000. Сформулируйте задачу целочисленного программирования, которая бы позволила Николсу минимизировать затраты, связанные с потерей дохода от инвестиций и от операций с почтовыми ящиками. Предположите, что каждый регион должен посылать деньги только в один город и что количество денег, которое может содержаться в каждом почтовом ящике, не ограничено.

Откуда	*Куда*			
	Город 1 Лос-Анджелес	*Город 2 Чикаго*	*Город 3 Нью-Йорк*	*Город 4 Атланта*
Регион 1 Запад	*2*	*6*	*8*	*8*
Регион 2 Средний Запад	*6*	*2*	*5*	*5*
Регион 3 Восток	*8*	*5*	*2*	*5*
Регион 4 Юг	*8*	*5*	*5*	*2*

Решение.

Николс должен принять два типа решений:

1. Где выполнять операции с почтовыми ящиками?
2. В какой из городов каждый из регионов должен посылать деньги?

Определим переменные

$y_j = 1$ – если почтовый ящик существует в городе *j*;

$y_j = 0$ – если почтовый ящик не существует в городе *j*;

$x_{ij} = 1$ – если регион *i* посылает платежи в город *j*;

$x_{ij} = 0$ – если регион *i* не посылает платежи в город *j*.

Годовые затраты Николса состоят из затрат, связанных с операциями по обработке платежей (содержанию почтовых ящиков), и потерь от неинвестированных средств. Чтобы определить, сколько Николс теряет в год от неинвестирования средств, мы должны определить, какой доход будет упущен, если платежи из региона *i* посланы в город *j*.

Например, сколько Николс потеряет в расчете на год, если клиент с Западного региона пошлет платежи в Нью-Йорк? В каждый конкретный день, 8-дневная стоимость (или $8 \times 70000 = 560000$) платежей будет передвигаться по почте, не принося дохода. Так как Николс мог бы получить 20% годовых от этих средств, каждый год он будет терять $0.2 \times 560000 = 112000$ от средств, посланных с Запада в Нью-Йорк. Аналогичные расчеты произведены для каждого из возможных вариантов назначений региона конкретному городу (см. табл. 6.1).

Общие потери (в тыс. дол.) составят

Таблица 6.1. Расчет потерь дохода

Назначение			Годовые потери дохода
Запад	→	Лос-Анджелес	0.2×70000×2=28000
Запад	→	Чикаго	0.2×70000×6=84000
Запад	→	Нью-Йорк	0.2×70000×8=112000
Запад	→	Атланта	0.2×70000×8=112000
Средний Запад	→	Лос-Анджелес	0.2×50000×6=60000
Средний Запад	→	Чикаго	0.2×50000×2=20000
Средний Запад	→	Нью-Йорк	0.2×50000×5=50000
Средний Запад	→	Атланта	0.2×50000×5=50000
Восток	→	Лос-Анджелес	0.2×60000×8=96000
Восток	→	Чикаго	0.2×60000×5=60000
Восток	→	Нью-Йорк	0.2×60000×2=24000
Восток	→	Атланта	0.2×60000×5=60000
Юг	→	Лос-Анджелес	0.2×40000×8=64000
Юг	→	Чикаго	0.2×40000×5=40000
Юг	→	Нью-Йорк	0.2×40000×5=40000
Юг	→	Атланта	0.2×40000×2=16000

$$Z_1 = 28x_{11} + 84x_{12} + 112x_{13} + 112x_{14} + 60x_{21} + 20x_{22} + 50x_{23} + 50x_{24} +$$
$$+ 96x_{31} + 60x_{32} + 24x_{33} + 60x_{34} + 64x_{41} + 40x_{42} + 40x_{43} + 16x_{44}.$$

Добавив к этим потерям стоимость затрат на проведение операций по обработке счетов

$$Z_2 = 50y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 50y_4,$$

получим целевую функцию

$$\min Z = 28x_{11} + 84x_{12} + 112x_{13} + 112x_{14} + 60x_{21} + 20x_{22} + 50x_{23} + 50x_{24} + \\ + 96x_{31} + 60x_{32} + 24x_{33} + 60x_{34} + 64x_{41} + 40x_{42} + 40x_{43} + 16x_{44} + \\ + 50y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 50y_4 .$$

Два типа ограничений должен учесть Николс:

1. Каждый регион должен посылать платежи только в один город.
2. Если какой-то из городов выбран как пункт, куда будут посылаться платежи, то в этом городе должен быть установлен почтовый ящик.

Первый тип ограничений описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1. \end{aligned}$$

Второй тип ограничений требует, чтобы, если $x_{ij} = 1$ (т.е. когда клиент *i*-го региона посылает деньги в *j*-й город), то $y_j = 1$. Такое условие может быть отражено путем добавления 16 ограничений типа

$$x_{ij} \le y_j \quad \left(i = \overline{1,4}, \;\; j = \overline{1,4}\right).$$

Если $x_{ij} = 1$, то это предполагает, что $y_j = 1$, как и требовалось. Если также $x_{1j} = x_{2j} = x_{3j} = x_{4j} = 0$, то тогда переменная y_j может быть либо 0, либо 1.

В этом случае, с учетом того, что целевая функция минимизируется, y_j примет значение, равное 0.

Объединяя целевую функцию и ограничения, получаем модель

$$\min Z = 28x_{11} + 84x_{12} + 112x_{13} + 112x_{14} + 60x_{21} + 20x_{22} + 50x_{23} + 50x_{24} + \\ + 96x_{31} + 60x_{32} + 24x_{33} + 60x_{34} + 64x_{41} + 40x_{42} + 40x_{43} + 16x_{44} + \\ + 50y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 50y_4 ,$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1, \end{aligned}$$

$$x_{11} \le y_1,\, x_{21} \le y_1,\, x_{31} \le y_1, x_{41} \le y_1,\, x_{12} \le y_2,\, x_{22} \le y_2,\, x_{32} \le y_2,\, x_{42} \le y_2,$$

$$x_{13} \le y_3,\, x_{23} \le y_3,\, x_{33} \le y_3,\, x_{43} \le y_3,\, x_{14} \le y_4,\, x_{24} \le y_4,\, x_{34} \le y_4,\, x_{44} \le y_4,$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \;\; y_j = 0 \vee 1, \;\; i, j = \overline{1,4}.$$

Решение задачи $Z = 242,\, y_1 = y_3 = 1,\, x_{11} = x_{23} = x_{33} = x_{43} = 1$.

Таким образом, Николс должен производить операции по обработке платежей в Лос-Анджелесе и Нью-Йорке. Западные клиенты должны посылать платежи в Лос-Анджелес, остальные в Нью-Йорк.

Есть и другой путь моделирования ограничений второго типа. Вместо 16 ограничений типа $x_{ij} \le y_j \;\; (i = \overline{1,4},\; j = \overline{1,4})$ можно записать следующие 4 ограничения:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \le 4y_1,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \le 4y_2,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \le 4y_3,$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \le 4y_4.$$

Для каждого конкретного города данные ограничения показывают, что, если в городе используется почтовый ящик, то Николс должен за него платить. Так, если, например, в Атланте почтовый ящик используется, то это означает, что или $x_{14} = 1$, или $x_{24} = 1$, или $x_{34} = 1$, или $x_{44} = 1$. Отсюда $y_4 = 1$ и Николс должен платить за использование ящика.

Если все переменные для Атланты равны нулю, то в целях минимизации общих затрат $y_4 = 0$. Числа 4 в правой части ограничений гарантируют возможность посылки денег изо всех регионов в каждый город.

Дополним данную проблему следующим условием:

если клиент первого региона посылает свои платежи в город 1, никакой другой пользователь не может посылать в этот город своих средств.

Математически это условие может быть выражено следующим образом:

Если $x_{11} = 1$, то $x_{21} = x_{31} = x_{41} = 0$.

Так как все x_{ij} должны быть равными 0 или 1, то данное условие может быть записано в форме

если $x_{11} > 0$,

то

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} \le 0 \quad \text{или}$$
$$-x_{21} - x_{31} - x_{41} \ge 0$$

Определим функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ как

$$f = x_{11},$$

а функцию $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ как

$$g = -x_{21} - x_{31} - x_{41}.$$

Используя ранее записанные формулы, сформулируем два ограничения

$$x_{21}+x_{31}+x_{41}\le My,$$
$$x_{11}\le M(1-y),$$
$$y=0\vee 1.$$

Так как значения функций $-g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ никогда не превысят 3, то в качестве *M* можно взять число 3

$$x_{21}+x_{31}+x_{41}\le 3y,$$
$$x_{11}\le 3(1-y),$$
$$y=0\vee 1.$$

В качестве другой иллюстрации применения ограничений типа «если, то» можно рассмотреть следующую ситуацию. Допустим, у нас имеется возможность использовать в производстве один из двух типов взаимозаменяемых ресурсов, запасы которых ограничены. Нормы расхода ресурсов на выпуск продукции различны, в зависимости от вида ресурса. Пусть мы рассматриваем возможный выпуск двух видов продукции. Ограничения по затратам альтернативных видов ресурсов на два вида продукции выглядят следующим образом:

$$5x_1+2x_2\le 25,$$
$$2x_1+3x_2\le 18.$$

Задача заключается в том, чтобы отразить в модели условие выбора только одного вида ресурса.

Для того чтобы осуществить подобное действие, воспользуемся, как и раньше, большим числом M и булевой переменной y. С учетом этого вышеуказанное условие может быть представлено в виде следующей системы ограничений:

$$\begin{cases}5x_1+2x_2\le 25+My\\ 2x_1+3x_2\le 18+M(1-y).\end{cases}$$

Вместо одной переменной y в ограничениях можно использовать пару булевых переменных, например, y_1 и y_2

$$\begin{cases}5x_1+2x_2\le 25+My_1\\ 2x_1+3x_2\le 18+My_2.\end{cases}$$

При этом в модель должно быть также добавлено ограничение

$$y_1+y_2=1.$$

6.3.3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ УСЛОВИЯ: «ДОЛЖНЫ ВЫПОЛНЯТЬСЯ *K* ИЗ *N* ОГРАНИЧЕНИЙ»

Допустим, что мы имеем дело с задачей, в которой из множества N ограничений должны выполняться только K $(K < N)$. Задача заключается в том, чтобы выбрать такие K ограничений, выполнение которых обеспечит целевой функции достижение ее наилучшего значения. Остальные $N - K$ ограничений, которые не выбраны для осуществления, тем не менее, должны, по возможности, осуществляться.

Данный случай является обобщением случая, рассмотренного в предыдущем вопросе, когда $N = 2$, а $K = 1$.

Итак, пусть имеется N ограничений

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_1,\\
&f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_2,\\
&\vdots\\
&f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_N.
\end{aligned}$$

Используя логику рассуждений из предыдущего материала, запишем условие осуществления K ограничений из N следующим образом:

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_1 + My_1,\\
&f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_2 + My_2,\\
&\vdots\\
&f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_N + My_N,\\
&\sum_{i=1}^{N} y_i = N - K,\\
&y_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{1, N},
\end{aligned}$$

где M – большое положительное число.

Суть приведенных выражений заключается в том, что для тех K ограничений, для которых y_i примут нулевые значения, условия останутся без изменения, в то время как для остальных $N - K$ ограничений условия существенно изменятся. В результате, первые должны выполняться, а вторые – исключаться из рассмотрения.

Данный тип ограничений может быть записан несколько иначе:

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_1 y_1 + M(1 - y_1),\\
&f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_2 y_2 + M(1 - y_2),\\
&\vdots\\
&f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_N y_N + M(1 - y_N),
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = K,$$
$$y_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{1,N}.$$

В такой формулировке при $y_i = 1$ условие осуществления K ограничений из N выполняется. Если же $y_i = 0$, то не выполняется.

6.3.4. ФУНКЦИИ С *N* ВОЗМОЖНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Пусть некоторое ограничение может принять одно из нескольких возможных значений (такие ситуации часто возникают, когда имеют дело с вариантными постановками задачи)

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_1 \quad \text{или} \quad d_2, \ldots, \text{или} \quad d_N .$$

Чтобы отразить данную ситуацию поступают следующим образом. Подобные условия записываются в виде системы ограничений

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{N} d_i y_i ,$$
$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1,$$
$$y_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{1,N}.$$

Так как изо всех y_i только одна переменная должна быть равной единице, то и, соответственно, только одно, ассоциирующееся с данной переменной значение d_i, будет принято в качестве правой части ограничения.

В качестве иллюстрации ограничений подобного типа можно рассмотреть пример, связанный с утилизацией недоиспользованного сырья или мощности оборудования. Пусть, например, мощность предприятия загружена не полностью. Предполагается, что ее дозагрузка может быть осуществлена повариантно, в зависимости от сочетаний выпусков дополнительной продукции. Ограничение, описывающее использование недозагруженной мощности предприятия (P) для выпуска двух новых видов продукции, выглядит следующим образом:

$$4x_1 + x_2 \le P .$$

Пусть общая мощность составляет 100 единиц, причем в результате решения задачи выяснилось, что ее загрузка не превышает 80%. Оставшиеся 20% могут быть использованы для выпуска дополнительной продукции. Допустим, что предприятие рассматривает возможность утилизации оставшихся 20 единиц мощности по трем вариантам: использовать их только на 40%, использовать на 80% и, наконец, использовать полностью – на 100%. Это принесет следующие возможные варианты использования недогруженной мощности:

$$d_1 = 8,\ d_2 = 16,\ d_3 = 20.$$

Используя вышеописанное правило, мы можем записать

$$\begin{aligned} &4x_1 + x_2 = 8y_1 + 16y_2 + 20y_3, \\ &y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ &y_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

Добавление в модель данной системы ограничений позволит выполнить условие по дополнительной утилизации мощности предприятия.