

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейное программирование представляет собой удобный аппарат для решения оптимизационных задач. Оно входит составной частью в математическое программирование – область математики, которая занимается разработкой теории и численных методов решения экстремальных задач. Математическое программирование является достаточно «нестарой» наукой. История его зарождения и развития может быть сконцентрирована в следующих основных датах и великих ученых:

- 1930 г. – постановка задачи линейного программирования в виде предложения по составлению плана перевозок (А.Н.Толстой);
- 1931 г. – математическая постановка и решение «проблемы выбора». Венгерский метод (Б.Эгервари);
- 1932 г. – метод «затраты-выпуск» (В.В.Леонтьев);
- 1939 г. – метод разрешающих множителей (Л.В.Канторович);
- 1941 г. – постановка транспортной задачи (Ф.Л.Хичкок);
- 1947 г. – симплекс метод (Дж.Б.Данциг);
- 1949 г. – метод потенциалов для решения транспортной задачи (Л.В.Канторович, М.К.Гавурин);
- 1951 г. – формулировка необходимых и достаточных условий оптимальности для решения нелинейных задач (Г.В.Кун, А.В.Таккер);
- 1954 г. – приближенный метод решения задач с сепарабельными выпуклыми функциями цели и линейными ограничениями (А.Чарнес, К.И.Лемке);
- 1955 г. – разработки по квадратическому программированию (И.М.Л.Бил, Е.В.Баранкин, Р.Дорфман, М.Франк, Ф.Вольф и др.);
- 1957 г. – динамическое программирование (Р.Беллман) и т.д.

Дальнейшее развитие математического программирования включает разработку новых методов решения задач линейного программирования: метод Кармаркара, метод внутренних точек и т.д.; новых направлений его использования: целевое программирование, метод анализа оболочки данных и т.п.

Однако революционным моментом в развитии математического программирования можно считать разработку Дж.Б.Данцига в 1947 г. эффективного метода – симплекс-алгоритма, для решения задач линейного программирования. Важность линейного программирования сформулирована автором симплекс метода следующим образом: «Линейное программирование рассматривается как революционный подход, дающий человеку возможность формулировать общие цели и получать при помощи симплекс метода оптимальные решения для широкого класса практических проблем высокой степени сложности» (Дж.Б.Данциг, Бонн, 1982).

В настоящее время линейное программирование используется для решения задач в промышленности, в банковской системе, образовании, лесном хозяйстве, топливной промышленности, на транспорте. Опрос 500 ведущих фирм журналом "Fortune" (США) показывает, что 85% респондентов используют линейное программирование в качестве инструмента совершенствования системы управления и принятия решений.

1.1. ЧТО СОБОЙ ПРЕДСТАВЛЯЕТ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ?

Рассмотрим **пример**.

Игрушечная фабрика производит два типа деревянных игрушек: машины и корабли. Одна машина продается по 17 грн. и для ее производства используется сырье стоимостью 5 грн. При этом затраты труда и накладные расходы фабрики составляют 9 грн. в расчете на одну машину. Корабль продается по 11 грн. и требует для своего производства сырьевых материалов стоимостью 4 грн. Затраты на оплату труда и накладные расходы составляют 5 грн. Производство деревянных машин и кораблей предполагает использование квалифицированной рабочей силы двух категорий работников: столяров и отделочников. Два часа труда работы столяра и один час работы на участке отделки необходимы для изготовления одной машины. Корабль требует для своего производства по одному часу работы на каждом из участков. Каждую неделю игрушечная фабрика может получить для производства игрушек столько сырья, сколько необходимо. Однако на вышеупомянутых столярном и отделочном участках в распоряжении фабрики имеется ограниченное число часов: 100 и 80, соответственно. Потребность в кораблях не ограничена, машины же покупаются в количестве, не превышающем 40 штук. Игрушечная фабрика хотела бы максимизировать недельную прибыль (доходы минус затраты).

Сформулируйте математическую модель ситуации с игрушечной фабрикой, которая могла бы быть использована для максимизации ее недельной прибыли.

Решение.

Для решения проблемы будем использовать характеристики, которые присущи всем задачам линейного программирования.

Переменные принятия решений.

Начнем с определения соответствующих переменных принятия решений. В любой модели линейного программирования переменные принятия решений должны полностью описывать решения, которые предполагается принять. Действительно, игрушечная фабрика должна решить: сколько машин и кораблей следует производить еженедельно. В связи с этим определяем

x_1 – количество машин, производимых еженедельно;

x_2 – количество кораблей, производимых еженедельно.

Целевая функция.

В любой задаче линейного программирования человек, принимающий решение, желает максимизировать (обычно доход или прибыль) или минимизировать (как правило, затраты) некоторую функцию переменных принятия решений. Функция, которая должна быть максимизирована или минимизирована, носит название **целевой функции**. В задаче с игрушечной фабрикой мы видим, что постоянные затраты (например, аренда помещения, страховка) не зависят от значений переменных x_1 и x_2 . Таким образом, игрушечная фабрика может сконцентрироваться на максимизации следующего соотношения:

*Недельная прибыль = (недельный доход) – (стоимость покупки сырья) –
– (другие переменные затраты).*

Для записи целевой функции данное соотношение должно быть выражено через переменные принятия решений x_1 и x_2 . Игрушечной фабрике было бы нецелесообразно производить игрушек больше, чем их можно продать, так что будем считать, что все, что производится, – продается.

Итак,

недельный доход = (недельный доход от продажи машин) +
+ (недельный доход от продажи кораблей) $= 17x_1 + 11x_2$,

недельные затраты на приобретение сырья $= 5x_1 + 4x_2$,

другие недельные переменные затраты $= 9x_1 + 5x_2$.

Таким образом, игрушечная фабрика хотела бы максимизировать

$$(17x_1 + 11x_2) - (5x_1 + 4x_2) - (9x_1 + 5x_2) = 3x_1 + 2x_2.$$

Будем использовать переменную Z для описания целевой функции. Целью игрушечной фабрики является максимизация целевой функции:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2. \quad (1.1)$$

Величины 3 и 2 в целевой функции представляют собой вклад каждого вида изделий в общую прибыль игрушечной фабрики. Данные коэффициенты при переменных принятия решений в целевой функции называются **коэффициентами целевой функции**.

Ограничения.

По мере того, как x_1 и x_2 будут увеличивать свои значения, целевая функция также будет расти. Это означает, что, если игрушечная фабрика будет иметь возможность произвольно взять любые, сколь угодно большие значения x_1 и x_2 , то и целевая функция, соответственно, может стать сколь угодно большой. К сожалению, значения x_1 и x_2 зависят от следующих трех условий, которые будем называть **ограничениями** задачи:

Ограничение 1. Каждую неделю на столярном участке может быть использовано не более 100 часов рабочего времени.

Ограничение 2. Каждую неделю на участке отделки может быть использовано не более 80 часов рабочего времени.

Ограничение 3. В связи с ограниченным спросом на машины, их должно быть произведено не более 40.

Так как количество сырья для производства игрушек предполагается неограниченным, то ограничений на сырье не налагается.

Следующим шагом в формулировке математической модели является выражение ограничений 1–3 в терминах переменных принятия решений x_1 и x_2 .

Ограничение 1 представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \text{Общие затраты времени на столярном участке в неделю} = \\ & = (\text{затраты времени работы столяра на одну машину}) \times \\ & \times (\text{количество машин, производимых в неделю}) + \\ & + (\text{затраты времени работы столяра на один корабль}) \times \\ & \times (\text{количество кораблей, производимых в неделю}) = 2x_1 + x_2. \end{aligned}$$

С учетом имеющегося ограничения на количество часов, имеем

$$2x_1 + x_2 \leq 100. \quad (1.2)$$

Следует заметить, что каждая составляющая ограничения (1.2) имеет одну и ту же единицу измерения – количество часов работы столярного участка в неделю. Это является очень важным свойством задач линейного программирования, когда *для того чтобы ограничение имело смысл, необходимо, чтобы все его составляющие были выражены в одних единицах измерения.* (Так, нельзя, например, складывать яблоки с апельсинами и получать лимоны.)

Ограничение 2 в терминах x_1 и x_2 выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \text{Общие затраты времени на участке отделки в неделю} = \\ & = (\text{затраты времени на отделку одной машины}) \times \\ & \times (\text{количество машин, производимых в неделю}) + \\ & + (\text{затраты времени на отделку одного корабля}) \times \\ & \times (\text{количество кораблей, производимых в неделю}) = x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание имеющееся в наличии количество часов работы на участке отделки, имеем

$$x_1 + x_2 \leq 80. \quad (1.3)$$

Как и в предыдущем случае, единицы измерения каждой составляющей ограничения одинаковы – затраты времени в неделю на участке отделки.

Наконец, отразим тот факт, что количество проданных машин не может превысить 40 штук

$$x_1 \leq 40. \quad (1.4)$$

Итак, выражения (1.2)–(1.4) отражают ограничения 1–3 в терминах выбранных нами переменных x_1 и x_2 . Коэффициенты при данных переменных в ограничениях носят название **технологических коэффициентов**. Такое название связано прежде всего с тем, что чаще всего коэффициенты в ограничениях отражают технологию, используемую для производства того или иного изделия. В нашем случае большинство коэффициентов отражают затраты времени на производство единицы изделия то ли на участке отделки, то ли на столярном участке.

Величина, стоящая справа в ограничении и отражающая количество имеющихся ресурсов или целесообразные выпуски продукции, носит название **правой части ограничения** или **свободного члена**.

Ограничения на знак.

Для завершения формулировки модели линейного программирования необходимо ответить на вопрос: должны ли переменные принятия решений быть неотрицательными или они могут принять как положительные, так и отрицательные значения, а также быть равными нулю?

Если переменная принятия решений x_i может принять только неотрицательные значения, то в модель добавляют **ограничение на знак** $x_i \geq 0$.

Если предполагается, что переменная x_i может быть положительной, отрицательной или равной нулю, то говорят, что x_i – **неограниченная на знак переменная**, или к переменной x_i **не предъявляется требование по знаку**.

В нашей задаче совершенно ясно, что

$$x_1 \geq 0 \quad (1.5)$$

и

$$x_2 \geq 0. \quad (1.6)$$

В других проблемах, тем не менее, могут встречаться переменные, неограниченные на знак. Так, если x_i представляет баланс наличности фирмы, то данная величина может быть отрицательной в случае, когда фирма задолжала кому-либо больше денег, чем она имеет на руках. При этом x_i может рассматриваться как переменная, неограниченная на знак.

Объединяя ограничения на знак (1.5) и (1.6) с целевой функцией (1.1) и ограничениями (1.2)–(1.4), получим общую модель, дающую возможность игрушечной фабрике выбрать оптимальную политику по производству игрушек, которая приносит максимальную недельную прибыль:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 \quad (\text{целевая функция – максимум прибыли}), \quad (1.1)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 100 \quad (\text{ограничение по столярному участку}), \quad (1.2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 80 \quad (\text{ограничение по участку отделки}), \quad (1.3)$$

$$x_1 \leq 40 \quad (\text{ограничение по числу машин}), \quad (1.4)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (\text{ограничение на знак переменной } x_1), \quad (1.5)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (\text{ограничение на знак переменной } x_2). \quad (1.6)$$

Прежде чем сформулируем общее понятие задачи линейного программирования, дадим несколько определений.

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ является **линейной функцией** тогда и только тогда, когда для некоторого множества констант $c_1, c_2, \dots, c_n$ выполняется соотношение $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$.

Например, $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ является линейной функцией переменных x_1 и x_2 , в то время как $f(x_1, x_2) = 2x_1^2x_2$ – нелинейной.

Определение. Для любой линейной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и любого числа b неравенства $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b$ и $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b$ являются **линейными неравенствами**.

Так, неравенства $2x_1 + 3x_2 \leq 3$ и $2x_1 + x_2 \geq 3$ являются линейными, а $x_1^2x_2 \geq 3$ – нелинейным.

Определение. Задача линейного программирования является **оптимизационной**, для которой:

1. Мы пытаемся максимизировать (или минимизировать) линейную функцию переменных принятия решений. Функция, которая должна быть максимизирована или минимизирована, носит название **целевой функции**.
2. Значения переменных принятия решений должны удовлетворять **системе ограничений**. Каждое ограничение должно быть представлено в виде линейного уравнения или неравенства.
3. **Ограничение на знак** ассоциируется с каждой переменной. Для любой переменной принятия решений x_i ограничение на знак определяет, должна ли переменная x_i быть неотрицательной ($x_i \geq 0$) или она может быть неограниченной на знак.

В соответствии с данным определением, модель линейного программирования в общем виде выглядит следующим образом:

Целевая функция

$$\max (\min) Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ &\vdots \\ a_{i-1,1}x_1 + a_{i-1,2}x_2 + \dots + a_{i-1,n}x_n &= b_{i-1}, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &= b_i, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_{m-1,1}x_1 + a_{m-1,2}x_2 + \dots + a_{m-1,n}x_n \geq b_{m-1},$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m.$$

и ограничениях на знак переменных

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}).$$

Так как в рассмотренной проблеме игрушечной фабрики целевая функция и ограничения являются линейными функциями, то данная проблема относится к задачам линейного программирования. Следует отметить, что задача максимизации прибыли (или доходов) при ограниченных ресурсах является типичной для линейного программирования.

1.2. ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К ЭЛЕМЕНТАМ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.2.1. ТРЕБОВАНИЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ И АДДИТИВНОСТИ

Тот факт, что целевая функция задачи линейного программирования должна быть линейной, подразумевает два следующих момента:

1. Вклад каждой переменной принятия решений в целевую функцию пропорционален значению данной переменной. Например, вклад в общую прибыль от производства четырех машин ($4 \times 3 = 12$ грн.) в точности равен четырем вкладам в целевую функцию от производства одной машины (3 грн.).
2. Вклад в целевую функцию каждой переменной принятия решений совершенно не зависит от значений других переменных. Например, независимо от того, какое значение примет переменная x_2 , машины всегда будут приносить $3x_1$ в целевую функцию.

Аналогично, тот же факт, что ограничения задачи линейного программирования должны быть линейными, подразумевает два следующих момента:

1. Вклад каждой переменной принятия решений в левую часть каждого ограничения пропорционален значению данной переменной. Например, требуется ровно в три раза больше затрат времени на участке отделки для производства трех кораблей ($1 \times 3 = 3$ часа), чем для производства одного (1 час).
2. Вклад каждой переменной принятия решений в левую часть каждого ограничения не зависит от значений других переменных. Например, независимо от значения x_2 , на производство x_1 машин необходимо затратить $2x_1$ часов на столярном участке.

Иначе – общий вклад в целевую функцию или левую часть ограничения равен сумме частных вкладов (вкладов каждой в отдельности переменной).

Первые приведенные пункты в обоих списках носят название **требований пропорциональности** задачи линейного программирования.

Второй пункт в первом списке предполагает, что значение целевой функции – это сумма вкладов отдельных переменных. Во втором списке второй пункт также предполагает, что левая часть ограничения представляет собой сумму индивидуальных вкладов каждой переменной. Данные требования носят название **требований аддитивности** задачи линейного программирования.

В задаче линейного программирования, реально отражающей истинную ситуацию, переменные принятия решений должны удовлетворять обоим требованиям. В дополнение к рассмотренным, задача линейного программирования должна отвечать требованиям делимости (непрерывности), определенности и неотрицательности переменных.

1.2.2. ТРЕБОВАНИЕ ДЕЛИМОСТИ (НЕПРЕРЫВНОСТИ)

Требование делимости предусматривает, чтобы каждая переменная принятия решений могла принимать дробные значения. Например, в приведенном примере с игрушечной фабрикой требование делимости подразумевает, что допустимо производить 1.5 машины или 4.63 корабля. Так как производство дробного количества игрушек не имеет смысла, то требование делимости для данной задачи не выполняется. Задачи, в которых все переменные должны принимать неотрицательные целые значения, носят названия **задач целочисленного программирования**.

В ряде случаев, когда требование делимости не выполняется, прибегают к приему округления полученных результатов. Это удобно делать, когда дробная часть представляет собой незначительную величину по отношению к общему числу. Так, если в результате решения выявлено, что необходимо произвести 150000.4 автомобилей, то округление в меньшую (150000) или в большую (150001) стороны будет приемлемой аппроксимацией полученного решения.

С другой стороны, если в результате решения задачи о размещении пожарных бригад на территории района было получено значение количества бригад, равное 0.4, то округление в большую или в меньшую стороны (до 1 или до 0) будет существенным для принятия решения. В этом случае лучше прибегнуть к целочисленной постановке задачи линейного программирования.

1.2.3. ТРЕБОВАНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Требование определенности предусматривает, чтобы все параметры (коэффициенты целевой функции, правые части ограничений и технологические коэффициенты) были заранее определены, то есть известны. Так, если нам не известно точное время, которое необходимо для производства корабля на столярном или отделочном участках, то требование определенности нарушается.

1.2.4. ТРЕБОВАНИЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Требование неотрицательности считает необходимым, чтобы все переменные задачи линейного программирования принимали только неотрицательные значения. Как правило, это вытекает из экономической постановки

задачи. Однако в ряде случаев данное требование не выполняется. Такая ситуация случается, когда по условию задачи переменная должна принять неположительное значение (например, величина задолженности, сумма вкладываемых средств, рассматриваемая как отрицательная величина и т.д.) или может быть неограниченной на знак (например, объем производства продукции по сравнению с предшествующим периодом). Чтобы избежать подобных случаев в задачах линейного программирования, используется прием замены переменных.

1.3. ОБЛАСТЬ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

С задачей линейного программирования ассоциированы два понятия: *область допустимых значений* и *оптимальное решение*. Для их определения будем использовать понятие точки как средства спецификации значений каждой переменной принятия решений.

Определение. *Область допустимых значений задачи линейного программирования – это множество точек, удовлетворяющих всем ограничениям задачи и ограничениям на знак переменных.*

Например, в задаче с игрушечной фабрикой точка $(x_1 = 40, x_2 = 20)$ находится в области допустимых значений, так как значения $x_1 = 40$ и $x_2 = 20$ удовлетворяют ограничениям (1.2)–(1.4) и условиям на знак переменной (1.5)–(1.6):

Ограничение (1.2)	$2x_1 + x_2 \leq 100$	удовлетворяется, так как $2 \times 40 + 20 \leq 100$.
Ограничение (1.3)	$x_1 + x_2 \leq 80$	удовлетворяется, так как $40 + 20 \leq 80$.
Ограничение (1.4)	$x_1 \leq 40$	удовлетворяется, так как $40 \leq 40$.
Ограничение на знак (1.5)	$x_1 \geq 0$	удовлетворяется, так как $40 \geq 0$.
Ограничение на знак (1.6)	$x_2 \geq 0$	удовлетворяется, так как $20 \geq 0$.

С другой стороны, точка $(x_1 = 15, x_2 = 70)$ не входит в область допустимых значений, потому что, даже удовлетворяя ограничениям (1.2), (1.4), (1.5) и (1.6), она не удовлетворяет ограничению (1.3): $15 + 70$ никак ни меньше 80.

Определение. *Любая точка, которая не входит в область допустимых значений задачи линейного программирования, называется недопустимой точкой.*

В качестве другой недопустимой точки можно рассмотреть точку $(x_1 = 40, x_2 = -20)$. Несмотря на то, что эта точка удовлетворяет всем ограничениям и ограничению на знак (1.5), она является недопустимой, так как она не удовлетворяет ограничению на знак (1.6): $x_2 \geq 0$. Для задачи с игрушечной фабрикой областью допустимых значений является множество допустимых планов производства, которые фабрика может рассматривать в поисках оптимального решения.

Определение. *Для задачи линейного программирования с критерием на максимум **оптимальным решением** является точка области допустимых значений с наибольшим значением целевой функции. Аналогично, для задачи на минимум оптимальным решением является точка из области допустимых значений с наименьшим значением целевой функции.*

Большинство задач линейного программирования имеют только одно оптимальное решение. Тем не менее некоторые задачи вообще не имеют решений, а отдельные из них имеют бесчисленное множество решений. Забегая вперед, скажем, что оптимальным решением задачи игрушечной фабрики является решение: $x_1 = 20, x_2 = 60, Z = 3x_1 + 2x_2 = 3 \times 20 + 2 \times 60 = 180$ грн.

Говоря, что $x_1 = 20, x_2 = 60$ является оптимальным решением, мы имеем в виду, что никакая другая точка из области допустимых значений не имеет значения, превышающего 180 грн. Так, для того чтобы максимизировать прибыль, игрушечная фабрика должна производить 20 машин и 60 кораблей. Если принять во внимание постоянные затраты (например, на аренду помещения) в количестве 100 грн., то недельная прибыль фабрики составит:

$$80 \text{ грн.} = 180 \text{ грн.} - 100 \text{ грн.}$$

1.4. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Любая задача линейного программирования с двумя переменными может быть решена графически. Сначала рассмотрим, как построить на графике множество точек, которое удовлетворяет линейному неравенству, включая только две переменные.

Предположим, нам необходимо построить на графике множество точек, удовлетворяющее неравенству

$$4x_1 + 6x_2 \leq 12. \quad (1.7)$$

Множество точек (x_1, x_2) , удовлетворяющее неравенству (1.7), – это то же самое множество точек, которое удовлетворяет ограничению

$$6x_2 \leq 12 - 4x_1$$

или, что то же самое,

$$x_2 \leq 2 - \frac{2}{3}x_1. \quad (1.8)$$

Прямая на графике, удовлетворяющая уравнению

$$x_2 = 2 - \frac{2}{3}x_1, \quad (1.9)$$

построенному на базе неравенства (1.8), пересекает ось Ox_2 в точке с координатами $(0, 2)$ и имеет наклон, которому соответствует угловой коэффициент $-\frac{2}{3}$ при переменной x_1 . Второй точкой пересечения прямой с другой осью Ox_1 является точка $(3, 0)$. Для определения множества точек, удовлетворяющих ограничению (1.7) или (1.8), можно поступить очень просто. Достаточно подставить в ограничение координаты любой точки, не лежащей на прямой (1.9), например, точки $(0, 0)$ и проверить, удовлетворяется ли ограничение. В нашем случае точка $(0, 0)$ соответствует неравенству (1.7). Следовательно, множество точек, удовлетворяющее неравенству (1.7), лежит на прямой (1.9), а также влево и вниз от нее (рис. 1.1).

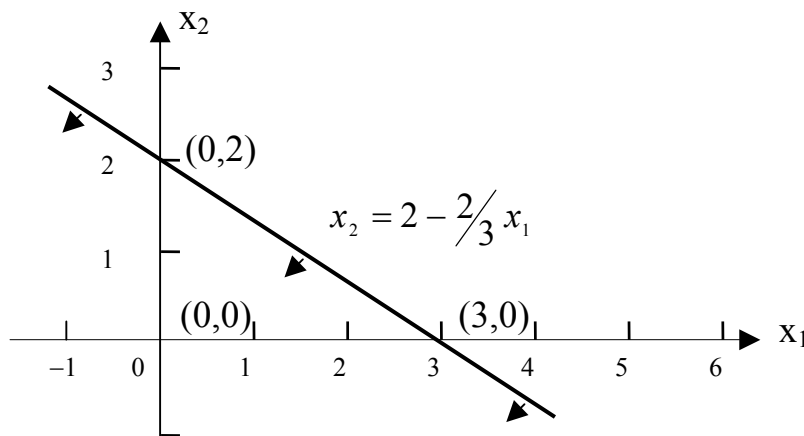


Рис. 1.1. Построение множества точек, удовлетворяющих неравенству $4x_1 + 6x_2 \leq 12$

Для иллюстрации графического способа решения задач линейного программирования будем использовать уже известный нам пример с игрушечной фабрикой. Напомним, что математическая модель выглядит следующим образом:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2, \quad (1.1)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 100, \quad (1.2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 80, \quad (1.3)$$

$$x_1 \leq 40, \quad (1.4)$$

$$x_1 \geq 0, \quad (1.5)$$

$$x_2 \geq 0. \quad (1.6)$$

Для того чтобы точка (x_1, x_2) принадлежала области допустимых значений, она должна удовлетворять всем ограничениям (1.2)–(1.6) модели. Необходимо отметить, что ограничения на знак (1.5)–(1.6) определяют однозначно местоположение точек на плоскости – первый квадрант системы координат. Таким образом, любая точка, лежащая вне первого квадранта, не удовлетворяет области допустимых значений. Отсюда областью допустимых значений будет множество точек первого квадранта, удовлетворяющее ограничениям (1.2)–(1.4). Используя вышеописанную процедуру, построим систему прямых линий на основе уравнений, полученных на базе неравенств (1.2)–(1.4)

$$2x_1 + x_2 = 100,$$

$$x_1 + x_2 = 80,$$

$$x_1 = 40$$

и определим область плоскости, которая является общей для всех исследуемых ограничений. В рассматриваемой задаче точки, удовлетворяющие любому из ограничений, лежат на соответствующей прямой и влево вниз от нее. Область плоскости, удовлетворяющая всем условиям, описывается многогранником *DGFEH* (рис. 1.2).

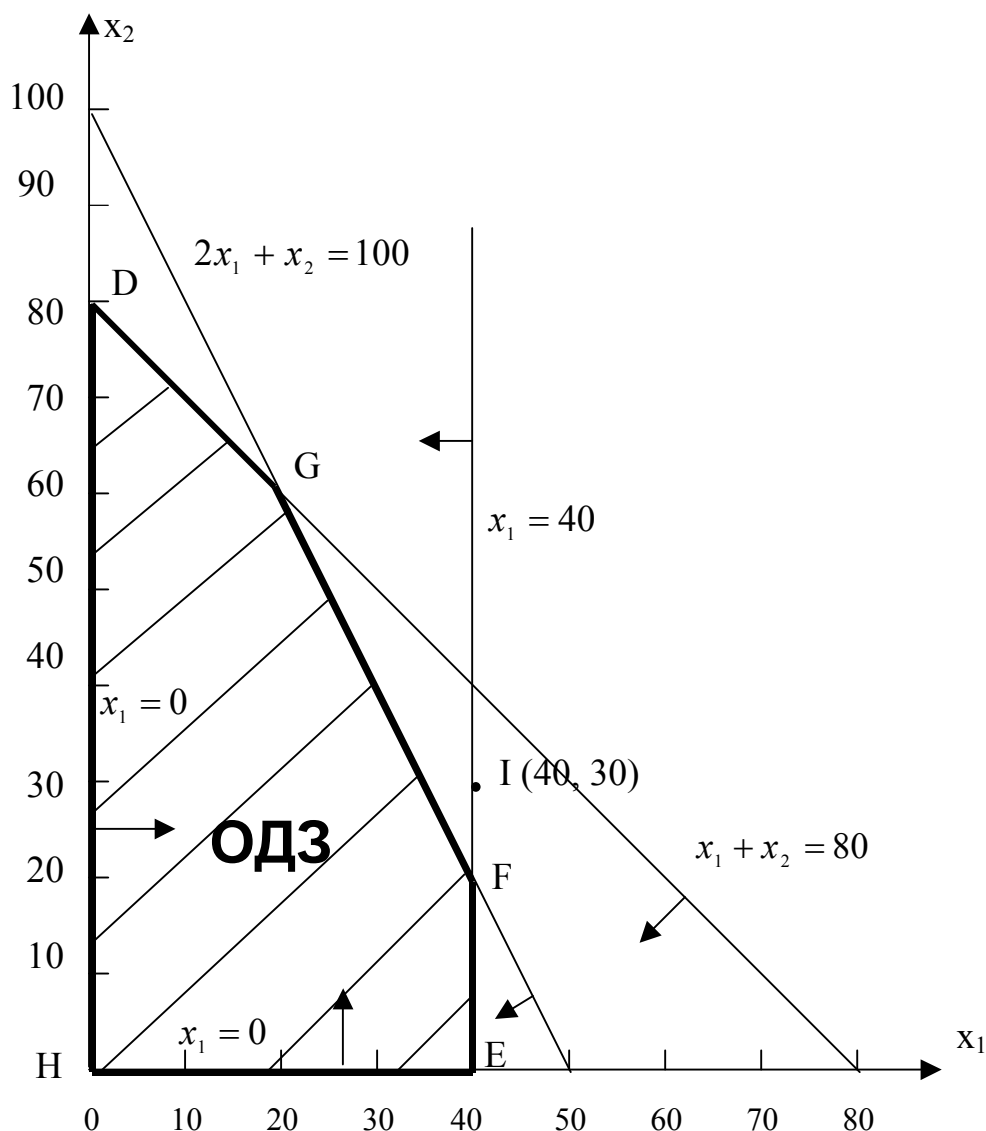


Рис. 1.2. Область допустимых значений задачи игрушечной фабрики

Любая точка, находящаяся внутри данной области или на ее границе, является допустимой, то есть принадлежащей области допустимых значений. С другой стороны, точки вне данного многогранника не удовлетворяют условиям нашей задачи. В качестве примера может быть рассмотрена точка I с координатами (40, 30). Данная точка не удовлетворяет ограничению (1.2).

После построения области допустимых значений необходимо определить оптимальное решение, то есть найти точку из области допустимых значений с максимальным значением целевой функции $Z = 3x_1 + 2x_2$. Для этой цели будем пользоваться понятием **изоцели** и **градиента**.

Изоцель – линия на графике, описывающая поведение целевой функции. Все точки, принадлежащие изоцели, приносят одно и то же значение целевой функции, то есть $3x_1 + 2x_2 = \text{const}$. Иначе, наклон изоцели один и тот же, независимо от значения *constant*. В нашем примере, угловой коэффициент равен $-\frac{3}{2}$. Построение изоцелей осуществлено на рис. 1.3.

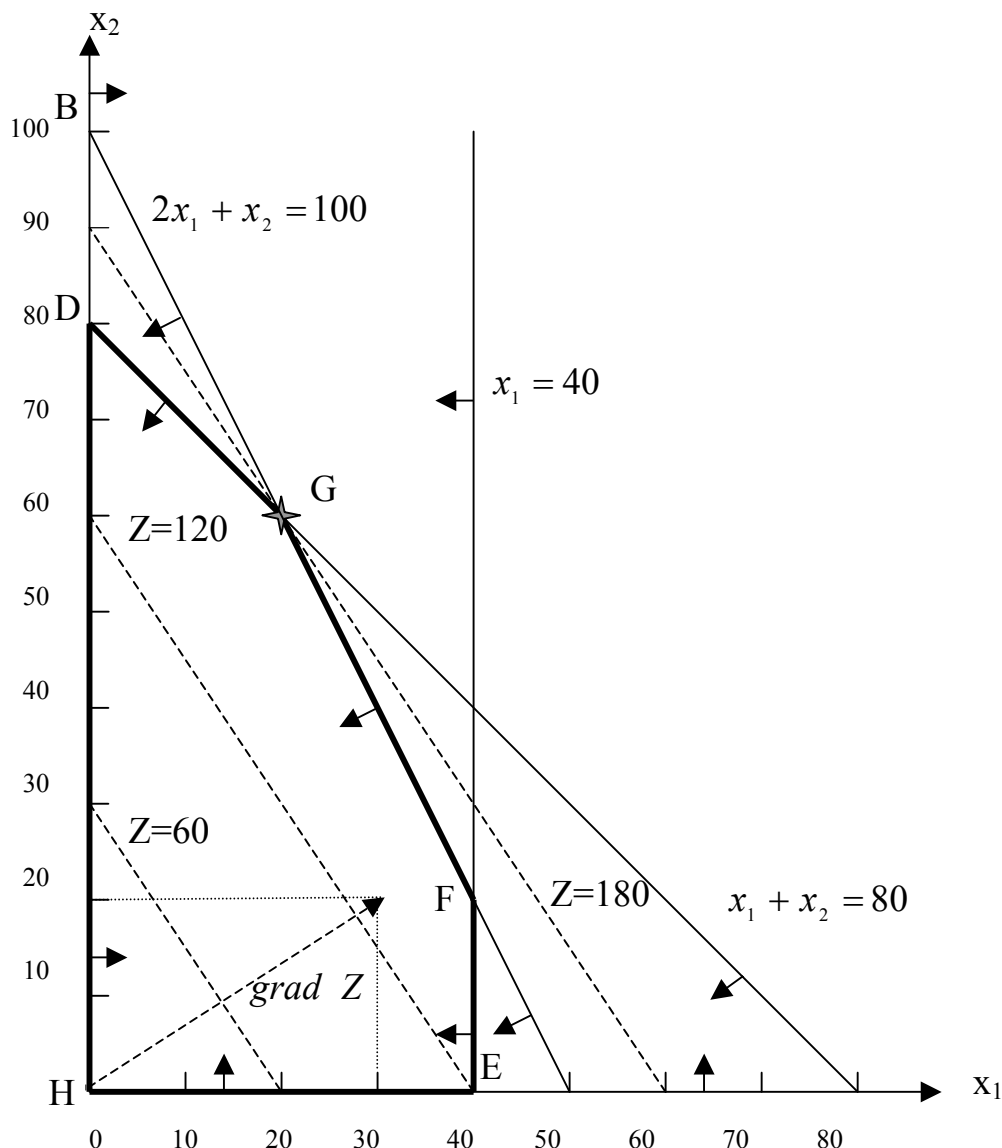


Рис. 1.3. Графическое решение задачи игрушечной фабрики

Построив одну изоцель, можно путем перемещения ее параллельно самой себе, получить целое семейство изоцелей. Очевидно, постепенно будет найдена точка, общая для области допустимых значений и изоцели, координаты которой принесут наибольшее значение целевой функции. Дальнейшее перемещение изоцели будет означать, что все остальные точки, лежащие на изоцели, не принадлежат области допустимых значений. Данная последняя общая для области допустимых значений и изоцели точка и является **оптимальной точкой**.

В зарубежной литературе различают изоцели в зависимости от типа критерия оптимальности. Так, например, если в задаче ставится цель максимизировать прибыль, то изоцель носит название *isoprofit line*, если минимизировать затраты, то – *isocost line*.

С целью отыскания оптимальной точки может быть использован **градиент**. **Градиент** – это вектор, который показывает направление возрастания целевой функции. Градиент может быть построен из любой точки, так как не зависит от x_i . Для удобства построения примем его начало в точке (0, 0) – точке пересечения

координатных осей, а окончание – в точке с координатами, равными коэффициентам при переменных в целевой функции (c_1, c_2) . В общем виде

$$\text{grad } Z = \left(\frac{dZ}{dx_1}, \frac{dZ}{dx_2}, \dots, \frac{dZ}{dx_n} \right). \quad (1.10)$$

Данный вектор перпендикулярен изоцелям. Поэтому, используя градиент, легко найти оптимальное решение задачи линейного программирования.

Итак, пользуясь градиентом, или, строя семейство изоцелей, мы, продвигаясь по области допустимых значений, находим последнюю общую точку для изоцели и области допустимых значений, для которой Z максимально. Из графика видно, что такой последней общей точкой является точка G . Она лежит на пересечении прямых $2x_1 + x_2 = 100$ и $x_1 + x_2 = 80$. Решая эту систему уравнений, получаем оптимальные значения переменных: $x_1 = 20$, $x_2 = 60$. При этом значение целевой функции составляет $Z = 3 \times 20 + 2 \times 60 = 180$.

После того как найдено оптимальное решение задачи игрушечной фабрики, было бы целесообразным дать классификацию ограничений данной задачи относительно оптимальной точки и полученных результатов.

Определение. Ограничение называется **связующим**, если в результате подстановки в него значений оптимальной точки левая его часть равна правой, то есть ограничение выполняется как строгое равенство.

Так, ограничения (1.2) и (1.3) связующие.

Определение. Ограничение называется **несвязующим**, если в результате подстановки в него значений оптимальной точки левая его часть не равна правой, то есть ограничение выполняется как строгое неравенство.

Так как $x_1 = 20$ меньше 40, то ограничение (1.4) – несвязующее.

1.5. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА, ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТОЧКИ И ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Определение. Множество точек S называется **выпуклым**, если наряду с любыми двумя точками, принадлежащими данному множеству, оно содержит и отрезок прямой, их соединяющий.

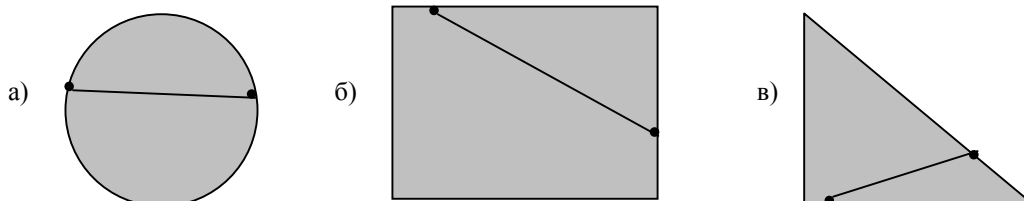
Рассмотренное определение относится к двумерному случаю. Для n -мерного пространства оно звучит следующим образом.

Определение. Множество точек S называется **выпуклым**, если наряду с любыми двумя точками, принадлежащими данному множеству, оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

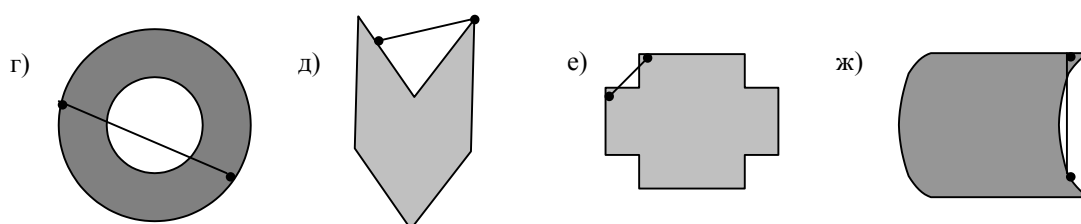
Так, область допустимых значений рассмотренной задачи – выпуклое множество точек.

Ниже приведены примеры выпуклых и невыпуклых множеств на плоскости:

1) выпуклые множества точек



2) невыпуклые множества точек



Во втором случае (примеры (г), (д), (е) и (ж)) множества не являются выпуклыми, так как не существует таких отрезков прямых линий, которые бы полностью принадлежали приведенным множествам точек и соединяли бы выделенные точки.

Определение. Для любого выпуклого множества точек S точка P из данного множества называется **крайней точкой**, если любой отрезок прямой линии, полностью принадлежащий S , содержит точку P как конечную точку данного отрезка.

Крайние точки часто называют **угловыми точками**.

В примере (а) все точки, лежащие на окружности, являются крайними или угловыми. На прямоугольнике (б) и в треугольнике (в) крайними точками являются точки, расположенные по их углам.

В задаче линейного программирования число крайних точек ограничено. Кроме того, *оптимальное решение задачи, как правило, находится в одной из крайних (угловых) точек* (это можно было заметить и на приведенном выше примере). Этот результат является очень важным, так как он предполагает значительное снижение количества возможных вариантов решений задачи линейного программирования, которые необходимо проанализировать. Поиск решения в этом случае необходимо вести не по всей области допустимых значений (где, как правило, содержится бесконечное множество точек), а только по угловым точкам, что сокращает объемы вычислений. Случай, когда решение задачи находится не в одной, а на множестве крайних точек, носит название альтернативного оптимума и будет рассмотрен ниже.

В связи с вышеизложенным, не следует путать такие два понятия, как *множество допустимых значений* и *множество допустимых решений* задачи линейного программирования. Первое определяется областью допустимых значений

задачи, а второе – числом угловых (экстремальных) точек выпуклого многогранника, определяющего данную область.

В практике решения задач линейного программирования встречаются различные ситуации, в зависимости от того, что собой представляет область допустимых значений задачи.

Так, область допустимых значений может быть:

- ограниченной, как в примере, рассмотренном выше;
- отдельной точкой;
- неограниченной;
- пустым множеством точек.

1.6. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА МИНИМУМ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим пример.

Автомобильная фирма производит два типа автомашин: представительского класса и легкие грузовики. Руководство фирмы уверено, что наиболее вероятными ее клиентами являются женщины и мужчины с высокими доходами. Для того чтобы заинтересовать потенциальных клиентов, фирма предприняла амбициозную телевизионную рекламную кампанию. С этой целью она решила купить рекламное время в двух типах телевизионных передач коммерческого телевидения: в комедийных шоу и во время трансляции футбольных матчей.

Известно, что каждое комедийное шоу просматривают в среднем 7 миллионов женщин с высоким доходом и 2 миллиона высокооплачиваемых мужчин. В то же время футбольные матчи интересуют 2 миллиона женщин с высоким доходом и 12 миллионов мужчин. Одна минута рекламы во время трансляции комедий стоит \$50000, а во время футбольных матчей – \$100000.

Компания заинтересована в том, чтобы во время коммерческих трансляций комедийных шоу и футбольных матчей охват аудитории зрителей был следующим: по меньшей мере, 28 миллионов женщин с высоким доходом и 24 миллиона обеспеченных мужчин.

Используйте линейное программирование для того чтобы помочь автомобильной компании достичь своей цели с минимальными затратами.

Решение.

Для начала определим переменные принятия решений. Автомобильная компания должна решить, сколько купить минут рекламы в период трансляции комедийных шоу и футбольных матчей. Исходя из этого, пусть

x_1 – количество минут рекламы в комедийных шоу;

x_2 – количество минут рекламы во время футбольных матчей.

Цель компании – охватить рекламой заданное количество зрителей с минимальными затратами. Общая стоимость рекламы составит:

стоимость рекламы в комедийных шоу + стоимость рекламы во время футбольных матчей = (стоимость одной минуты в комедийных шоу) $\times$

$\times$ (количество купленных минут) + (стоимость одной минуты во время футбольных матчей) $\times$ (количество купленных минут),

что в терминах выбранных переменных будет равно (в тысячах долларов):

$$50x_1 + 100x_2.$$

Итак, целевая функция задачи выглядит следующим образом:

$$\min Z = 50x_1 + 100x_2. \quad (1.11)$$

В задаче должны быть учтены такие ограничения:

Ограничение 1. Рекламой необходимо охватить не менее 28 миллионов женщин с высоким доходом.

Ограничение 2. Рекламой необходимо охватить не менее 24 миллионов мужчин с высоким доходом.

Выразим ограничения в терминах переменных принятия решений (в миллионах человек):

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28 \quad (\text{ограничение по охвату женщин}), \quad (1.12)$$

$$2x_1 + 12x_2 \geq 24 \quad (\text{ограничение по охвату мужчин}). \quad (1.13)$$

Дополняя модель ограничениями на знак переменных $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, получаем

$$\begin{aligned} \min Z &= 50x_1 + 100x_2, \\ 7x_1 + 2x_2 &\geq 28, \\ 2x_1 + 12x_2 &\geq 24, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Приведенная модель является типичной для линейного программирования, когда человек, принимающий решение, старается минимизировать затраты на достижение определенного набора требований.

Для решения задачи построим область допустимых значений (рис.1.4), используя ограничения модели (1.12), (1.13) и ограничения на знак переменных.

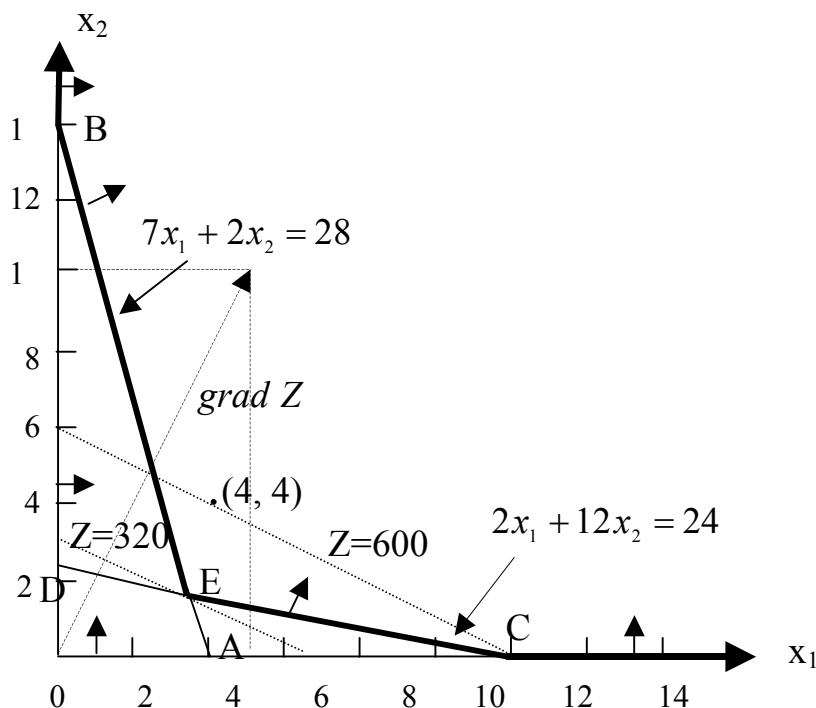


Рис. 1.4. Решение задачи по покупке рекламного времени

Точки, удовлетворяющие системе ограничений, лежат в правой верхней области первого квадранта. Ее границы определяются осью Ox_2 , точками B , E и C , и осью Ox_1 . Как и в предыдущем примере с задачей об игрушечной фабрике, область допустимых значений данной задачи — выпуклое множество точек. Однако здесь мы имеем дело с неограниченной областью допустимых значений, то есть переменные могут принять сколь угодно большие значения. Если бы вопрос ставился о достижении максимума целевой функции, то мы бы сказали, что в данной задаче она растет до бесконечности (см. направление градиента).

В задаче на минимум целевой функции изоцели убывают в противоположном направлении. Так, точка $(4, 4)$ дает значение целевой функции, равное 600 тыс. дол. И мы видим, что помимо данной точки, изоцель содержит и другие точки, принадлежащие области допустимых значений. Нам же необходимо найти ту единственную точку, которая является общей для изоцели и области допустимых значений, и приносит наименьшее значение целевой функции. Двигаясь влево вниз от изоцели со значением $Z = 600$, мы находим точку E , которая является искомой точкой. Она лежит на пересечении ограничительных линий

$$7x_1 + 2x_2 = 28,$$

и

$$2x_1 + 12x_2 = 24.$$

Приведенные ограничения являются связующими и выполняются как равенства в результате решения задачи.

Решая данную систему уравнений, получаем значения координат оптимальной точки: $x_1 = 3.6$, $x_2 = 1.4$. Покупка 3.6 минут рекламы в комедийных шоу

и 1.4 минут рекламы во время трансляции футбольных матчей обойдется автомобильной компании в \$320000 ($Z = 50 \times 3.6 + 100 \times 1.4 = \320).

Зададимся теперь вопросом: отвечает ли построенная модель требованиям задач линейного программирования, которые были сформулированы выше?

Требование пропорциональности.

Для выполнения данного требования необходимо, чтобы каждое дополнительное комедийное шоу точно добавляло 7 миллионов зрителей женского пола и 2 миллиона зрителей мужского пола с высокими доходами к общей аудитории. Однако это противоречит сложившейся практике, которая свидетельствует о том, что после определенного количества раз показа рекламы каждый новый ее показ приносит меньшее количество «отдач». Таким образом, данное требование не выполняется.

Требование аддитивности.

Данное требование предполагает независимость числа зрителей, просмотревших комедийные шоу, от их числа, просмотревших футбольные матчи. Однако такая ситуация практически не встречается в жизни. Таким образом, мы имеем дело с двойным счетом, когда одни и те же люди дважды учитываются как просмотревшие комедии и футбольные матчи. Это, естественно, существенно снижает отдачу от рекламы. Следовательно, и это требование не выполняется.

Требование делимости (непрерывности).

Если в качестве требований руководства коммерческого телевизионного канала выступает условие покупки только целого числа минут рекламы, то возможность покупки 3.6 минут рекламы во время трансляции комедийных шоу и 1.4 минут рекламы во время трансляции футбольных матчей полностью исключается. В этом случае необходимо решать данную задачу как задачу целочисленного программирования, постановка которой будет дана в соответствующей теме (возможны два варианта ее решения: $x_1 = 6$, $x_2 = 1$ и $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, которые приносят значение целевой функции, равное \$400000, что на 25% выше ранее достигнутого результата).

Требование определенности.

Так как нет никакой уверенности в том, какое в точности количество зрителей будет смотреть тот или иной вид программы (и, следовательно, будет охвачено рекламой), данное требование также нарушается.

Требование неотрицательности переменных.

Настоящее требование выполняется, так как количество минут рекламного времени, покупаемое компанией, на самом деле не может быть отрицательным.

Как видим, имеют место сильные отклонения в выполнении основных требований задач линейного программирования. Однако, несмотря на это построение и анализ подобных моделей позволяют компаниям выбрать оптимальное сочетание телевизионных и радиопрограмм для проведения рекламных акций.

1.7. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Две рассмотренные выше задачи (по фабрике игрушек и автомобильной компании) имели единственное решение. Однако на практике могут встретиться еще три типа случаев в отличие от того, когда задача имеет единственное оптимальное решение:

1. Некоторые задачи линейного программирования имеют неограниченное множество оптимальных решений (так называемый альтернативный или множественный оптимум).
2. Некоторые задачи линейного программирования не имеют допустимого решения (недопустимые задачи линейного программирования).
3. Некоторые задачи линейного программирования являются неограниченными, когда в области допустимых значений находятся точки либо с произвольно большими (для задачи на максимум), либо произвольно малыми (для задачи на минимум) значениями целевой функции.

1.7.1. АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Пример.

Автомобильная компания производит легковые и грузовые автомашины. Каждый из них проходит две производственные стадии: сборку кузовов и покраску. Если на участке покраски будут находиться только грузовики, то в течение дня их может быть окрашено 40 штук. Если окрашиваться будут только легковые автомобили, то их количество составит 60.

На участке сборки кузовов рассматриваются следующие показатели: по 50 кузовов для грузовых или легковых автомобилей может быть произведено, если участок будет выпускать только автомобили одного типа. Каждый грузовой автомобиль приносит вклад в прибыль в размере 300 грн., в то время как легковой – 200 грн.

Используйте линейное программирование для определения производственного расписания автомобильной компании, обеспечивающего максимальную прибыль.

Решение.

Компания должна определить, сколько легковых и грузовых автомобилей производить каждый день. Это приводит к тому, что в качестве переменных принятия решений будут выступать

x_1 – количество производимых ежедневно грузовых автомобилей;

x_2 – количество производимых ежедневно легковых автомобилей.

Прибыль компании в сотнях гривень в терминах принятых обозначений будет равна $3x_1 + 2x_2$. Данное выражение должно быть максимизировано

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2. \quad (1.14)$$

Для построения ограничений примем за единицу производственную мощность каждого из участков. С учетом этого, ограничения, связанные с производством автомобилей, формулируются следующим образом:

Ограничение 1. Дневная производственная мощность участка покраски, использованная для производства автомобилей обоих типов, не может превысить единицу.

Ограничение 2. Дневная производственная мощность участка сборки кузовов, использованная для производства автомобилей обоих типов, не может превысить единицу.

Чтобы построить данные ограничения, необходимо определить доли мощности каждого из участков, которые приходятся на производство одного автомобиля: грузового и легкового.

Участок покраски → грузовой автомобиль	$\frac{1}{40}x_1;$
Участок покраски → легковой автомобиль	$\frac{1}{60}x_2;$
Участок сборки кузовов → грузовой автомобиль	$\frac{1}{50}x_1;$
Участок сборки кузовов → легковой автомобиль	$\frac{1}{50}x_2.$

С учетом этого, ограничения записываются следующим образом:

$$\text{Ограничение 1.} \quad \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1. \quad (1.15)$$

$$\text{Ограничение 2.} \quad \frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1. \quad (1.16)$$

Добавляя условия неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, получаем модель

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2, \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1, \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1, \quad (1.16)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (1.17)$$

Строим область допустимых значений (рис. 1.5). Она определяется выпуклым четырехугольником $AEDF$.

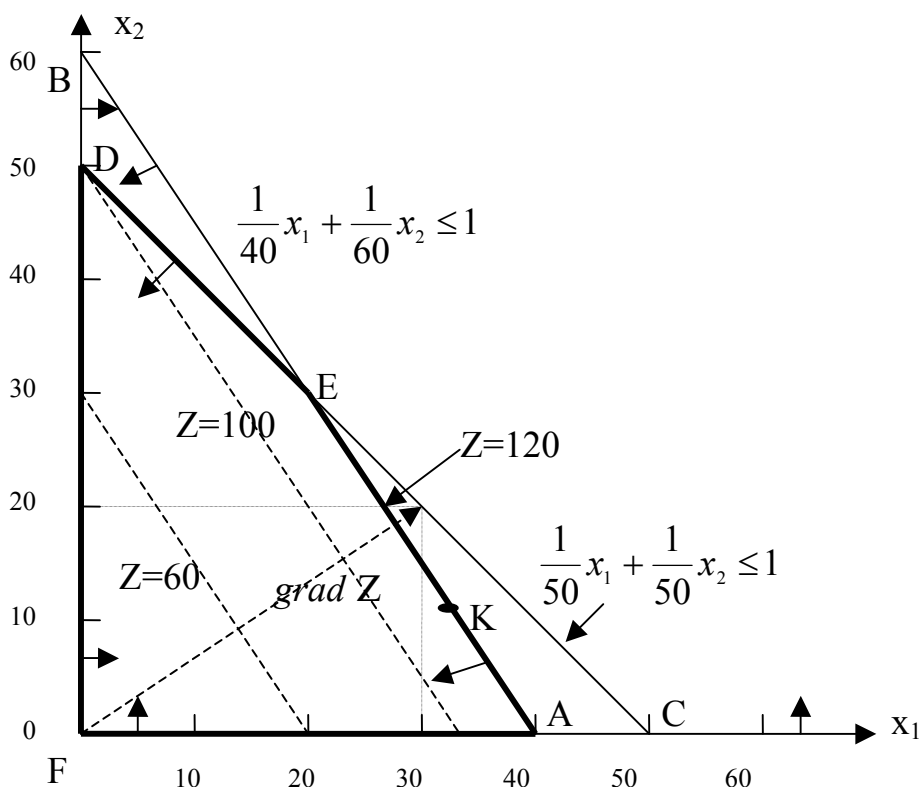


Рис. 1.5. Решение задачи по производству автомобилей

Градиент на графике показывает направление возрастания целевой функции. Нами построены две изоцели, для $Z = 60$ и $Z = 100$. Третья изоцель ($Z = 120$) совпадает с ограничением (1.15), и любое дальнейшее ее перемещение в сторону возрастания целевой функции даст хотя и большее значение Z , но оно не будет принадлежать области допустимых значений. Полученное совпадение изоцели и области допустимых значений говорит о том, что оптимальное решение достигается не в одной (угловой) точке выпуклого многогранника $AEDF$, а на отрезке AE . Каждая из точек данного отрезка приносит одно и то же значение целевой функции ($Z_{\max} = 120$). Таким образом, имеет место *множество решений* или *альтернативный оптимум*.

Переменные принимают следующие значения: в точке A : $x_1^1 = 40$, $x_2^1 = 0$, в точке E : $x_1^2 = 20$, $x_2^2 = 30$. Для нахождения координат любого другого оптимального решения, например, некоторой точки K , лежащей на отрезке AE , достаточно взять линейную комбинацию крайних точек отрезка AE

$$K(x_1^3, x_2^3) = c \times A(x_1^1, x_2^1) + (1 - c) \times E(x_1^2, x_2^2),$$

$$0 \leq c \leq 1.$$

Краткие выводы.

1. Если изоцель совпадает с отрезком прямой, определяющим область допустимых значений, то имеет место альтернативный оптимум.

2. Если полученное решение оптимально в крайних точках отрезка, то оно оптимально и в любой внутренней точке данного отрезка.

3. Если получено альтернативное оптимальное решение, то человек, ответственный за принятие решений, может поступить таким образом, чтобы выбрать наиболее «удобный» для него результат. Например, остановиться на производстве только грузовых автомобилей (точка А), что позволит сократить затраты на переналадку оборудования, связанную с переходом на другую модель автомашины. Другим способом решения задач с альтернативными вариантами является **целевое программирование**.

1.7.2. НЕДОПУСТИМАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пример.

Предположим, что дилеры выдвигают требование, чтобы автомобильная компания производила, по меньшей мере, 30 грузовых и 20 легковых автомобилей. Найдите оптимальное решение новой задачи линейного программирования.

Решение.

После добавления в математическую модель ограничений $x_1 \geq 30$ и $x_2 \geq 20$ она примет следующий вид:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2, \quad (1.18)$$

$$\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1, \quad (1.19)$$

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1, \quad (1.20)$$

$$x_1 \geq 30, \quad (1.21)$$

$$x_2 \geq 20, \quad (1.22)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (1.23)$$

Попытка решить задачу графически показывает (рис. 1.6), что система ограничений противоречива и не позволяет построить область допустимых значений, которая бы удовлетворяла всем ограничениям.

Приведенная иллюстрация показывает, что часть плоскости, лежащая по правую сторону от прямого угла FLH , удовлетворяет всем ограничениям задачи, кроме одного – (1.19). Таким образом, общих точек для всех ограничений не существует. Это подтверждается также и подстановкой значений переменных $x_1 = 30$ и $x_2 = 20$ в ограничения (1.19) и (1.20)

$$\frac{1}{40} \times 30 + \frac{1}{60} \times 20 = \frac{13}{12} > 1,$$

$$\frac{1}{50} \times 30 + \frac{1}{50} \times 20 = 1.$$

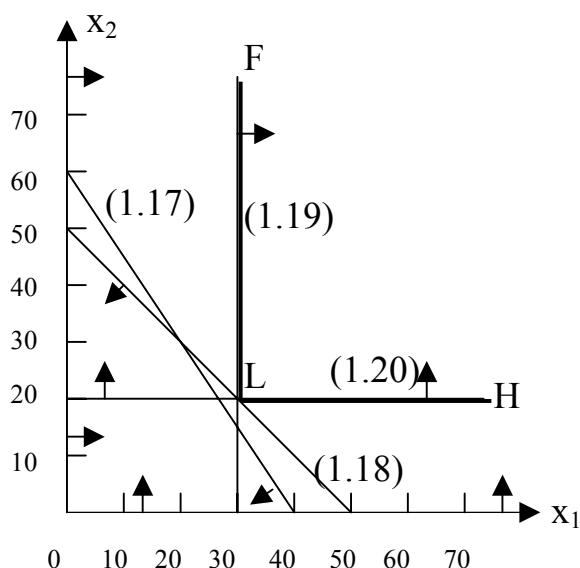


Рис. 1.6. Область допустимых значений – пустое множество точек

Как видим, ограничения (1.20), (1.21) и (1.22) выполняются, а ограничение (1.19) – не выполняется. Следовательно, рассмотренная задача решения не имеет, так как область допустимых решений – пустое множество точек.

1.7.3. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ ДОПУСТИМЫХ ПЛАНОВ

Неограниченная задача (например, на максимум дохода или прибыли) возникает тогда, когда в области допустимых значений можно найти такие точки с необоснованно большими значениями, которые бы приносили значение целевой функции, равное сколь угодно большому числу. Такие случаи, как правило, происходят, когда постановка задачи сделана некорректно.

Для задачи на минимум неограниченная задача означает получение значения целевой функции в области допустимых значений, равное сколь угодно малому числу.

Пример.

Решите графически следующую задачу линейного программирования:

Целевая функция $\max Z = 2x_1 - x_2$ (1.24)

Ограничения $x_1 - x_2 \leq 2,$ (1.25)

$2x_1 + x_2 \geq 5,$ (1.26)

$x_1, x_2 \geq 0.$ (1.27)

Решение.

Отразим на графике (рис. 1.7) прямые, описываемые уравнениями, полученными на базе ограничений (1.24) и (1.25). С учетом ограничений на знак переменных, получаем область допустимых значений, ограниченную следующей фигурой: видимая на графике часть луча, помеченная точкой B , – точка E – точка D – ось Ox_2 . Сверху данная область ничем не ограничена. Строим градиент, который показывает, что направление возрастания изоцелей – вправо вниз от точки пересечения осей координат. Перемещая изоцели в сторону возрастания целевой функции, убеждаемся, что, сколько бы их не сдвигали вправо, мы никогда не покинем область допустимых значений.

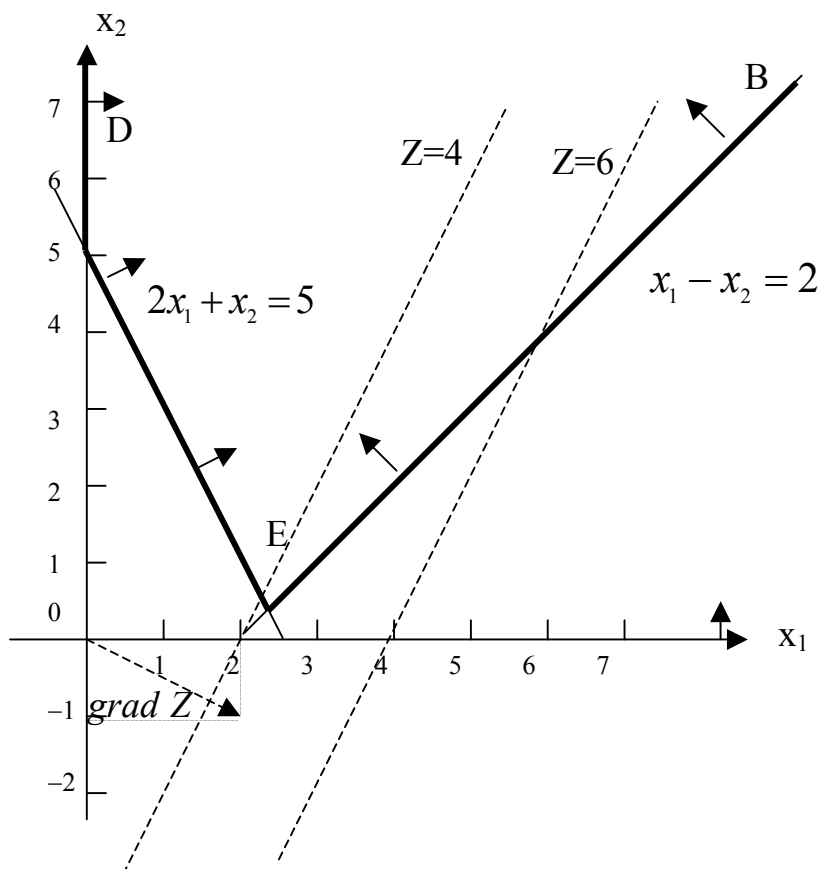


Рис. 1.7. Неограниченная задача линейного программирования

Таким образом, в области допустимых значений находятся точки, которые приносят сколь угодно большое значение целевой функции, то есть $Z \rightarrow \infty$. Следовательно, рассматриваемая задача является **неограниченной**.

Следует заметить, что неограниченная область допустимых значений задачи линейного программирования не означает, что задача неограниченна. Так, если бы данная задача решалась, например, на максимум с целевой функцией, заданной выражением $\max Z = -x_1 - x_2$, то ее решением была бы точка E .

Таким образом, необходимым условием того, чтобы задача линейного программирования была неограниченной, является наличие неограниченной области допустимых значений. Вместе с тем неограниченность ОДЗ не обязательно ведет к неограниченной задаче линейного программирования.