ГЛАВА 8. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ МНОЖЕСТВЕ ЦЕЛЕЙ. ЦЕЛЕВОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Во многих ситуациях выбор того или иного действия зависит от того, как это действие влияет не на одну, а сразу на несколько переменных. Первый пример, человек собирается купить машину. Выбирая машину, он может рассматривать следующие ее параметры:

1. *Экономичность;*
2. *Размер машины;*
3. *Тип кузова;*
4. *Цену машины.*

Или, второй пример: выпускник университета получил пять предложений об устройстве на работу. Выбирая работу, он может рассматривать следующие особенности каждой из них:

1. *Стартовая заработная плата;*
2. *Местоположение работы;*
3. *Степень интереса к работе;*
4. *Возможности продвижения по службе.*

Третий пример. Город собирается строить новый аэропорт. Три фактора могут рассматриваться при выборе его местонахождения

1. *Доступность для жителей города (расстояние от аэропорта до города);*
2. *Степень шумозагрязнения, вызываемая аэропортом;*
3. *Размер аэропорта (связан с количеством доступной для аэропорта земли).*

Четвертый пример. Игрушечная фабрика собирается выпустить новую игрушку. Фабрика хотела бы установить цену на нее. На принятие решения влияют два фактора

1. *Насыщенность рынка подобными игрушками;*
2. *Прибыль от реализации.*

В каждом из четырех примеров человек, принимающий решение, выбирает действие, определяя, как каждое конкретное решение воздействует на соответствующие переменные (атрибуты).

Подобные проблемы называются многофакторными проблемами принятия решений.

8.1. МНОГОФАКТОРНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ ОТСУТСТВИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. ЦЕЛЕВОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

8.1.1. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть n факторов могут повлиять на принятие решения. Определим через $x_i(a)$ – оценку *i*-го фактора, ассоциирующуюся с альтернативой a .

С учетом всех факторов **оценочная функция** для альтернативы *a* может быть представлена в виде

$$V\left[x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a)\right] \text{ или}$$
$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Если *A* представляет собой множество возможных решений, то необходимо выбрать такую альтернативу a^* (со значением x_i^* для *i*-го фактора), которая удовлетворяет условию

$$\max_{n \in A} V\left[x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a)\right] = V\left[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right].$$

С другой стороны, с каждой альтернативой a могут быть ассоциированы затраты

$$C\left[x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a)\right] \text{ или}$$
$$C(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Эта функция $C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **функцией затрат**.

Если *A* представляет собой множество возможных решений, то необходимо выбрать альтернативу a^* (со значением x_i^* для *i*-го фактора), которая удовлетворяет условию

$$\min_{n \in A} C\left[x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a)\right] = C\left[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right].$$

Конкретная форма функции зависит от природы задачи.

Определение. *Оценочная функция* $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *является* ***аддитивной оценочной функцией,*** *если существует n функций* $v_1(x_1), v_2(x_2), \ldots, v_n(x_n)$, *удовлетворяющих условию*

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_i).$$

Определение. *Функция затрат* $C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *является* ***аддитивной функцией затрат****, если существует n функций* $c_1(x_1), c_2(x_2), \ldots, c_n(x_n)$, *удовлетворяющих условию*

$$C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i).$$

В каких же условиях человек, принимающий решение, имеет дело с аддитивной функцией (оценочной или затрат)? Прежде чем ответить, дадим определение.

Определение. *Фактор 1* ***предпочтительно независим*** *от другого фактора 2, если выбор оценок 1-го фактора не зависит от оценок 2-го фактора.*

Для иллюстрации концепции предпочтительной независимости вернемся ко второму примеру – поиску работы. В этой ситуации фактор *1* был бы предпочтительно независимым по отношению к фактору *2*, если бы для любого местоположения работы более высокая стартовая зарплата была предпочтительнее низкой зарплаты.

В качестве другого примера рассмотрим следующую ситуацию: семья пытается решить, как провести воскресенье. Есть, по крайней мере, два фактора, которые можно принять во внимание:

1) выбор рода занятий (то ли пикник, то ли поход в кино);

2) воскресная погода (то ли солнечно, то ли дождливо).

Предположим, что в солнечную погоду пикник предпочтительнее похода в кино. Однако в дождливую погоду поход в кино предпочтительнее пикника. Следовательно, фактор *1* не является предпочтительно независимым по отношению к фактору *2*.

Определение. *Если фактор 1 предпочтительно независим по отношению к фактору 2, а фактор 2 предпочтительно независим по отношению к фактору 1, то эти факторы называются* ***совместно предпочтительно независимыми.***

Вернемся к примеру с поиском работы. Пусть имеется пять предложений о работе, поданных из городов: Львова, Черкасс, Днепропетровска, Николаева, Ирпеня. Если для любого уровня зарплаты человек предпочтет скорее работать во Львове, чем в Черкассах и т.д., то фактор *2* предпочтительно независим от фактора *1*. Если бы и фактор *1* был бы предпочтительно независим от фактора *2*, то они были бы совместно предпочтительно независимыми.

Концепция совместной предпочтительной независимости может быть обобщена для множества факторов.

Определение. *Множество факторов S* ***совместно предпочтительно независимо*** *от другого множества факторов S^I, если оценки факторов S^I не затрагивают выбор оценок факторов из S, и оценки факторов множества S не затрагивают выбора оценок множества S^I.*

Вернемся к примеру с покупкой автомашины. Пусть S включает факторы 1 и 2, а S^I – факторы 3 и 4. Тогда для того чтобы множество S было совместно предпочтительно независимым по отношению к S^I, необходимо, чтобы случилась следующая ситуация:

1) на предпочтения покупателя по размеру и экономичности машины никак не влияли бы тип кузова и цена;

2) на предпочтения покупателя по типу кузова и цене никак не влияли бы размер машины и ее экономичность.

Так, если бы S и S^I были совместно предпочтительно независимыми, то мы могли бы заключить, что, если для данного типа кузова и цены покупатель предпочитает большой автомобиль малому, то и для любого типа кузова и цены предпочтения останутся прежними.

Определение. ***Множество факторов*** $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ ***совместно предпочтительно независимо****, если для всех подмножеств* S^I *из множества* $S = \{1, 2, \ldots, n\}$*,* S^I *является совместно предпочтительно независимым по отношению к* S^{II} *(*S^{II} *– подмножество факторов из* $S = \{1, 2, \ldots, n\}$*, не вошедших в* S^I*).*

Для двух факторов это очевидно, что они совместно предпочтительно независимы тогда и только тогда, когда фактор *1* совместно предпочтительно независим по отношению к фактору 2.

Следующее утверждение дает гарантированное условие того, что человек, принимающий решение, будет иметь дело с аддитивной оценочной функцией (или функцией затрат).

Теорема. *Если множество факторов* $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ *является совместно предпочтительно независимым, то предпочтения человека, принимающего решение, могут быть представлены в виде аддитивной функции (оценок или затрат).*

8.1.2. ЦЕЛЕВОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Предположим, что человек, принимающий решение, имеет аддитивную функцию затрат в виде

$$C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n .$$

Имея такой тип функции затрат, можно использовать линейное программирование (расширенная версия которого известна как *целевое программирование*) для определения лучшего решения. Следует заметить, что функция затрат такого типа определяет (для всех значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$) такое же самое соотношение для каждой пары факторов x_i и x_j .

Например, для любых значений факторов и любого числа *K*, если мы увеличим значение фактора *i* на *K* и уменьшим значение фактора *j* на $\frac{Kc_i}{c_j}$, то $C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ останется неизменной.

Это предполагает, что $\frac{c_i}{c_j}$ единиц фактора *j* эквивалентны одной единице фактора *i*.

Даже, если в ситуации, когда рассмотренная функция $C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не является точным отражением предпочтений лица, принимающего решения, она часто принимается как приближенное их отражение.

Рассмотрим, как линейное и целевое программирование могут быть использованы для определения оптимальных решений, когда функция затрат – аддитивная функция рассмотренного выше типа.

*Термин **«целевое программирование»** употребляется для того чтобы отразить идею, когда человек, принимающий решение, ищет не лучшее, т.е. оптимальное, а скорее такое решение, которое «достаточно хорошее» или «достаточно близкое» к оптимальному.*

Пример.

Рекламное агентство пытается определить расписание для показа рекламы автомобильной компании. Данная компания преследует три цели:

Цель 1. *Рекламу должны просмотреть, по крайней мере, 40 тыс. мужчин с высоким доходом (МВД).*

Цель 2. *Рекламу должны просмотреть, по меньшей мере, 60 тыс. людей с низким доходом (ЛНД).*

***Цель 3**. Рекламу должны просмотреть, по крайней мере, 35 тыс. женщин с высоким доходом (ЖВД).*

Агентство может приобрести два типа рекламы: показываемой во время трансляции футбольных матчей и сериалов. Не более 600000 грн. может быть израсходовано на рекламу. Стоимость одноминутной рекламы и потенциальная аудитория каждого типа телепередач представлены в таблице:

Телепередача	*МВД, тыс.*	*ЛНД, тыс.*	*ЖВД, тыс.*	*Затраты, грн.*
Футбол	*7*	*10*	*5*	*100000*
Сериал	*3*	*5*	*4*	*60000*

Агентство должно определить, сколько минут рекламы необходимо приобрести автомобильной компании для показа во время трансляции футбольных матчей и сериалов с целью достижения поставленных задач.

Решение.

Пусть

x_1 – количество минут рекламы, показываемой во время трансляции футбольных матчей;

x_2 – количество минут рекламы, показываемой во время трансляции сериалов.

Тогда любое допустимое решение следующей задачи линейного программирования позволит достичь целей автомобильной компании

$$\min(\text{или } \max) Z = q_1 x_1 + q_2 x_2 \quad (\text{или любая другая целевая функция}),$$

$$7x_1 + 3x_2 \ge 40 \quad \text{(ограничение по МВД)},$$

$$10x_1 + 5x_2 \ge 60 \quad \text{(ограничение по ЛНД)},$$

$$5x_1 + 4x_2 \ge 35 \quad \text{ограничение по ЖВД)},$$

$$100x_1 + 60x_2 \le 600 \quad \text{(ограничение по бюджету)}.$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \quad \text{(ограничение на знак)}.$$

Рассмотрим графическую интерпретацию данной задачи (см. рис. 8.1). На графике ограничение по бюджету выделено жирной линией. Приведенная иллюстрация показывает, что ни одна из точек, которая удовлетворяет бюджетному ограничению, не реализует все три цели автомобильной компании. Таким образом, задача не имеет допустимого решения.

Так как невозможно достичь всех целей, агентство по рекламе может попросить автомобильную компанию определить для каждой из них затраты (назначить штрафы) из расчета на единицу, недостающую до выполнения цели, которые возникают в связи с неудачей при ее достижении.

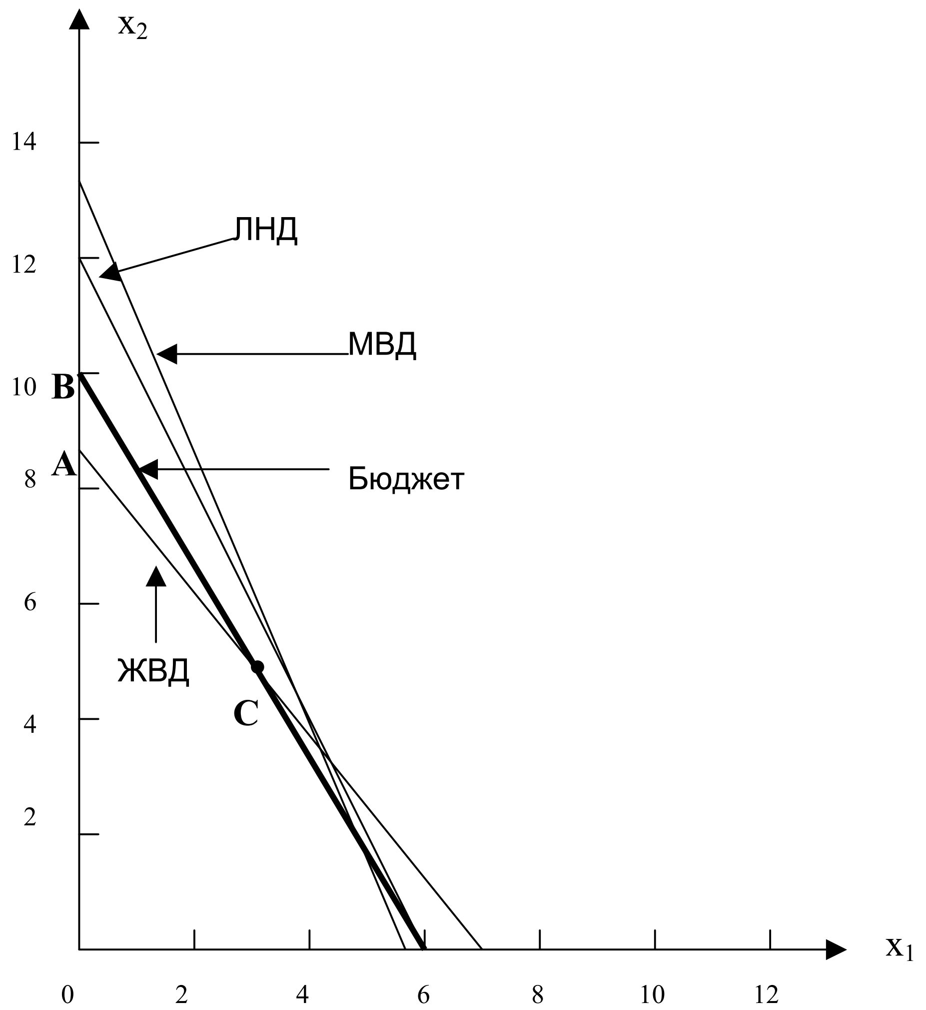

Рис. 8.1. Иллюстрация отсутствия решений задачи по рекламе автомобилей

Предположим, что автомобильная компания определила, что:

- каждая тысяча зрителей, на которую рекламное агентство недовыполнит первую цель, будет стоить 200000 грн. в связи с потерями от продаж автомобилей;
- каждая тысяча зрителей, на которую рекламное агентство недовыполнит вторую цель, будет стоить 100000 грн. в связи с потерями от продаж автомобилей;
- каждая тысяча зрителей, на которую рекламное агентство недовыполнит третью цель, будет стоить 50000 грн. в связи с потерями от продаж автомобилей.

Теперь агентство может сформулировать модель линейного программирования, которая минимизирует затраты, связанные с отклонением от трех целей автомобильной компании.

Задача заключается в преобразовании каждого ограничения типа неравенства, определяющего цель, в ограничения типа равенства путем введения в них дополнительных переменных. Так как нам неизвестно, будет ли решение, минимизирующее затраты, недоудовлетворять или переудовлетворять конкретную цель, необходимо определить следующие переменные:

S_i^+ – количество, на которое мы численно переудовлетворяем *i*-ю цель;

S_i^- – количество, на которое мы численно недоудовлетворяем *i*-ю цель.

Переменные S_i^+ и S_i^- принято называть **отклоняющимися переменными**.

В нашей проблеме предположим, что S_i^+ и S_i^- измеряются в тысячах зрителей. Используя отклоняющиеся переменные, перепишем первые три ограничения в виде

$$7x_1 + 3x_2 + S_1^- - S_1^+ = 40,$$
$$10x_1 + 5x_2 + S_2^- - S_2^+ = 60,$$
$$5x_1 + 4x_2 + S_3^- - S_3^+ = 35.$$

Например, предположим, что $x_1 = 5$, а $x_2 = 2$. Такое количество рекламного времени дает возможность охватить

7×5 + 3×2 = 41 тыс. мужчин с высоким доходом.

Так как это число превышает заданный показатель на $41 - 40 = 1$, то $S_1^- = 0$ и $S_1^+ = 1$. Это решение также приносит охват

10×5 + 5×2 = 60 тыс. лиц с низким доходом.

Отсюда $S_2^- = S_2^+ = 0$.

Наконец, для высокооплачиваемых женщин мы имеем

5×5 + 4×2 = 33 тыс. зрителей.

Таким образом, $S_3^- = 2$ и $S_3^+ = 0$.

Пусть автомобильная компания хотела бы минимизировать потери от непродаж автомобилей (в тыс. грн.), связанных с отклонением от трех целей:

$$200S_1^- + 100S_2^- + 50S_3^-.$$

Коэффициент при переменной, связанной с i-й целью, называется ***весом*** *i-й цели. Наиболее важная цель имеет наибольший вес.*

Имея некоторый эквивалент целевой функции, агентство может минимизировать потери от непродаж автомобилей

$$\min Z = 200S_1^- + 100S_2^- + 50S_3^-,$$

$$7x_1 + 3x_2 + S_1^- - S_1^+ = 40,$$
$$10x_1 + 5x_2 + S_2^- - S_2^+ = 60,$$
$$5x_1 + 4x_2 + S_3^- - S_3^+ = 35,$$
$$100x_1 + 60x_2 \qquad \le 600,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ S_j^{+(-)} \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

Оптимальное решение задачи следующее: $Z = 250, x_1 = 6, x_2 = 0, S_1^+ = 2,$ $S_2^+ = 0, S_3^+ = 0, S_1^- = 0, S_2^- = 0, S_3^- = 5.$

Это означает, что первая и вторая цели достигнуты, но третья цель не достигнута на 5 тыс. человек, что приносит общий штраф в размере 250 тыс. грн.

Допустим, что мы модифицировали условие задачи по рекламе автомобилей, решив, что ограничение по бюджету в размере 600000 грн. также является одной из наших целей.

Будем считать, что штраф за невыполнение ограничения составляет 1 гривну из расчета на 1 грн. превышения правой его части. С учетом этого модель может быть представлена следующим образом:

$$\min Z = 200S_1^- + 100S_2^- + 50S_3^- + S_4^+,$$
$$7x_1 + 3x_2 + S_1^- - S_1^+ = 40,$$
$$10x_1 + 5x_2 + S_2^- - S_2^+ = 60,$$
$$5x_1 + 4x_2 + S_3^- - S_3^+ = 35,$$
$$100x_1 + 60x_2 + S_4^- - S_4^+ = 600,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ S_j^{+(-)} \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

В отличие от предыдущего подобное оптимальное решение данной задачи следующее: $Z = 33\frac{1}{3},\ x_1 = 4\frac{1}{3},\ x_2 = 3\frac{1}{3},\ S_1^+ = \frac{1}{3},\ S_2^+ = 0,\ S_3^+ = 0,\ S_4^+ = 33\frac{1}{3},$ $S_1^- = 0,\ S_2^- = 0,\ S_3^- = 0,\ S_4^- = 0.$

Так, если принять условие по выполнению ограничения по бюджету в качестве цели, то оптимальным решением будет достижение всех трех целей по рекламе с превышением бюджета на 33.33 тыс. грн.

Краткие обобщения.

1. *Если неудача достичь i-ю цель возникает тогда, когда достигнутое значение цели численно меньше желаемого ее значения, то в целевую функцию вводится переменная* S_i^-.
2. *Если неудача достичь i-ю цель возникает тогда, когда достигнутое значение цели численно больше желаемого ее значения, то в целевую функцию вводится переменная* S_i^+.

3. *Если же у нас имеется желание достичь точного значения i-й цели и штрафы определены как за ее недовыполнение, так и за перевыполнение, то обе переменные, S_i^- и S_i^+, включаются в целевую функцию.*
4. *Целевая функция задачи целевого программирования* ***всегда*** *стремится к минимуму, так как отражает необходимость минимизации отклонений от заданных целей.*

8.2. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВАЖНОСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ УСЛОВИИ НАЛИЧИЯ КОНФЛИКТНЫХ ЦЕЛЕЙ

Для иллюстрации данной идеи рассмотрим **пример**:

Имеется пять пищевых продуктов из зерновых культур, которые характеризуются по пяти признакам: цене, содержанию полезных веществ, содержанию сахара, содержанию клетчатки и качеству. Предположим, что потребитель проранжировал эти продукты, используя шкалу от 1 до 10. (Оценка 10 является наивысшей: продукт имеет низкую цену, содержит множество полезных веществ, достаточное количество сахара, много клетчатки и имеет высокое качество; оценка 1 – самая низкая: высокая цена продукта, низкое содержание полезных веществ и т.д.). Данные опроса приведены в таблице

Продукт	*Цена*	*Содержание полезных веществ*	*Содержание сахара*	*Содержание клетчатки*	*Качество*
1	*4*	*6*	*3*	*4*	*7*
2	*2*	*2*	*10*	*1*	*10*
3	*4*	*10*	*5*	*5*	*4*
4	*4*	*7*	*1*	*10*	*3*
5	*1*	*7*	*6*	*5*	*8*

Предположим, что потребитель хотел бы знать весовые оценки приведенных признаков с целью определения общей оценки каждого из продуктов. Общая оценка продукта определяется суммой произведений весовых оценок признаков на соответствующие оценки каждого фактора (из таблицы).

Пусть потребитель определил предпочтения относительно предложенных продуктов следующим образом:

1. *Продукт 2 предпочтительнее продукта 1;*
2. *Продукт 3 предпочтительнее продукта 2;*
3. *Продукт 3 предпочтительнее продукта 4;*
4. *Продукт 5 предпочтительнее продукта 1;*
5. *Продукт 5 предпочтительнее продукта 2.*

Необходимо определить такой набор весов, который будет наилучшим образом отражать высказанные предпочтения.

Решение.

Выберем переменные:

C – весовая оценка цены продукта;
N – весовая оценка содержания полезных веществ;
S – весовая оценка содержания сахара;
F – весовая оценка содержания клетчатки;
P – весовая оценка качества продукта.

Мы знаем, что потребитель предпочитает второй продукт первому. Это позволяет записать соотношение:

$$4C + 6N + 3S + 4F + 7P \le 2C + 2N + 10S + F + 10P$$

или

$$2C + 4N - 7S + 3F - 3P \le 0 .$$

Для заданных набора весов и решения K определяем штраф Z_K:

$$Z_K = \max\left\{\begin{matrix} 0, \ (\text{оценка менее предпочтительного продукта в решении К}) - \\ -(\text{оценка более предпочтительного продукта в решении К}) \end{matrix}\right\}$$

Это подразумевает, что, если данный набор весов представляется «обратно предпочтительным», то назначается штраф, равный количеству обратной предпочтительности.

Для нахождения весов решается задача

$$\begin{aligned}
&\min Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 ,\\
&C + N + S + F + P = 1 ,\\
&Z_1 - 2C - 4N + 7S - 3F + 3P \ge 0 ,\\
&Z_2 + 2C + 8N - 5S + 4F - 6P \ge 0 ,\\
&Z_3 \quad + 3N + 4S - 5F + P \ge 0 ,\\
&Z_4 - 3C + N + 3S + F + P \ge 0 ,\\
&Z_5 - C + 5N - 4S + 4F - 2P \ge 0 ,\\
&Z_K \ge 0 \ \left(K = \overline{1,5}\right),\\
&C, N, S, F, P \ge 0 .
\end{aligned}$$

Решая данную задачу, получаем следующие значения весовых оценок признаков: $C = 0.39583334,\ N = 0.3125,\ S = 0.29166666,\ F = P = 0,\ Z_1 = Z_2 = = Z_3 = Z_4 = Z_5 = 0.$

Найденные весовые оценки позволяют найти общие оценки каждого из продуктов

продукт 1:	4.333533316,
продукт 2:	4.33333328,
продукт 3:	6.16666666,
продукт 4:	4.06250002,

продукт 5: 4.3333333.

С точки зрения полученных результатов можно сделать вывод, что наиболее ценным является продукт 3. Продукты 5, 1 и 2 примерно равноценны (различия в оценках несущественны). И наконец, продукт 4 является наименее ценным, хотя его оценка не намного меньше оценок продуктов 5, 1 и 2, по сравнению с отличием оценок данных продуктов от продукта 3.

8.3. ПРИОРИТЕТНОЕ ЦЕЛЕВОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

При формулировке задачи о покупке рекламного времени мы предполагали, что владелец автомобильной компании может точно определить относительную важность каждой цели. Так, было определено, что достижение цели по охвату рекламой мужчин с высоким доходом (*МВД*) в два раза важнее, чем аналогичная цель по лицам с низким доходом (*ЛНД*): $200/100=2$.

Аналогично, цель *ЛНД* в два раза важнее цели *ЖВД*: $100/50=2$. Во многих ситуациях, тем не менее, человеку, принимающему решение, трудно точно определить относительную важность целей. В таком случае прибегают к *приоритетному целевому программированию* как средству, способному помочь выйти из создавшегося положения.

Чтобы применить приоритетное целевое программирование, человек, принимающий решение, должен проранжировать цели, начиная с наиболее важной (1) и заканчивая наименее важной (n).

Коэффициенты целевой функции для переменной, представляющей *i*-ю цель, будут P_i.

Мы предполагаем, что

$$P_1 >>> P_2 >>> P_3 >>> \ldots >>> P_n .$$

Так, вес первой цели значительно выше веса второй цели, вес второй цели значительно выше веса третьей цели и т.д.

Такое определение весов $P_1, P_2, \ldots, P_n$ гарантирует, что человек, принимающий решение, в первую очередь будет стремиться к достижению более важной, первой цели. Затем среди всех точек, удовлетворяющих первой цели, он будет стараться как можно ближе приблизиться ко второй цели и т.д.

Мы будем продолжать в таком же духе до тех пор, пока единственным путем удовлетворить определенную цель будет увеличение отклонения от цели с высшим приоритетом.

Для нашего случая формулировка задачи приоритетного целевого программирования получается из ранее построенной модели путем замены целевой функции

$$\min Z = 200S_1^- + 100S_2^- + 50S_3^-$$

на

$$\min Z = P_1S_1^- + P_2S_2^- + P_3S_3^- .$$

Итак, модель приоритетного целевого программирования выглядит следующим образом:

$$\min Z = P_1S_1^- + P_2S_2^- + P_3S_3^-,$$
$$7x_1 + 3x_2 + S_1^- - S_1^+ = 40,$$
$$10x_1 + 5x_2 + S_2^- - S_2^+ = 60,$$
$$5x_1 + 4x_2 + S_3^- - S_3^+ = 35,$$
$$100x_1 + 60x_2 \le 600,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ S_j^{+(-)} \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

Чтобы применить приоритетное целевое программирование, мы должны разделить целевую функцию на n компонент, где n – число рассматриваемых целей. Каждая *i*-я компонента состоит из переменной целевой функции, относящейся к *i*-й цели. Мы определим

Z_i – переменная целевой функции, отражающая *i*-ю цель.

Для примера имеем

$$Z_1 = P_1S_1^-,\ Z_2 = P_2S_2^-,\ Z_3 = P_3S_3^-.$$

Задачи приоритетного целевого программирования могут быть решены с помощью расширенной версии симплекс метода, известной как *симплекс метод целевого программирования.*

Чтобы подготовить задачу к решению с помощью симплекс метода целевого программирования мы должны рассчитать n строк целевой функции, где *i*-я строка, соответствует *i*-й цели.

Так, для нашей проблемы мы имеем:

для цели 1: $Z_1 - P_1S_1^- = 0$,

для цели 2: $Z_2 - P_2S_2^- = 0$,

для цели 3: $Z_3 - P_3S_3^- = 0$.

Из системы ограничений рассмотренной задачи мы имеем исходный допустимый базис $BV = \{S_1^-, S_2^-, S_3^-, S_4\}$, где S_4 – свободная переменная для 4-го ограничения.

Как и в стандартном алгоритме симплекс метода, мы должны избавиться от базисных переменных в каждой строке целевой функции. То есть для каждой цели имеем

$$S_1^- = 40 - 7x_1 - 3x_2 + S_1^+,$$
$$S_2^- = 60 - 10x_1 - 5x_2 + S_2^+,$$
$$S_3^- = 35 - 5x_1 - 4x_2 + S_3^+.$$

Цель 1: $Z_1 + 7P_1x_1 + 3P_1x_2 - P_1S_1^+ = 40P_1$,

Цель 2: $Z_2 + 10P_2x_1 + 5P_2x_2 - P_2S_2^+ = 60P_2$,

Цель 3: $Z_3 + 5P_3x_1 + 4P_3x_2 - P_3S_3^+ = 35P_3$.

После произведенных преобразований задача может быть решена с помощью симплекс метода целевого программирования.

Различия между целевым симплекс методом и основной его версией следующие:

1) стандартный симплекс метод оперирует с одной строкой целевой функции, в то время как целевой симплекс метод требует наличия *n* строк целевой функции (по числу целей);
2) в целевом симплекс методе используется следующий прием для определения переменной, входящей в базис. Находится цель с наивысшим приоритетом (цель $i^{'}$), которая еще не достигнута. Отыскивается переменная с наибольшим положительным коэффициентом в данной строке (для цели $i^{'}$). Эта переменная вводится в базис, что позволяет нам снизить значение $Z_{i^{'}}$ и гарантирует приближение к цели $i^{'}$. Если ни одна из переменных из строки $i^{'}$ не может быть введена в базис без увеличения отклонения от некоторой другой цели с более высоким приоритетом, то нет возможности приблизиться к достижению цели $i^{'}$. В этом случае переходим к следующей строке целевой функции, соответствующей цели $i^{'}+1$, в попытке приблизиться к цели $i^{'}+1$;
3) когда осуществляется цикл пересчета, он касается всех строк целевой функции;
4) таблица принесет оптимальный результат в том случае, когда либо все цели достигнуты (т.е. когда $Z_1 = Z_2 = ... = Z_n = 0$), либо когда любая переменная, которая может быть введена в базис и снизить значение $Z_{i^{'}}$ неудовлетворенной цели $i^{'}$, увеличит отклонение от некоторой цели i, имеющей более высокий приоритет.

Используем теперь целевой симплекс метод для решения нашей задачи. В каждой комплексной таблице строки целевой функции расположены в порядке убывания приоритетов соответствующих целей. В исходной таблице $S_1^- = 40, S_2^- = 60, S_3^- = 35, S_4 = 600$.

Базис	C_j	b_i	x_1	x_2	S_1^+	S_2^+	S_3^+	S_1^-	S_2^-	S_3^-	S_4	Симпл. отнош.
			0	0	0	0	0	P_1	P_2	P_3	0	
S_1^-	P_1	40	**7**	3	–1	0	0	1	0	0	0	40/7 < 6
S_2^-	P_2	60	10	5	0	–1	0	0	1	0	0	6
S_3^-	P_3	35	5	4	0	0	–1	0	0	1	0	7
S_4	0	600	100	60	0	0	0	0	0	0	1	6
$Z_1 - C_j$	–	$40P_1$	$7P_1$	$3P_1$	$-P_1$	0	0	0	0	0	0	
$Z_2 - C_j$	–	$60P_2$	$10P_2$	$4P_2$	0	$-P_2$	0	0	0	0	0	
$Z_3 - C_j$	–	$35P_3$	$5P_3$	$5P_3$	0	0	$-P_3$	0	0	0	0	

Так как $Z_1 = 40P_1$, то первая цель не достигнута. Чтобы снизить штрафы, ассоциирующиеся с достижением первой цели, введем в базис переменную с наибольшим положительным коэффициентом в данной строке целевой функции. Такой переменной будет x_1. Рассчитывая симплексные отношения, определяем разрешающую строку – строку по ограничению для *МВД*.

В результате решения получен новый базис: $x_1 = \dfrac{40}{7}, S_2^- = \dfrac{20}{7}, S_3^- = \dfrac{45}{7}$, $S_4 = \dfrac{200}{7}$. Так как $S_1^- = 0$ и $Z_1 = 0$, то первая цель достигнута.

Теперь попытаемся достичь второй цели. Для этого будем оперировать со второй строкой целевой функции: для второй цели – *ЛНД*. Переменная с наибольшим положительным коэффициентом в данной строке целевой функции – S_1^+. Заметим, что ввод в базис S_1^+ не увеличит значения Z_1, так как коэффициент при S_1^+ в данной строке целевой функции равен 0. Таким образом, после ввода в базис S_1^+ первая цель будет все еще удовлетворена.

Базис	C_j	b_i	x_1	x_2	S_1^+	S_2^+	S_3^+	S_1^-	S_2^-	S_3^-	S_4	Симпл. отнош.
			0	0	0	0	0	P_1	P_2	P_3	0	
x_1	0	40/7	1	3/7	–1/7	0	0	1/7	0	0	0	–
S_2^-	P_2	20/7	0	5/7	10/7	–1	0	–10/7	1	0	0	2
S_3^-	P_3	45/7	0	13/7	5/7	0	–1	–5/7	0	1	0	9
S_4	0	200/7	0	120/7	**100/7**	0	0	–100/7	0	0	1	2
$Z_1 – C_j$	–	0	0	0	0	0	0	$–P_1$	0	0	0	
$Z_2 – C_j$	–	$20P_2/7$	0	$5P_2/7$	$10P_2/7$	$–P_2$	0	$–10P_2/7$	0	0	0	
$Z_3 – C_j$	–	$45P_3/7$	0	$13P_3/7$	$5P_3/7$	0	$–P_3$	$–5P_3/7$	0	0	0	

Симплексное отношение показывает, что переменная S_1^+ может войти в базис либо в ограничении *ЛНД*, либо в бюджетном ограничении. Произвольно выберем бюджетное ограничение. Цикл пересчета приносит новую таблицу, в которой $Z_1 = Z_2 = 0$:

Базис	C_j	b_i	x_1	x_2	S_1^+	S_2^+	S_3^+	S_1^-	S_2^-	S_3^-	S_4	Симпл. отнош.
			0	0	0	0	0	P_1	P_2	P_3	0	
x_1	0	6	1	3/5	0	0	0	0	0	0	1/100	
S_2^-	P_2	0	0	–1	0	–1	0	0	1	0	–1/10	
S_3^-	P_3	5	0	1	0	0	–1	0	0	1	–1/20	
S_1^+	0	2	0	6/5	1	0	0	–1	0	0	7/100	
$Z_1 – C_j$	–	0	0	0	0	0	0	$–P_1$	0	0	0	
$Z_2 – C_j$	–	0	0	$–P_2$	0	$–P_2$	0	0	0	0	$–P_2/10$	
$Z_3 – C_j$	–	$5P_3$	0	P_3	0	0	$–P_3$	0	0	0	$–P_3/20$	

Из таблицы видно, что третья цель еще не достигнута. Текущий базис: $x_1 = 6, S_2^- = 0, S_3^- = 5, S_1^+ = 2.$

Попытаемся достичь третьей цели без нарушения достигнутых первой и второй целей. Единственной переменной, имеющей положительный коэффициент в строке Z_3, является x_2. Однако в строке Z_2 при данной переменной отрицательный коэффициент, следовательно, единственным путем достичь третью цель является нарушение второй цели, которая является более высокой по приоритету, чем третья цель. А так как это невозможно, то мы имеем дело с таблицей с оптимальным решением.

Таким образом, оптимальным решением является покупка 6 мин. рекламы в период трансляции футбольных матчей и ни одной минуты во время трансляции сериалов. Первая и вторая цели полностью достигнуты, а третья – не достигнута.

Автомобильная компания теряет пять тыс. зрителей среди женщин с высоким доходом.

Если есть возможность использовать переоценку приоритетов целей, то может быть получено множество решений. Из этого множества человек, принимающий решение, может выбрать то, которое в большей степени отвечает его предпочтениям. В таблице, приведенной ниже, представлены варианты решений для всех возможных сочетаний приоритетов. Так, из таблицы видно, что различные сочетания приоритетов ведут к различным рекламным стратегиям.

Приоритеты			Оптимальное решение		Отклонение от цели по категориям лиц		
Наивысший	Средний	Наименьший	x_1	x_2	МВД	ЛНД	ЖВД
МВД	ЛНД	ЖВД	6	0	0	0	5
МВД	ЖВД	ЛНД	5	5/3	0	5/3	10/3
ЛНД	МВД	ЖВД	6	0	0	0	5
ЛНД	ЖВД	МВД	6	0	0	0	5
ЖВД	МВД	ЛНД	3	5	4	5	0
ЖВД	ЛНД	МВД	3	5	4	5	0

Когда задача приоритетного целевого программирования включает только две переменные, то оптимальное решение может быть найдено с помощью графического способа.

Предположим, что *ЖВД* – цель наивысшего приоритета, *ЛНД* – вторая по значимости цель, а *МВД* – третья по значимости. Из ранее приведенного графика (рис. 8.1) видно, что набор точек, удовлетворяющих цели с наивысшим приоритетом (*ЖВД*) и бюджетному ограничению, ограничен треугольником *ABC*. Среди набора этих точек попытаемся подойти как можно ближе к удовлетворению второй по важности цели (цели *ЛНД*). К сожалению, ни одна точка в треугольнике *ABC* не удовлетворяет цели *ЛНД*.

Однако из графика мы можем также увидеть, что среди множества точек, удовлетворяющих первой по важности цели, точка C является единственной точкой, которая ближе всего расположена к ограничению *ЛНД*. Решая уравнения

$$5x_1 + 4x_2 = 35,$$
$$100x_1 + 60x_2 = 600,$$

находим координаты точки $C = (3, 5)$. Так, для данного набора приоритетов решением задачи приоритетного целевого программирования является покупка трех минут рекламы во время трансляции футбольных матчей и пяти минут рекламы во время трансляции сериалов.

ЗАДАЧИ

8.1. Малая промышленная компания производит стиральные машины и сушилки. Производство каждого изделия требует одного часа времени. Завод имеет нормальную производственную мощность, равную 40 часам в неделю. Не более 24 стиральных машин и тридцати сушилок может храниться на складе в течение недели. Приносимая каждым из изделий прибыль составляет 80 грн. для стиральной машины и 40 грн. для сушилки. Менеджер разработал ряд целей, которые приведены в порядке убывания их степени важности:

1. Избежать недоиспользования нормальной производственной мощности;
2. Произвести стиральных машин и сушилок как можно больше. Но, так как прибыль от реализации стиральных машин в два раза больше, чем от сушилок, то менеджер хотел бы, чтобы стиральных машин производилось в два раза больше, чем сушилок;
3. Минимизировать, по возможности, сверхурочное время.

Сформулируйте и решите данную задачу как задачу целевого программирования.

8.2. Фирма производит три продукта: №1, №2 и №3. Потребности в ресурсах приведены в таблице:

Продукт	Вид ресурса		Прибыль
	Труд (час./ед.)	Материалы (кг/ед.)	
№1	5	4	3
№2	3	6	5
№3	4	3	2

В настоящее время фирма имеет нормальную производственную мощность в размере 240 часов рабочего времени в сутки при дневных поставках материалов в размере 400 кг. Математически данная проблема формулируется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2 + 2X_3,& \\
5X_1 + 3X_2 + 4X_3 \le 240 &\quad \text{(труд)},\\
4X_1 + 6X_2 + 3X_3 \le 400 &\quad \text{(материалы)},\\
X_1,\ X_2,\ X_3 \ge 0.&
\end{aligned}
$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда отдел менеджмента разработал ряд целей, которые приведены ниже в порядке убывания их важности для фирмы

1. В связи со сложностью отношений с рабочими менеджеры хотели бы спланировать производство таким образом, чтобы не было недоиспользования нормальной производственной мощности (т.е. чтобы не было увольнений рабочих);
2. Менеджеры установили достаточный уровень прибыли из расчета на день в размере 500 грн.;
3. Сверхурочное время должно быть минимизировано как только это возможно;
4. Менеджеры хотели бы минимизировать покупку дополнительных материалов в связи со сложностями их доставки и хранения.

Модифицируйте приведенную выше проблему и решите как задачу целевого программирования.

8.3. Городская служба по поддержанию парков и зон отдыха получила федеральный грант в размере $600000 на расширение общественных зон отдыха. Опрос избирателей членами городского совета показал, что 4 типа сооружений необходимы для города: гимнастические залы, спортивные площадки, теннисные корты и плавательные бассейны. Фактическая потребность различных общественных групп в этих типах сооружений составляет: 7 гимнастических залов, 10 спортивных площадок, 8 теннисных кортов и 12 плавательных бассейнов. Между тем каждый из указанных видов сооружений стоит определенных денег, требует определенного количества акров земли и имеет определенный уровень посещаемости. Соответствующие параметры приведены в таблице

Сооружение	Затраты на строительство, $	Занимаемая площадь, акров	Ожидаемая посещаемость, человек в неделю
Гимнастический зал	80000	4	1500
Спортивная площадка	24000	8	3000
Теннисный корт	15000	3	500
Плавательный бассейн	40000	5	1000

Под строительство отведено 50 акров земли (хотя при необходимости может быть использовано и большее количество земли).

Сформулируйте модель целевого программирования, используя следующий набор целей, выдвинутых городской службой по поддержанию парков (цели расположены в порядке убывания их важности):

1. Грант должен быть использован полностью, в противном случае неиспользованная его часть будет возвращена в федеральный бюджет;
2. Городские власти хотели бы, чтобы сооружения посещались не менее чем 20000 граждан еженедельно;
3. Городские власти хотели бы избежать использования дополнительных земель, превышающих первоначально выделенные 50 акров;
4. Городские власти хотели бы удовлетворить требования депутатов городского совета по числу сооружений каждого типа. Тем не менее, приоритеты каждого из них определяются исходя из ожидаемой их посещаемости;
5. Если власти вынуждены будут использовать большее количество земли, то они хотели бы ограничить это количество 10-ю акрами.

8.4. Электронная компания производит два типа телевизоров: со встроенным видеомагнитофоном (моноблок) и без него. Производство моноблока требует 10 часов квалифицированного и 100 часов неквалифицированного труда. Производство обычных телевизоров требует 5 часов квалифицированного и 150 часов неквалифицированного труда. В распоряжении компании имеется 100 часов квалифицированного и 1500 часов неквалифицированного труда в месяц для производства телевизоров всех видов. Исследование рынка позволяет сделать утверждение, что максимальное количество моноблоков и обычных телевизоров, которое может быть продано, составляет 70 и 45 штук, соответственно. Приносимая этими телевизорами прибыль равна 20 и 15 грн. Компания выдвинула ряд целей, которых она хотела бы достичь (цели расположены в порядке убывания их важности для компании):

1. Избежать переиспользования квалифицированного труда, так как квалифицированные рабочие имеются в ограниченном количестве на рынке труда;
2. Минимизировать недоиспользование неквалифицированного труда;
3. По возможности, удовлетворить потребности в телевизорах (назначьте веса в соответствии с прибыльностью каждого из видов продукции);
4. Ограничить переиспользование неквалифицированного труда 100 часами;
5. Максимизировать прибыль.

Сформулируйте и решите задачу целевого программирования.

8.5. Ваша бабушка только что выиграла в лотерею 200000 грн. В связи с ее преклонным возрастом Вы решили ей помочь, инвестируя деньги по следующим пяти направлениям: поместить в акции, купить недвижимость, купить облигации, положить на счет в банке, купить бриллианты. Ожидаемая ежегодная отдача от средств, вложенных в недвижимость и облигации, составляет 15 и 10%, соответственно, в то время как по счету в банке можно получить только 6% годовых. Так как покупка акций и бриллиантов сопряжена с риском, Вы не можете предположить, что они что-либо принесут. Вы установили следующие цели, расположив их в порядке убывания важности:

1. Минимизировать риск, вкладывая средства по различным направлениям. Не более 40% всех денег может быть использовано по любому из направлений;
2. Так как бриллианты, по слухам, прибыльны, попытаться инвестировать по меньшей мере 50000 грн. по этому направлению;
3. Количество денег, помещенных в рискованные предприятия (акции и бриллианты), не должно превышать их количества, помещенного в безопасные предприятия.
4. Гарантировать Вашей бабушке получение годового дохода в размере, по меньшей мере, 25000 грн.

Сформулируйте и решите задачу целевого программирования для определения количества денег, помещаемых по различным направлениям, приносящим доход.

8.6. Компания собирается выпускать новый продукт. Она хотела бы определить цену на данный продукт. Два фактора: доля рынка и прибыль, определяют решение компании относительно цены.

Являются ли данные факторы совместно предпочтительно независимыми? Почему да или почему нет?

8.7. Городские власти должны определить, сколько машин скорой помощи разместить в различных районах города. Три фактора являются решающими при выработке решения:

1. Среднее время (в минутах), необходимое для машины скорой помощи, чтобы добраться до малообеспеченных районов города;

2. Среднее время (в минутах), необходимое для машины скорой помощи, чтобы добраться до хорошо обеспеченных районов города;
3. Количество денег, которое должны городские власти затратить на обеспечение обслуживания населения машинами скорой помощи.

Вопросы.

1. Являются ли данные факторы совместно предпочтительно независимыми? Почему да или почему нет?
2. Предположим, что оценочная функция для городских властей описывается выражением $v(x_1,x_2,x_3)=-x_1-5000x_2-10000x_3$. Какие факторы представлены величинами x_1, x_2 и x_3?
3. Что подразумевается оценочной функцией под соотношениями между каждой парой факторов?

8.8. Андрей собирается поужинать в итальянском ресторане. Четыре фактора определяют возможную степень его удовлетворенности ужином:

1. Выбор закусок;
2. Выбор основных блюд;
3. Выбор вин;
4. Качество еды.

Как Вы думаете, будет ли оценочная функция Андрея представлять совместную предпочтительную независимость факторов? Почему да или почему нет?

8.9. Городские власти хотели бы определить размещение машин скорой помощи на предстоящий год. Затраты на обслуживание машины составляют 5000 грн. в год. Каждая из машин должна быть закреплена за одним из двух районов. Пусть x_i – количество машин, закрепленных за районом i ($i=1,2$). Среднее время (в минутах) для того, чтобы ответить на вызов из района i следующее: для района 1: $40 - 3x_1$, для района 2: $50 - 4x_2$. Власти города ставят перед собой три цели:

1. Среднее время ответа на запрос в районе 1 должно быть не более 5 минут;
2. Среднее время ответа на запрос в районе 2 должно быть не более 5 минут;
3. Не более 100000 грн. в год может быть использовано для обеспечения сервиса скорой помощи.

Власти города подсчитали, что для каждого района минута запаздывания сверх 5-минутного лимита времени эквивалентна 10000 грн., а каждая гривня, затраченная сверх бюджета, несет дополнительные затраты в 1 грн.

Задание.

1. Постройте и решите модель линейного программирования для определения количества машин скорой помощи, размещенных в каждом районе;
2. Для каждого порядка приоритетов используйте симплекс метод целевого программирования для определения закрепления машин за районами: 1) Ц1>Ц2>Ц3; 2) Ц2>Ц1>Ц3; 3) Ц3>Ц1>Ц2.

8.10. Компания, производящая компьютеры, собирается сделать закупку чипов. Она может приобрести их у трех поставщиков (партиями по 10 чипов). Каждый чип проранжирован по уровню качества как отличный, хороший или посредственный. На предстоящий год компании необходимо 5000 чипов отличного качества, 3000 хороших чипов и 1000 посредственных. Характеристики чипов, покупаемых у различных поставщиков, представлены в таблице

Поставщик	Характеристики партии из 100 чипов			Цена за 100 чипов, $
	Отличный	Хороший	Посредственный	
1	60	20	20	400
2	50	35	15	300
3	40	20	40	250

Ежегодно компания может потратить $28000 на покупку чипов. Если компания не получила достаточного количества чипов определенного качества, то она может сделать специальный заказ по цене $10 за чип отличного качества, $6 за чип хорошего качества и $4 за чип посредственного качества. За каждый доллар, потраченный сверх бюджета на покупку чипов, налагается штраф в размере $1.

Сформулируйте и решите задачу линейного программирования для минимизации штрафов, связанных с обязательством по обеспечению заданного количества чипов в год.

Используйте преимущественное целевое программирование для определения политики покупки чипов. Пусть наивысший приоритет имеет ограничение по бюджету. Затем идут ограничения по качеству чипов: отличное – хорошее – посредственное.

8.11. Четыре преподавателя школы бизнеса могут читать четыре курса: маркетинг, финансы, организацию производства и статистику. В течение семестра 200 студентов слушают каждый из этих курсов. «Эффективность» чтения преподавателями данных курсов приведена в таблице.

Каждый преподаватель должен прочесть лекции 200 студентам в течение семестра. Декан поставил цель – достичь уровня эффективности чтения каждого курса на уровне 6 баллов. Отклонение от этой цели по любому курсу считается одинаково нежелательным.

Преподаватель	Маркетинг	Финансы	Организация производства	Статистика
1	7	5	8	2
2	7	8	9	4
3	3	5	7	9
4	5	5	6	7

Сформулируйте модель целевого программирования для определения закрепления преподавателей за читаемыми курсами.

8.12. Оптовая компания хотела бы определить партию закупки телевизоров и видеомагнитофонов. Стоимость телевизора составляет 1200 грн., а видеомагнитофона – 800 грн. Для хранения телевизора необходима площадь в 3 м^2, а для видеомагнитофона – в 1 м^2. Продажа телевизора приносит компании прибыль в 600 грн., а видеомагнитофона – в 400 грн.

Компания выдвинула ряд целей (в порядке важности):

1. На покупку телевизоров и видеомагнитофонов может быть использовано не более 80000 грн.;

2. Компания должна получить минимум 44000 грн. прибыли от продажи телевизоров и видеомагнитофонов;
3. Площадь, занимаемая телевизорами и видеомагнитофонами, не должна превышать 200 $м^2$.

Сформулируйте модель преимущественного целевого программирования для определения, сколько заказать телевизоров и видеомагнитофонов?

Как должна быть модифицирована модель, чтобы цель по прибыли (44000) была точно достигнута?