

ГЛАВА 10. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

Считается, что основоположниками теории игр являются Джон фон Нейман и Оскар Моргенштерн. Так, в 1929 г. была опубликована статья Джона фон Неймана «К теории стратегических игр». В 1944 г. появился фундаментальный труд Дж. фон Неймана и О.Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение», в которой были заложены основы теории игр как новой математической дисциплины. Однако задолго до этих публикаций имели место теоретико-игровые рассуждения в работах Баше де Мезирака, в письме Паскаля к Ферма от 29 июля 1654 г. и в статье Р.Монморта.

В начале XX века были попытки создания математической теории конфликтов (теории игр), что нашло свое отражение в статьях К.Баутона, Е.Мура, Э.Цермело, Э.Бореля, Г.Штейнгауза, в монографии Э.Ласкера, а также в докладе Дж. фон Неймана 7 декабря 1926 г. на заседании Геттингенского математического общества.

В дальнейшем было опубликовано большое количество теоретических работ и учебников по теории игр. Авторами данных работ являются Э.Бургер, Дж. Мак Кинси, Г.Оуэн, Н.Н.Воробьев, Э.Г.Давыдов, С.Карлин, Ж.-П.Обэн, И.Розенмюллер и др.

Задачи по теории принятия решений предполагают, что оптимальное решение, принимаемое человеком, никак не влияет на решения других людей, принимающих участие в ситуации (или наоборот).

Чаще возникают ситуации, когда двое или большее количество лиц одновременно предпринимают действия, которые отражаются на получаемом доходе каждого из участников. Так, если одна компания намеревается расширить сеть ресторанов и кафе и принимает решение по определению цен на блюда, то оно, естественно, будет иметь отражение в ценах уже существующих кафе и ресторанов-конкурентов.

Теория игр эффективна в тех случаях, когда имеют место конфликтные интересы. Для начала рассмотрим случаи, когда в игре принимают участие два игрока, интересы которых различны.

10.1. ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ. СЕДЛОВЫЕ ТОЧКИ

При рассмотрении игр двух лиц с нулевой суммой учитываются следующие особенности:

1. Имеются два игрока (строковый и столбцовый);
2. Строковый игрок должен выбрать одну из m стратегий и одновременно столбцовый игрок – одну из n стратегий;
3. Если строковый игрок выберет стратегию i , а столбцовый – стратегию j , то первый получит доход a_{ij} , а второй – убыток в том же размере (a_{ij}) .

Подобные игры (игры двух лиц с нулевой суммой) обычно представляются в виде матрицы, которая носит название *платежной матрицы* или *матрицы наград*.

В общем виде данная матрица выглядит следующим образом:

Стратегии строкового игрока	Стратегии столбцового игрока			
	Стратегия 1	Стратегия 2	...	Стратегия n
Стратегия 1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
Стратегия 2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
Стратегия m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Для следующего примера

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & \textcircled{2} \end{bmatrix}$$

можно сказать, что, если строковый игрок выберет вторую стратегию, а столбцовый игрок третью, то первый получит выигрыш в две единицы, а второй проиграет столько же.

Учитывая это, можно отметить, что основной особенностью игр двух лиц с нулевой суммой является то, что **для любых выбранных стратегий общий выигрыш будет равен нулю**. То есть доход одного игрока равен проигрышу другого, что говорит о взаимной противоположности их интересов.

Теория игр основывается на следующем предположении: каждый игрок выбирает стратегию, которая позволяет ему поступить наилучшим образом при условии, что его оппонент знает стратегию, которой он следует.

Рассмотрим принципы действия каждого из игроков (строкового и столбцового) с учетом сформулированного выше предположения. Для этого воспользуемся информацией, представленной в таблице

Стратегии строкового игрока	Стратегии столбцового игрока		
	Стратегия 1	Стратегия 2	Стратегия 3
Стратегия 1	1	5	4
Стратегия 2	2	2	6
Стратегия 3	3	4	5

Сначала рассмотрим игру с точки зрения строкового игрока.

Если строковый игрок выберет первую стратегию, то столбцовый должен будет выбрать также первую с тем, чтобы минимизировать свои потери (1 единицу). Если строковый игрок выберет вторую стратегию, то столбцовый должен выбрать либо первую, либо вторую (его потери составят 2 единицы). И наконец, если строковый игрок выберет третью стратегию, то столбцовому придется выбрать первую стратегию, чтобы минимизировать свои потери, равные трем единицам.

С точки зрения сформулированного предположения, строковый игрок, с целью получения наибольшего дохода должен выбрать такую стратегию, которая максимизирует строковый минимум, т.е. $\max\{1 \ 2 \ 3\} = 3$, что соответствует третьей стратегии. В этом случае строковый игрок получит доход, который будет не менее трех.

Для столбцового игрока имеют место следующие ситуации.

Если он выберет первую стратегию, то строковому игроку придется выбрать третью, так как в этом случае потери столбцового игрока будут наибольшими – 3 единицы. Если столбцовый игрок выберет вторую стратегию, то строковому игроку придется выбрать первую (потери первого составят 5 единиц). Если столбцовый

игрок выберет третью стратегию, то строковому придется выбрать вторую (потери столбцового игрока составят 6 единиц).

Применяя предположение, получаем, что для того, чтобы минимизировать свои потери, столбцовый игрок должен выбрать стратегию, соответствующую минимальным потерям среди максимальных для столбцов: $\min\{3 \ 5 \ 6\} = 3$.

В рассмотренной ситуации строковый игрок может выиграть, по крайней мере, 3 единицы, а столбцовый игрок не дать ему выиграть больше, чем 3 единицы. Таким образом, наилучшим исходом для строкового игрока будет выиграть 3 единицы.

Стратегии строкового игрока	Стратегии столбцового игрока			Минимум в строке
	Стратегия 1	Стратегия 2	Стратегия 3	
Стратегия 1	1	5	4	1
Стратегия 2	2	2	6	2
Стратегия 3	3	4	5	3
Максимум в столбце	3	5	6	

Рассмотренная игровая матрица имеет свойство, удовлетворяющее **условию седловой точки**, когда

$$\max (\text{среди строковых минимумов}) = \min (\text{среди столбцовых максимумов})$$

Считается, что любая игра для двух игроков с нулевой суммой, удовлетворяющая данному условию, имеет **седловую точку**.

Если встречается такая ситуация в игре двух игроков с нулевой суммой, когда матрица имеет седловую точку, то строковому игроку необходимо выбрать стратегию, соответствующую левой части приведенного условия, а столбцовому – соответствующую правой части. В нашем случае оптимальным решением строкового игрока будет выбор третьей стратегии, а столбцового – первой.

Таким образом, общим значением для обеих частей условия является значение $v = 3$. Эта величина называется **ценой игры** для строкового игрока.

Седловая точка определяется таким образом, что она является одновременно минимальной точкой в собственной строке и максимальной – в собственном столбце. Другими словами, эта точка является, с одной стороны, локальным минимумом, а с другой – локальным максимумом. В этом смысле она может рассматриваться как **точка равновесия**, покинув которую, за счет одностороннего изменения стратегии ни один из игроков не получит выгоды.

Так, если строковый игрок выберет другую стратегию (например, первую или вторую), то он получит меньший выигрыш. Если же столбцовый игрок изменит свою стратегию (с первой на вторую или третью), то он проиграет больше. Поэтому ни одному из игроков не выгодно покидать седловой точки.

Рассмотренный случай с седловой точкой является частным, и он не так часто встречается. Так, например, игра, описываемая матрицей

Стратегии строкового игрока	Стратегии столбцового игрока		Минимум в строке
	Стратегия 1	Стратегия 2	
Стратегия 1	-3	2	-3
Стратегия 2	2	-2	-2
Максимум в столбце	2	2	

не имеет седловой точки, так как

$$\begin{aligned} & \max (\text{среди строковых минимумов}) = -2, \\ \text{а} & \min (\text{среди столбцовых максимумов}) = 2. \end{aligned}$$

10.2. ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С ПОСТОЯННОЙ СУММОЙ

Дадим определение игры двух лиц с постоянной суммой.

Определение. *Игра двух лиц с постоянной суммой – это такая игра, в которой для любых стратегий двух игроков сумма их выигрышей имеет постоянное значение C .*

Для игры двух лиц с нулевой суммой это число равно нулю ($C = 0$).

Как и в предыдущем случае, игра с постоянной суммой сохраняет ту особенность, что игроки имеют взаимно противоположные (конфликтные) интересы. Рост дохода одного из игроков на единицу приводит к снижению дохода другого на ту же величину.

Для отыскания оптимальной стратегии в такой игре и нахождения ее цены может быть использован тот же подход, что и в игре двух лиц с нулевой суммой.

Пример.

Два телевизионных канала борются за аудиторию, которая насчитывает 50 млн. человек. В наиболее удобный для зрителей промежуток времени (с 20 час. 30 мин. до 21 час. 30 мин.) телевизионные каналы хотели бы определить вид программы, которая привлечет наибольшее их количество. Имеются четыре вида программ, которые каждый из каналов может транслировать: драма, комедия, боевик и футбол.

Для каждого вида программ определен охват зрительской аудитории, рассчитанный относительно первого телевизионного канала. Данные (в млн. чел.) приведены в следующей таблице:

Первый канал	Второй канал			
	Драма	Комедия	Боевик	Футбол
Драма	25	23	18	31
Комедия	22	14	16	17
Боевик	30	26	27	33
Футбол	20	24	19	28

Имеется ли седловая точка в данной игре и какова цена игры для первого и второго каналов?

Решение.

Данная игра является игрой двух лиц с постоянной суммой. Так, например, если первый канал выберет третью стратегию, т.е. решит транслировать боевик, а второй канал выберет первую стратегию, т.е. будет транслировать драму, то первый получит охват аудитории в количестве 30 млн. человек, а второй канал $50 - 30 = 20$ млн. человек. Таким образом, постоянная сумма данной игры равна 50 ($C = 50$) млн. человек.

Применим к матрице подход, рассмотренный в предыдущем параграфе: для строкового игрока в каждой строке выберем минимальные значения и запишем их в правой колонке; для столбцового игрока в каждом столбце выберем максимальные значения и запишем их в нижней строке (см. матрицу). При этом можно видеть, что

$$\begin{aligned} \max (\text{среди строковых минимумов}) &= \\ &= \min (\text{среди столбцовых максимумов}) = 26. \end{aligned}$$

Так как равенство наблюдается, то игра имеет седловую точку (первый канал должен выбрать трансляцию боевика, а второй – комедии). Одностороннее изменение стратегии одним из игроков только ухудшит положение другого.

Первый канал	Второй канал				Минимум в строке
	Драма	Комедия	Боевик	Футбол	
Драма	25	23	18	31	18
Комедия	22	14	16	17	14
Боевик	30	26	27	33	26
Футбол	20	24	19	28	19
Максимум в столбце	30	26	27	33	

Ценой игры для первого канала является 26 млн. зрителей. Для второго канала цена игры равна $50 - 26 = 24$ млн. зрителей.

10.3. ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ: СЛУЧАЙНЫЕ СТРАТЕГИИ, ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ, ДОМИНИРОВАНИЕ

Рассмотрим игры, в которых отсутствуют седловые точки.

Пример.

Два игрока играют на пальцах в «чет-нечет». Каждый из них может выбросить один или два пальца. Если сумма пальцев нечетная, то первый игрок выигрывает одну гривню, если четная – то второй (ту же величину). Матрица возможных исходов представлена в следующей таблице:

Первый игрок	Второй игрок	
	1 палец	2 пальца
1 палец	-1	1
2 пальца	1	-1

Имеется ли в данной игре седловая точка?

Решение.

Используя ранее рассмотренный подход, мы можем видеть, что

$$\begin{aligned} \max (\text{среди строковых минимумов}) &= -1, \\ \text{а} \quad \min (\text{среди столбцовых максимумов}) &= 1. \end{aligned}$$

Первый игрок	Второй игрок		Минимум в строке
	1 палец	2 пальца	
1 палец	-1	1	-1
2 пальца	1	-1	-1
Максимум в столбце	1	1	

Таким образом, в данной игре отсутствует точка равновесия (или седловая точка). Отсюда не ясно, как определить оптимальную стратегию и цену игры. Единственно, что известно, так это то, что доход первого игрока может быть не менее -1 , а доход второго игрока – не более 1 .

Какие бы стратегии оба игрока ни выбрали, всегда найдется игрок, который может получить выгоду от одностороннего изменения стратегии. Таким образом, в данном случае нет стабильности в выборе стратегии для игроков.

Рассмотрим подходы к поиску оптимальных стратегий и цены данной игры.

10.3.1. СЛУЧАЙНЫЕ ИЛИ СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

Примеры, рассмотренные ранее, предполагали, что игрок каждый раз должен выбирать одну и ту же стратегию. Рассмотрим другой случай, когда каждой стратегии игрока ставится в соответствие некоторая вероятность, с которой он выбирает эту стратегию.

Так, пусть

p_1 – вероятность того, что первый игрок выбросит 1 палец;

p_2 – вероятность того, что первый игрок выбросит 2 пальца;

q_1 – вероятность того, что второй игрок выбросит 1 палец;

q_2 – вероятность того, что второй игрок выбросит 2 пальца.

Считается, что $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ и $p_1 + p_2 = 1$. Отсюда стратегия $S_1 = (p_1, p_2)$ первого игрока называется случайной или смешанной.

Аналогично для второго игрока $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 = 1$. Стратегия $S_2 = (q_1, q_2)$ второго игрока также является смешанной.

Любая смешанная стратегия строкового игрока $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ и столбцового $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ будет называться *чистой стратегией*, если какое либо $p_i = 1$ ($q_j = 1$), то есть игроки всегда, независимо от того, который раз они играют, выбирают одну и ту же стратегию.

Чистые стратегии игры, связанной с выбором телевизионной программы для трансляции, описываются векторами $(0 \ 0 \ 1 \ 0)$ для строкового игрока и $(0 \ 1 \ 0 \ 0)$ для столбцового.

Чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии.

10.3.2. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГРЫ С ВЫБРАСЫВАНИЕМ ПАЛЬЦЕВ

Рассматривая графический подход к решению проблемы двух лиц, будем считать, что выполняется основное предположение, выдвинутое в отношении игры двух лиц с нулевой суммой. С учетом смешанных стратегий, понятие которых было

только что рассмотрено, предположение может быть интерпретировано следующим образом (в отношении первого игрока): игрок должен выбрать p_1 либо p_2 для максимизации дохода в предположении, что второй игрок знает значения p_1 и p_2 . Это, однако, не означает, что второй игрок знает действительный выбор первого до начала игры.

Для того чтобы определить оптимальную стратегию первого игрока, запишем его смешанную стратегию в виде $S_1 = (p_1, 1 - p_1)$, учитывая, что $p_1 + p_2 = 1$. Оценим ожидаемый выигрыш первого игрока R_1 . Для случая, когда второй игрок выбросит 1 палец, он определяется как математическое ожидание случайной величины, принимающей значение -1 с вероятностью p_1 и значение 1 с вероятностью $1 - p_1$. Отсюда запишем

$$R_1 = (-1) \times p_1 + 1 \times (1 - p_1) = 1 - 2p_1.$$

Графически данный доход описывается отрезком AC прямой линии (см. рис. 10.1).

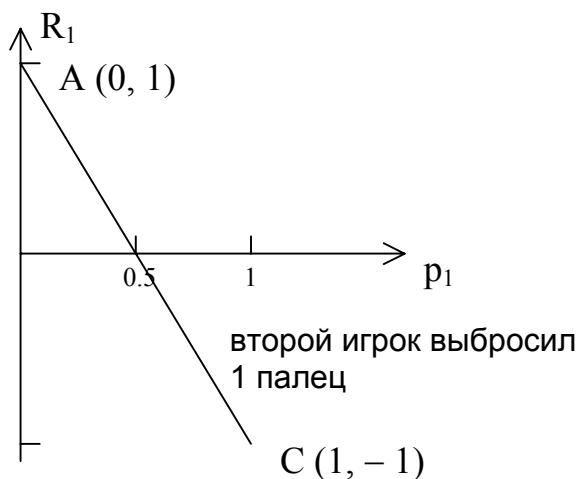


Рис. 10.1 Доход первого игрока для первой стратегии второго игрока

Когда второй игрок выбросит 2 пальца, функция дохода первого игрока для смешанной стратегии $S_1 = (p_1, 1 - p_1)$ будет следующей:

$$R_1 = 1 \times p_1 + (-1) \times (1 - p_1) = 2p_1 - 1.$$

Графически это представлено в виде отрезка DE (см. рис. 10.2).

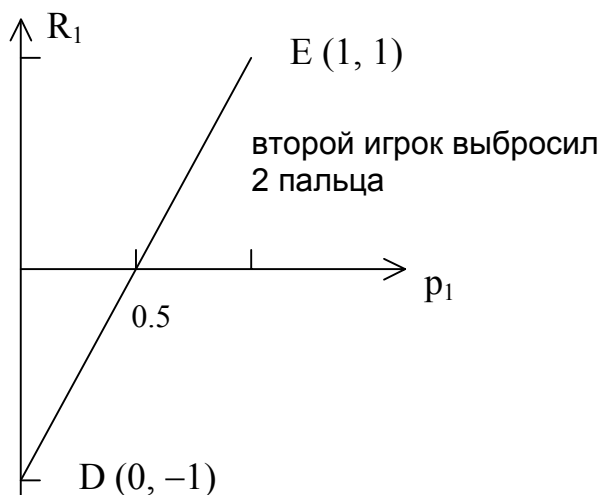


Рис. 10.2. Доход первого игрока для второй стратегии второго игрока

На рис. 10.3 представлены два объединенных графика.

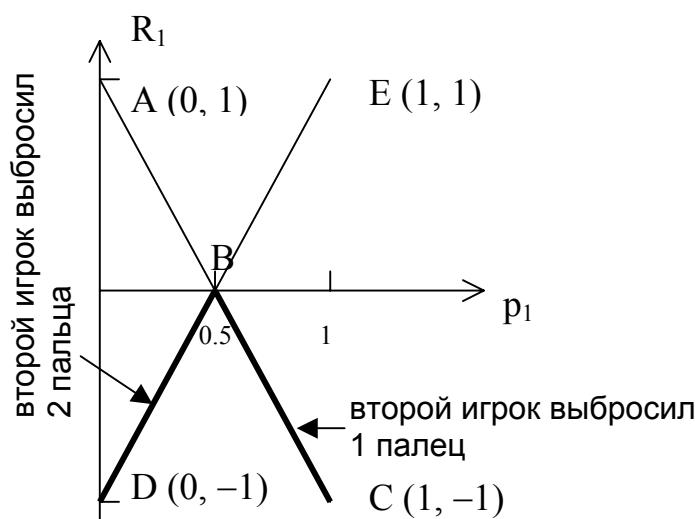


Рис. 10.3. Графическая иллюстрация дохода первого игрока

Учитывая противоположность интересов игроков, а также то условие, что второй игрок знает значение случайной стратегии первого, он будет стремиться к тому, чтобы выбрать такую стратегию (выбросить один или два пальца), которая бы принесла минимальный ожидаемый доход первому игроку. В этом случае для первого игрока областью допустимых значений будет ломаная линия DBC . Так как цель первого игрока – максимизировать ожидаемый доход, то решением его проблемы будет точка B , где линии AC и DE пересекаются. Для нахождения значения p_1 необходимо решить следующее уравнение:

$$1 - 2p_1 = 2p_1 - 1.$$

Решая уравнение, получаем $p_1 = \frac{1}{2}$. Отсюда смешанная стратегия для первого игрока равна $S_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Независимо от того, какую стратегию выберет второй игрок, стратегия первого $S_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ принесет ему ожидаемый доход, по меньшей мере, равный нулю. Для первого игрока ноль является нижней ценой игры, иначе, «дном» или «полом» (ожидаемый доход ниже быть не может для смешанной стратегии $S_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и любого выбора второго игрока).

Далее рассмотрим решение задачи с точки зрения второго игрока, то есть определим его смешанную стратегию. Аналогично рассуждая, его смешанная стратегия может быть представлена как $S_2 = (q_1, 1 - q_1)$. Значение q_1 должно быть подобрано таким, чтобы ожидаемые потери второго игрока были как можно меньше. Как и в предыдущем случае, сначала предположим, что первый игрок выбросил один палец. Тогда ожидаемый доход второго оценится как

$$R_1 = (-1) \times q_1 + 1 \times (1 - q_1) = 1 - 2q_1.$$

Если первый игрок выбросит два пальца, его ожидаемый доход составит

$$R_1 = 1 \times q_1 + (-1) \times (1 - q_1) = 2q_1 - 1.$$

Графически эти два случая выглядят так (рис. 10.4):

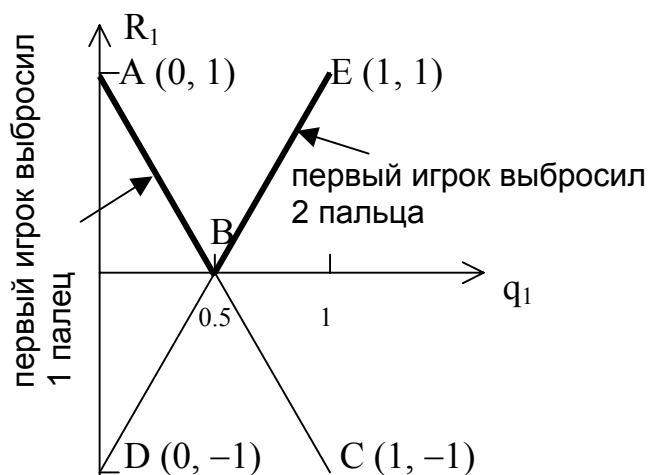


Рис. 10.4. Решение задачи с точки зрения второго игрока

Учитывая, что первый игрок знает значение q_1 , он должен предпринять такое действие, которое обеспечит ему максимальный ожидаемый доход

$$\max(1 - 2q_1, 2q_1 - 1).$$

Так как целью второго игрока является, наоборот, получение как можно меньших потерь (что равносильно снижению ожидаемого дохода первого игрока), то он должен выбрать значение q_1 , которое обеспечило бы ему достижение данной цели. Из графика видно, что точка, соответствующая минимуму потерь второго игрока, – это точка B . Решая уравнение

$$1 - 2q_1 = 2q_1 - 1,$$

находим оптимальное значение q_1 : $q_1 = \frac{1}{2}$. Отсюда смешанной стратегией второго игрока, приносящей ему наименьшие ожидаемые потери, равные нулю, является стратегия $S_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Это верхняя цена игры, иначе, «потолок» ожидаемых потерь для второго игрока, так как, какую бы стратегию первый игрок ни выбрал, второй при данной стратегии $S_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ больше нуля не проиграет.

В играх со смешанными стратегиями «дно» и «потолок» всегда совпадают. В дальнейшем будет показано, что «дно» и «потолок» являются ценой игры для строкового игрока. В рассмотренном примере цена игры равна нулю. Исходя из этого, можно дать определение оптимальной стратегии для случая смешанных стратегий.

Определение. Любая смешанная стратегия, приносящая строковому игроку ожидаемый доход, который, по крайней мере, равен цене игры, называется **оптимальной**.

Любая смешанная стратегия, приносящая столбцовому игроку ожидаемые потери, которые не превышают цену игры, называется **оптимальной**.

В подобных случаях, если какой-то из игроков решит отступить от оптимальной стратегии, то это повлечет снижение дохода ниже цены игры для строкового игрока и, соответственно, снижение потерь для столбцового (ниже цены игры).

Возможные варианты изменения стратегий и соответствующие им изменения уровня дохода приведены в таблице

Игрок	Смешанная стратегия	Выбор противника	Ожидаемый доход 1-го игрока (ожидаемые потери 2-го игрока)
1	$p_1 < 1/2$	2 пальца	< 0
	$p_1 > 1/2$	1 палец	< 0
2	$q_1 < 1/2$	1 палец	> 0
	$q_1 > 1/2$	2 пальца	> 0

10.3.3. ДОМИНИРОВАНИЕ

Исследуем определение оптимальных стратегий для более сложного случая.

Пример.

Рассмотрим игру с подбрасыванием монеты. Пусть для первого игрока выигрышным является выпадение герба, а для второго – решки.

Суть игры заключается в следующем. Результат подбрасывания монеты показывается первому игроку, который должен ответить: «пас» или «играю». Если он говорит «пас», то должен заплатить второму игроку одну гривню. Если говорит «играю», то второй игрок, который не знает результата подбрасывания монеты, должен либо свернуть игру, сказав «пас», либо поддержать ее, сказав «играю». Если второй игрок сворачивает игру, то он должен заплатить первому одну гривню. Если продолжает и монета выпала гербом, то он платит первому две гривни, если выпадает решка, то первый игрок платит ему две гривни.

Необходимо сформулировать игру двух лиц с нулевой суммой, найти цену игры и определить оптимальные стратегии игроков.

Решение.

Для формулировки игры определим возможные ее исходы и соответствующий ожидаемый доход первого игрока.

Так, первый игрок может сказать «пас» на любой из исходов (ПП), сказать «пас» при выпадении герба и «играю», когда выпадет решка (ПИ), сказать «играю» при выпадении герба и «пас», когда выпадет решка (ИП) и, наконец, может сказать «играю» на оба исхода (ИИ).

С учетом возможных стратегий второго игрока получим таблицу возможных доходов первого:

Сочетание стратегий	Доход первого игрока
ПП – игра	$0.5 \times (-1) + 0.5 \times (-1) = -1$
ПП – пас	$0.5 \times (-1) + 0.5 \times (-1) = -1$
ПИ – игра	$0.5 \times (-1) + 0.5 \times (-2) = -1.5$
ПИ – пас	$0.5 \times (-1) + 0.5 \times (1) = 0$
ИП – игра	$0.5 \times (2) + 0.5 \times (-1) = 0.5$
ИП – пас	$0.5 \times (1) + 0.5 \times (-1) = 0$
ИИ – игра	$0.5 \times (2) + 0.5 \times (-2) = 0$
ИИ – пас	$0.5 \times (1) + 0.5 \times (1) = 1$

На основе полученной информации сформируем игровую матрицу

Первый игрок	Второй игрок		Минимум в строке
	Игра	Пас	
ПП	–1	–1	–1
ПИ	–1.5	0	–1.5
ИП	0.5	0	0
ИИ	0	1	0
Максимум в столбце	0.5	1	

У данной игровой матрицы нет седловой точки, так как

$\max$ (среди строковых минимумов) $\neq \min$ (среди столбцовых максимумов).

Анализ матрицы позволяет сделать вывод, что некоторые стратегии подавляются другими. Так, первому игроку было бы неразумно, например, выбрать стратегию *ПП*, так как она заведомо проигрышна по отношению к таким стратегиям, как *ИП* и *ИИ*.

Учитывая это, можно сформулировать определение **доминирующей** стратегии.

Определение. Стратегия i^1 одного из игроков доминирует над стратегией i (или, что равноценно, стратегия i подавляется стратегией i^1), если для любой стратегии другого игрока первый, выбрав стратегию i^1 , получает доход не ниже, чем, если бы он выбрал стратегию i и, по крайней мере, для одной стратегии другого игрока, стратегия i^1 первого игрока превосходит стратегию i .

Используя данное определение, можно сократить игровую матрицу, удалив из исходной стратегии *ПП* и *ПИ*, так как они подавляются стратегиями *ИП* и *ИИ*.

Первый игрок	Второй игрок		Минимум в строке
	Игра	Пас	
ИП	0.5	0	0
ИИ	0	1	0
Максимум в столбце	0.5	1	

Таким образом, как в ранее рассмотренном примере, данная игра не имеет седловой точки. Определим через

- p_1 – вероятность того, что первый игрок выберет стратегию *ИП*;
- $p_2 = 1 - p_1$ – вероятность того, что первый игрок выберет стратегию *ИИ*;
- q_1 – вероятность того, что второй игрок выберет стратегию «играю»;
- $q_2 = 1 - q_1$ – вероятность того, что второй игрок выберет стратегию «пас».

Ожидаемый доход первого игрока относительно стратегии второго «игра» составит

$$R_1 = \frac{1}{2}p_1 + 0 \cdot (1 - p_1) = \frac{p_1}{2}.$$

Относительно стратегии «пас» ожидаемый доход первого игрока равен

$$R_1 = 0 \cdot p_1 + 1 \cdot (1 - p_1) = 1 - p_1.$$

Поведение функций R_1 относительно двух приведенных стратегий представлено на рис. 10.5.

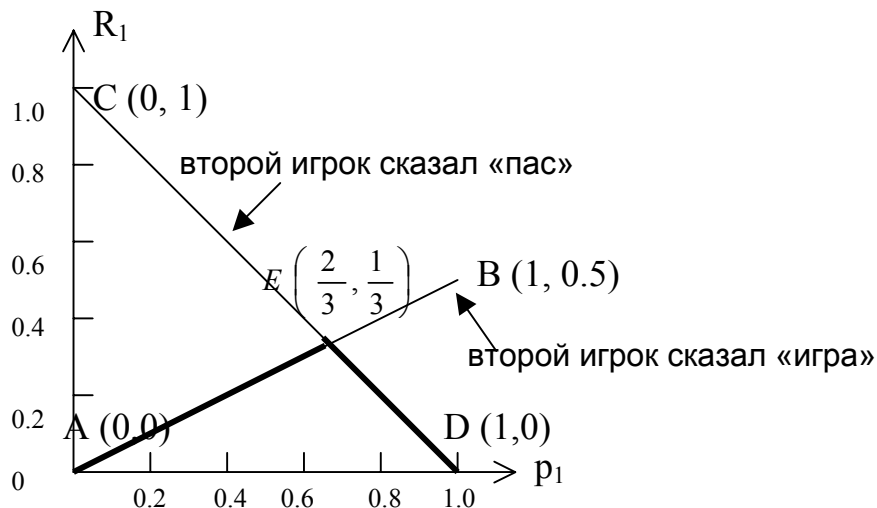


Рис. 10.5. Поведение функции R_1 для разных стратегий второго игрока

Так как предполагается, что второй игрок знает значение p_1 , то цель игры первого игрока заключается в том, чтобы выбрать такую стратегию, при которой его ожидаемый доход наибольший. При этом область допустимых значений дохода первого игрока – ломаная линия AED . Максимум достигается в точке E , т.е. в точке пересечения прямых AB и CD . Находим значение p_1 , решая следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{2} &= 1 - p_1, \\ p_1 &= \frac{2}{3}, \quad p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Итак, оптимальной стратегией первого игрока является смешанная стратегия $S_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ и ожидаемый доход равен $\frac{1}{3}$.

Рассмотрим решение игровой ситуации относительно второго игрока. Для случая, когда первый игрок выберет стратегию *ИП*, его ожидаемый доход составит

$$R_1 = \frac{1}{2}q_1 + 0 \cdot (1 - q_1) = \frac{q_1}{2}.$$

Если же первый игрок выберет вторую стратегию *ИИ*, то его доход в терминах q_1

$$R_1 = 0 \cdot q_1 + 1 \cdot (1 - q_1) = 1 - q_1.$$

Графически доход первого игрока представлен следующим образом (рис. 10.6):



Рис. 10.6. Графическая интерпретация дохода первого игрока

Для заданного значения q_1 первый игрок должен выбрать стратегию, обеспечивающую ему максимальный доход. Его выбор лежит на ломаной линии *BEC*. Можно было бы выбрать стратегию, соответствующую, например, точке *C*, которая обеспечит ему максимум ожидаемого дохода. Однако есть второй игрок, который в этом не заинтересован. Напротив, его целью является получение как можно меньшего убытка, что для данной ломаной соответствует точке *E*.

Учитывая тот факт, что в точке *E* пересекаются прямые *CD* и *AB*, мы можем найти ее координаты

$$\frac{q_1}{2} = 1 - q_1, \quad q_1 = \frac{2}{3}.$$

Отсюда оптимальной смешанной стратегией второго игрока будет $S_2 = (2/3, 1/3)$ и ожидаемый доход первого игрока и одновременно ожидаемые потери второго – составят $1/3$.

Таким образом, ценой данной игры является $1/3$, а оптимальные стратегии обоих игроков будут равны $S_1 = S_2 = (2/3, 1/3)$.

Следует заметить, что в данной игре есть место и для блефа. Так, первый игрок может сказать «играю» в том случае, когда выпала невыигрышная сторона монеты (решка). При этом вероятность выигрыша данного игрока равна $p_2 = 1/3$.

10.4. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ИГРЫ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Игры с нулевой суммой могут быть описаны с помощью линейного программирования. Тем самым можно найти оптимальные стратегии игроков и цену игры. Для описания подхода рассмотрим пример.

Пример.

Камень, бумага и ножницы. В игре участвуют два игрока. Суть игры состоит в следующем. Оба игрока одновременно произносят одно из трех слов: камень, бумага или ножницы. Если слова совпадают, то считается, что игроки сыграли вничью. В противном случае, один из игроков платит другому одну гривню в зависимости от того, кто какое слово произнес. В игре используется следующее правило: ножницы режут бумагу, бумага прячет (накрывает) камень, камень приводит в негодность ножницы. Необходимо найти цену игры и оптимальные стратегии игроков.

Решение.

Для построения модели введем обозначения

- p_1 – вероятность того, что строковый игрок произнесет слово «камень»;
- p_2 – вероятность того, что строковый игрок произнесет слово «бумага»;
- p_3 – вероятность того, что строковый игрок произнесет слово «ножницы»;
- q_1 – вероятность того, что столбцовый игрок произнесет слово «камень»;
- q_2 – вероятность того, что столбцовый игрок произнесет слово «бумага»;
- q_3 – вероятность того, что столбцовый игрок произнесет слово «ножницы».

С учетом возможных исходов построим платежную матрицу

Строковый игрок	Столбцовый игрок			Минимум в строке
	Камень	Бумага	Ножницы	
Камень	0	–1	1	–1
Бумага	1	0	–1	–1
Ножницы	–1	1	0	–1
Максимум в столбце	1	1	1	

Применяя известное правило для решения игровых ситуаций, определим, что в данной задаче отсутствует седловая точка

$$\max (\text{среди строковых минимумов}) \neq \min (\text{среди столбцовых максимумов}).$$

Доминирующие стратегии в матрице также отсутствуют. В связи с этим удобным приемом для определения цены игры и стратегий игроков является линейное программирование.

Рассмотрим построение модели линейного программирования для строкового игрока.

С учетом ранее рассмотренной политики для каждого из игроков, строковый должен выбрать такую смешанную стратегию $S_1 = (p_1, p_2, p_3)$, которая максимизирует ожидаемый доход, а столбцовый, зная значения p_1 , p_2 и p_3 , должен, в свою очередь, выбрать такую стратегию, которая минимизирует выигрыш строкового игрока. Доход строкового игрока в зависимости от стратегии, выбранной столбцовым игроком, представлен в следующей таблице:

Стратегия столбцового игрока	Ожидаемый доход строкового игрока
«Камень»	$p_2 - p_3$
«Бумага»	$-p_1 + p_3$
«Ножницы»	$p_1 - p_2$

Таким образом, с одной стороны, необходимо найти $\max(p_2 - p_3; -p_1 + p_3; p_1 - p_3)$, а с другой, $-\min(p_2 - p_3; -p_1 + p_3; p_1 - p_3)$.

Для строкового игрока мы должны определить максимально возможный выигрыш (обозначим его через v). Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \max Z &= v, \\ p_2 - p_3 &\geq v \quad \text{ограничение для слова "камень"}, \\ -p_1 + p_3 &\geq v \quad \text{ограничение для слова "бумага"}, \\ p_1 - p_2 &\geq v \quad \text{ограничение для слова "ножницы"}, \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 1, \\ p_1, p_2, p_3 &\geq 0, \\ v &\text{ — переменная, неограниченная на знак.} \end{aligned}$$

Рассмотрим построение модели линейного программирования для столбцового игрока. Для этого проведем рассуждения, аналогичные вышеприведенным.

Сначала рассчитаем потенциальный доход, который получит строковый игрок в зависимости от выбранной им стратегии.

Стратегия строкового игрока	Ожидаемый доход строкового игрока
«Камень»	$-q_2 + q_3$
«Бумага»	$q_1 - q_3$
«Ножницы»	$-q_1 + q_2$

Естественным является стремление строкового игрока получить максимум дохода, если столбцовый игрок выберет смешанную стратегию $S_2 = (q_1, q_2, q_3)$. С другой стороны, столбцовый – должен стремиться минимизировать этот доход (т.е. минимизировать собственные потери) $\min(-q_2 + q_3; q_1 - q_3; -q_1 + q_2)$.

Пусть проигрыш столбцового игрока выражается через w . Тогда модель линейного программирования, обеспечивающая минимум потерь, выглядит следующим образом:

$$\min Z = w,$$

$$\begin{aligned}
-q_2 + q_3 &\leq w && \text{ограничение для слова "камень"}, \\
q_1 - q_3 &\leq w && \text{ограничение для слова "бумага"}, \\
-q_1 + q_2 &\leq w && \text{ограничение для слова "ножницы"}, \\
q_1 + q_2 + q_3 &= 1, \\
q_1, q_2, q_3 &\geq 0, \\
w &\text{ — неограниченная на знак переменная.}
\end{aligned}$$

В обеих моделях переменные v и w не ограничены на знак. Это предполагает, что как «доход», так и «убыток» могут быть любыми числами.

Рассмотрим взаимосвязь между построенными моделями. Первую модель запишем в виде

$$\begin{aligned}
\max Z &= v, \\
-p_2 + p_3 + v &\leq 0, \\
p_1 - p_3 + v &\leq 0, \\
-p_1 + p_2 + v &\leq 0, \\
p_1 + p_2 + p_3 &= 1, \\
v &\text{ — неограниченная на знак переменная.}
\end{aligned}$$

Поставим в соответствие ограничениям модели переменные q_1, q_2, q_3 и w . Используя правило преобразования исходной модели в двойственную, получим

$$\begin{aligned}
\min Y &= w, \\
q_2 - q_3 + w &\geq 0, \\
-q_1 + q_3 + w &\geq 0, \\
q_1 - q_2 + w &\geq 0, \\
q_1 + q_2 + q_3 &= 1, \\
w &\text{ — неограниченная на знак переменная.}
\end{aligned}$$

Полученная модель представляет собой модель для столбцового игрока.

Таким образом, модели, построенные для строкового и столбцового игроков, есть ни что иное, как взаимно сопряженная пара двойственных задач линейного программирования. На основании первой теоремы двойственности заключим, что, если основная задача линейного программирования имеет решение, то и двойственная по отношению к ней также имеет решение и

$$\max Z = \min Y,$$

то есть

$$v = w.$$

Отсюда значение «пола» для строкового игрока совпадает с «потолком» для столбцового игрока. Данное утверждение носит название **теоремы минимакса**.

Иначе, $v = w$ – цена игры двух лиц с нулевой суммой, а оптимальные смешанные стратегии $S_1^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*)$, $S_2^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*)$ обеспечивают достижение этой точки равновесия. Ни один игрок не сможет улучшить своего положения за счет одностороннего изменения стратегии. Оптимальным решением рассмотренной игры являются следующие стратегии: $S_1^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ и $S_2^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, а цена игры равна $v = w = 0$.

В заключение приведем в общем виде модели линейного программирования для строкового и столбцового игроков. При формулировке моделей будем рассматривать следующую платежную матрицу:

a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

	$\max Z = v,$
	$v \leq a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m,$
Модель	$v \leq a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m,$
строкового	$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$
игрока	$v \leq a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m,$
	$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1,$
	$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0,$
	v – неограниченная на знак переменная.

	$\min Y = w,$
	$w \geq a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n,$
Модель	$w \geq a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n,$
столбцового	$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$
игрока	$w \geq a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n,$
	$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1,$
	$y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0,$
	w – неограниченная на знак переменная.

Как было видно из предыдущего примера, значение цены игры может быть любым числом: положительным, отрицательным или нулем. Неограниченность переменной на знак, определяющей цену игры, добавляет хоть и не значительные, но трудности в процессе моделирования. Чтобы избежать необходимости использовать при решении задачи переменную, неограниченную на знак (а такая необходимость возникает, когда платежная матрица содержит отрицательные элементы), используют следующий прием: в матрице выбирают наибольшее по

абсолютной величине среди отрицательных число и прибавляют модуль этого числа к каждому элементу платежной матрицы.

Такое изменение элементов матрицы на одно и то же число C не повлечет за собой изменения численных значений стратегий игроков. Изменится только цена игры на величину прибавленного числа C : $v' = v + C$. Чтобы найти истинную цену игры, необходимо из полученного результата вычесть C : $v = v' - C$.

Следует иметь в виду, что игровые задачи также, как и задачи линейного программирования, могут иметь альтернативное решение.

В общем процесс решения игровой задачи разбивается на 3 шага:

- Шаг 1.** Проверяем платежную матрицу на наличие седловой точки. Если игра не имеет седловой точки, то переходим к шагу 2.
- Шаг 2.** Удаляем из платежной матрицы все стратегии, которые подавляются, используя правило доминирования. Переходим к шагу 3.
- Шаг 3.** Если матрица имеет размерность 2×2 , решаем задачу графически, в противном случае – с помощью методов линейного программирования.

10.5. ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С НЕПОСТОЯННОЙ СУММОЙ

Игры с постоянной суммой не являются типичными для делового окружения из-за наличия у конкурентов некоторых общих интересов. Наиболее часто встречаются игры с непостоянной суммой.

Рассмотрим примеры игр двух лиц с непостоянной суммой для случая, когда взаимодействие игроков исключается. Одной из таких игр является игра «два разбойника».

Два разбойника сбежали из тюрьмы, участвовали в краже, были пойманы и ожидают приговора суда. Однако у следствия не хватает улик, чтобы полностью доказать их причастность к краже. Поэтому оно решило пойти на хитрость. Для того чтобы каждый в отдельности разбойник свидетельствовал против другого, следователь сказал каждому из них следующее: «Если только один из вас сознается и даст показания против другого, то он будет освобожден, при условии, что второй не сознается. Не сознавшийся получит десять лет тюрьмы. Если сознаются оба, то получают по три года заключения каждый. Ну, а если ни один разбойник не признает себя виновным, то суд приговорит каждого из них к году заключения, обвинив в судебно-наказуемом поступке».

Как должен поступить каждый из разбойников?

Решение.

Учитывая невозможность общения разбойников друг с другом, мы можем представить их стратегии и соответствующие «награды» следующим образом:

Стратегии 1-го разбойника	Стратегии 2-го разбойника	
	Сознаться	Не сознаваться
Сознаться	(-3, -3)	(0, -10)
Не сознаваться	(-10, 0)	(-1, -1)

Так как возможны различные исходы беседы следователя с подследственными, то, в зависимости от того, что скажет каждый из них, «награды» будут определяться парой чисел, каждое из которых соответствует количеству лет, проводимых разбойником в тюрьме. Можно заметить, что сумма «наград» не равна постоянному числу (либо -10 , либо -6 , либо -2), то есть мы имеем дело с игрой с непостоянной суммой.

Для каждого из участников игры было бы целесообразным удалить из рассмотрения те стратегии, которые подавляются, и оставить только доминирующие. Так, для каждого разбойника лучше выбрать стратегию «сознаться», так как в этом случае им придется отсидеть в тюрьме по три года вместо десяти лет. Отсюда стратегия «сознаться» будет доминировать над стратегией «не сознаваться». С другой стороны, если оба разбойника выберут подавленную стратегию «не сознаваться», то каждый из них проведет только по году в тюрьме.

Таким образом, одновременный выбор обоими участниками игры подавляемой стратегии принесет результат лучший, чем, если бы оба выбрали доминирующую стратегию. Возникает вопрос, а что же является точкой равновесия в данной игре?

Дадим определение точки равновесия для игры двух лиц с непостоянной суммой.

Определение. *Стратегия, выбранная каждым из игроков, называется точкой равновесия, если ни один из игроков не сможет получить выигрыша от одностороннего ее изменения.*

В нашей задаче точкой равновесия является $(-3, -3)$. В случае одностороннего изменения стратегии (с «сознаться» на «не сознаваться») положение разбойника резко ухудшится (он вынужден будет провести в тюрьме десять лет вместо трех).

С другой стороны, оба разбойника будут чувствовать себя лучше в позиции $(-1, -1)$. Однако данная точка вряд ли может считаться равновесной, так как, по определению, равновесие наступает в том случае, когда улучшить свое положение нельзя, односторонне изменив свою стратегию. Здесь же мы имеем тот случай, когда, если оба разбойника негласно скооперируются и выберут стратегию «не сознаваться», то любой из них может оказаться в лучшем положении, предав другого и, тем самым, изменив срок заключения с года до нуля лет. Если же оба одновременно захотят «надуть» друг друга, то они окажутся в худшем положении по сравнению с кооперативной стратегией «не сознаваться», то есть получают по три года заключения.

В общем виде игра «двух разбойников» может быть представлена следующей матрицей (см. ниже). В матрице использованы следующие обозначения:

P – наказание за некооперативные действия;

S – «награда» игрока, которого «надули»;

T – цена соблазна «надуть» противника;

R – награда за кооперативные действия, если оба игрока последовали данной стратегии.

Стратегии 1-го разбойника	Стратегии 2-го разбойника	
	Некооперативная стратегия	Кооперативная стратегия
Некооперативная стратегия	(P, P)	(T, S)
Кооперативная стратегия	(S, T)	(R, R)

В игре «два разбойника» точкой равновесия является (P, P) . Для осуществления этого необходимо, чтобы $P > S$. С другой стороны, для того, чтобы точка (R, R) не была равновесной, следует выполнить условие $T > R$, иначе, необходимо наличие соблазна «надуть» противника. Данная игра имеет смысл, когда $R > P$. Объединяя все вышеперечисленные условия, получаем требование наличия игры типа «два разбойника»

$$T > R > P > S.$$

Аналогом игры «двух разбойников» является ситуация, в которой рассматриваются действия двух конкурирующих ресторанов, которые хотели бы определить оптимальную рекламную политику.

Пример.

Пусть суммарный годовой доход ресторанов составляет 1.4 млн. грн. Возможны два типа рекламы: широкомасштабная и выборочная. Первая требует затрат 60 тыс. грн. в год, вторая – 40 тыс. грн. Если в рекламу вкладываются одинаковые суммы (по 60 или 40 тыс. грн.), то рестораны получают равный доход. Если один из них вкладывает большую сумму, то его доход составит 1.1 млн. грн.

Пусть прибыль составляет 1/10 от получаемого дохода. Если каждый из ресторанов ставит цель – максимизацию прибыли за вычетом расходов на рекламу, то какой будет точка равновесия для данной игры?

Решение.

Игровая матрица выглядит следующим образом (прибыль представлена в десятках тысяч гривень):

1-й ресторан	2-й ресторан	
	Потратить 60000 грн.	Потратить 40000 грн.
Потратить 60000 грн.	(1, 1)	(5, -1)
Потратить 40000 грн.	(-1, 5)	(3, 3)

Будем рассматривать затраты каждого из ресторанов на рекламу по 60 тыс. грн. как некооперативные действия. Эти действия принесут ресторанам по 10 тыс. грн. прибыли. С другой стороны, кооперативные действия позволят получить по 40 тыс. грн.

Несмотря на то, что точка (3,3) дает большую прибыль, она нестабильна, так как один из ресторанов может получить выгоду, а другой, естественно, убыток от

одностороннего изменения стратегии. Отсюда точкой равновесия является точка (1,1).

Следовательно, чтобы не потерять свой сегмент рынка, ресторанам лучше использовать широкомасштабную рекламу. Это хоть и принесет меньшую прибыль, однако, позволит не прогореть на рынке.

Игры двух лиц с непостоянной суммой не обязательно должны иметь одну точку равновесия. Кроме того, данная точка может быть найдена в смешанных стратегиях. Примерами таких игр являются следующие:

Игра 1

Два сорвиголова соревнуются в крепости нервов: «оседлали» мотоциклы и мчатся навстречу друг другу по безлюдной дороге. У каждого из них есть возможность выбора: свернуть в сторону или не свернуть. Матрица наград выглядит следующим образом:

1-й сорвиголова	2-й сорвиголова	
	Свернуть	Не сворачивать
Свернуть	(0, 0)	(-10, 10)
Не сворачивать	(10, -10)	(-1000, -1000)

Необходимо найти точку равновесия.

Решение.

Следует заметить, что в данном случае условие игры «двух разбойников» $T > R > P > S$ не выполняется $T = -10, R = -1000, P = 0, S = 10$. Однако это не означает, что в игре двух сорвиголов нет точки равновесия. Здесь их две (10, -10) и (-10, 10), так как каждый из отчаянных игроков проиграет, если в одностороннем порядке изменит свою стратегию.

Игра 2

Рассмотрим следующую игровую матрицу:

1-й игрок	2-й игрок	
	Стратегия 1	Стратегия 2
Стратегия 1	(2, -1)	(-2, 1)
Стратегия 2	(-2, 1)	(2, -1)

Имеется ли для данной игры точка равновесия?

Решение.

Для рассмотренной матрицы невозможно найти точку равновесия в случае чистых стратегий. Если допустимы смешанные стратегии, то оптимальной стратегией для каждого игрока будет стратегия $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, так как ни один из игроков не сможет получить выгоду от одностороннего изменения стратегии.

10.6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИГР n ЛИЦ

Ранее рассмотренные игры двух лиц являются частным случаем более общей ситуации, когда имеют место множество конкурентов. В качестве примеров можно

привести биржи (фондовые, ценных бумаг и т.д.), сеть ресторанов и кафе, магазинов и т.д.

Будем считать, что у нас имеется множество игроков $R = \{1, 2, \dots, n\}$. Дадим определение характеристической функции для игры n лиц.

Определение. Для каждого подмножества $S \in R$, **характеристической функцией** v игры будет называться величина $v(S)$, которая показывает гарантированный размер выигрыша игроков подмножества S , получаемый ими, если они действуют вместе в единой коалиции.

Рассмотрим примеры коалиционных игр.

Игра 1

Пусть изобретатель изобрел новый портативный инструмент для работ на приусадебном участке, существенно облегчающий процесс рыхления почвы. Сам изобретатель не в состоянии организовать его производство. Однако он может поделиться своим изобретением с компаниями №1 и №2, производящими орудия труда для сельского хозяйства. Если изобретатель сделает это, то прибыль любой из компаний составит 5000000 грн. Компании, в случае, если они получают право на производство нового инструмента, вынуждены будут поделиться этой прибылью с изобретателем.

Необходимо определить характеристическую функцию для данной игры.

Решение.

Следует заметить, что компании будут иметь прибыль только в том случае, если изобретатель поделится с ними своим секретом. А изобретатель, в свою очередь, получит выгоду, только продав свое изобретение упомянутым выше компаниям. Будем считать участников ситуации игроками: первый игрок – изобретатель, второй игрок – компания №1, третий игрок – компания №2.

Если игроки будут действовать сами по себе, или же только второй и третий объединятся в коалицию, то их выигрыш, определяемый характеристической функцией, будет равен нулю

$$v(\{\emptyset\}) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) = 0.$$

С другой стороны, любая коалиция игроков с участием первого, принесет желаемые 5000000 грн. прибыли

$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 5000000 \text{ грн.}$$

Игра 2

Пусть имеется пять стран, производящих химические удобрения. Каждая из них имеет контейнер с отходами, от которого она хотела бы избавиться. Если некоторая коалиция этих стран получит в качестве «подарка» K контейнеров, то награда этой коалиции будет определяться величиной – K .

Как выглядит характеристическая функция данной игры?

Решение.

Лучшее, что могут предпринять члены любой коалиции S – это отправить свои контейнеры в «подарок» остальным странам, которые в данную коалицию не входят. Учитывая это, можно записать выражения для характеристической функции если число членов коалиции $S < 5$, то

$$v(S) = -(5 - S) = -5 + S;$$

если все страны образуют коалицию, т.е. когда $S = 5$, то

$$v(S) = -5.$$

Иначе, если некому отдавать свои отходы, то они остаются во владении членов коалиции.

Игра 3

Муниципальная служба (первый игрок) имеет в своем распоряжении участок земли стоимостью 1000000 грн., на котором она хотела бы разбить парк с аттракционами и предприятиями сферы развлечений и обслуживания. Для самостоятельного решения проблемы муниципалитет не имеет необходимых средств. Однако он может предложить двум компаниям (второй и третий игроки), специализирующимся в строительстве подобных сооружений, контракт, который обеспечит увеличение стоимости земли за счет потенциальной отдачи от функционирования парка. Первая компания гарантирует увеличение стоимости земли до 1500000 грн., а вторая – до 3000000 грн.

Чему равна характеристическая функция такой игры?

Решение.

Как и в первой игре, любая коалиция игроков, исключая муниципальную службу, обеспечит нулевую стоимость земли

$$v(\{\emptyset\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0.$$

Участие в коалиции только одной муниципальной службы обеспечит первоначальную стоимость земли

$$v(\{1\}) = 1000000 \text{ грн.}$$

Если первый игрок объединится со вторым, то выигрыш составит

$$v(\{1,2\}) = 1500000 \text{ грн.,}$$

а если первый – с третьим, то

$$v(\{1,3\}) = 3000000 \text{ грн.}$$

В случае объединения трех игроков стоимость земли составит

$$v(\{1,2,3\}) = 3000000 \text{ грн.}$$

3000000 грн. – это максимальное из возможных значений, так как нет никакой информации о финансировании проекта строительства парка обеими компаниями.

Рассмотрим два непересекающихся подмножества игроков S и T ($S \cap T = \emptyset$). Для любой игры n лиц характеристическая функция должна удовлетворять следующему условию:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Данное свойство характеристической функции называется *сверхаддитивностью*.

Правая часть выражения показывает, что в случае объединения коалиций, первая обеспечит себе доход в количестве не меньшем, чем $v(S)$, а вторая – не меньшем, чем $v(T)$. Так как эти коалиции в состоянии сами о себе позаботиться, действуя индивидуально, то коллективное их действие должно привести к результату, который не хуже суммы их индивидуальных действий.

Имеется множество подходов к решению игр n лиц, которые позволяют определить награду, получаемую каждым из игроков – участников коалиции. Данный набор наград может быть представлен в виде вектора наград

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где x_i – награда i -го игрока коалиции.

Вектор x может считаться решением игры только в том случае, когда каждый из игроков получает награду, не ниже его цены игры (характеристической функции)

$$v(R) = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{– групповое необходимое условие;}$$

$$x_i \geq v(\{i\}) \text{ для всех } i \in R \quad \text{– индивидуальное необходимое условие.}$$

Если вектор x удовлетворяет обоим условиям, то он носит название *обязательства*.

В первом случае величина суммарной награды равна характеристической функции, получаемой для суперкоалиции игроков. Во втором – награда каждого игрока должна быть не меньше той, которую может обеспечить себе сам игрок (вне коалиции).

Иллюстрация идеи обязательства для третьей игры приведена в следующей таблице:

x	Обязательство или нет?
(1000000, 1000000, 1000000)	Да
(700000, 300000, 200000)	Нет, не выполняется 2-е условие
(1500000, 1600000, -100000)	Нет, не выполняется 1-е условие
(1200000, 1200000, 1200000)	Нет, не выполняется 1-е условие

10.7. ЯДРО ИГРЫ n ЛИЦ

Рассмотрим один из подходов к решению игр n лиц. Определим сначала понятие доминирования. Для этого будем оперировать двумя обязательствами (векторами наград) для коалиции из S игроков.

Определение. Для заданных векторов наград (обязательств) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, и коалиции из S игроков, обязательство y доминирует над обязательством x ($y \succ^S x$), если выполняется условие

$$\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$$

и для всех $i \in S$, $y_i > x_i$.

Следствием этого являются два утверждения

1. Каждый член коалиции S предпочтет обязательству x обязательство y .
2. Так как $\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$, то любой член коалиции S может получить награду, которая определена обязательством y .

Из определения доминирующего обязательства следует, что обязательство x не может рассматриваться в качестве кандидата на лучшее решение игры, так как, если игрокам из S предложат награду, определяемую x , то они могут возразить, и даже усилить свои возражения, объединившись вместе и получив, тем самым, награду, предлагаемую обязательством y .

Основоположники теории игр Джон фон Нейман и Оскар Моргенштерн утверждают, что резонным решением игры n лиц было бы множество всех неподавленных стратегий (т.е. доминирующих). Совокупность таких стратегий называется **ядром**.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие подход доминирования.

Игра 1

Пусть имеется игра, которой соответствуют характеристические функции

$$\begin{aligned} v(\{\emptyset\}) &= v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, \\ v(\{1,2\}) &= 0.1, \quad v(\{1,3\}) = 0.2, \quad v(\{2,3\}) = 0.2, \\ v(\{1,2,3\}) &= 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим два обязательства

$$x = (0.07, 0.86, 0.07) \text{ и } y = (0.08, 0.80, 0.12).$$

Покажем, что для коалиции игроков $S = \{1, 3\}$ обязательство y доминирует над обязательством x , т.е. $y \succ^{\{1,3\}} x$.

Решение.

Не вызывает сомнения, что x и y являются обязательствами, иначе условия, рассмотренные в предыдущем параграфе, не выполнялись бы

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 1; \quad \sum_{i=1}^3 y_i = 1; \quad x_i \geq v(\{i\}); \quad y_i \geq v(\{i\}); \quad i = \overline{1, 3}.$$

Обязательство y принесет обоим игрокам (первому и третьему), если они объединятся, общую награду, равную 0.2. Принимая во внимание, что $y_1 + y_3 = 0.8 + 0.12 = 0.92$ (что не превышает $v(\{1, 3\}) = 0.2$ и, учитывая, что $y_1 > x_1$ и $y_3 > x_3$, то для данных игроков есть смысл объединиться в коалицию для получения суммарной награды в 0.2. При этом игроки не позволят, чтобы возникла награда, определенная обязательством x .

Игра 2 (Парковое строительство)

Рассмотрим два обязательства:

$$x = (1800000, 200000, 1000000) \text{ и} \\ y = (1870000, 30000, 1010000).$$

Необходимо показать, что $y \succ^{\{1,3\}} x$.

Решение.

Чтобы убедиться в том, что y доминирует над x для коалиции первого и третьего игроков достаточно заметить, что общий доход этих игроков будет больше, если они выберут обязательство y ($2880000 > 2800000$), и что выполняется условие $2880000 < v(\{1, 3\}) = 3000000$.

Так, если бы в качестве решения игры было предложено обязательство x , то первый игрок, продав подряд на земельное строительство третьему игроку, получил бы в коалиции с ним награду большую, чем определено обязательством x . Таким обязательством, подавляющим x , могло бы быть обязательство y или какое-то другое, которое подавляет обязательство x . При этом первый и третий игроки не допустят случая, чтобы обязательство x имело место.

Теорема. Обязательство $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ является **ядром** игры n лиц тогда и только тогда, когда для каждого подмножества S из R выполняется условие

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S).$$

Иными словами, обязательство x будет принадлежать ядру только в том случае, когда для любой коалиции S общая награда, получаемая игроками, будет не меньше $v(S)$ – характеристической функции для коалиции S .

Для того чтобы найти решение игры, необходимо отыскать такое обязательство, которое будет принадлежать ядру (т.е. такие значения x_i из x , которые бы удовлетворяли теореме о ядре).

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие использование теоремы.

Игра (Изобретатель)

Для данной игры обязательством $x = (x_1, x_2, x_3)$ можно будет назвать только такой набор x_i ($i = 1, 2, 3$), который удовлетворяет условиям

$$x_1 \geq 0, \quad (10.1)$$

$$x_2 \geq 0, \quad (10.2)$$

$$x_3 \geq 0, \quad (10.3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5000000. \quad (10.4)$$

Для того чтобы быть ядром, обязательство $x = (x_1, x_2, x_3)$ должно отвечать следующим ограничениям:

$$x_1 + x_2 \geq 5000000, \quad (10.5)$$

$$x_1 + x_3 \geq 5000000, \quad (10.6)$$

$$x_2 + x_3 \geq 0, \quad (10.7)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5000000. \quad (10.8)$$

Кроме того, наряду с выполнением данных условий необходимо, чтобы x_1 , x_2 и x_3 удовлетворяли ограничению, полученному суммированием ограничений (10.5)–(10.8). Сложим ограничения

$$\begin{aligned} 2(x_1 + x_2 + x_3) &\geq 10000000 && \text{или} \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 5000000. \end{aligned}$$

Так как ограничение (10.4) связующее, то и ограничения (10.5)–(10.8) также должны быть связующими

$$x_1 + x_2 = 5000000,$$

$$x_1 + x_3 = 5000000,$$

$$x_2 + x_3 = 0.$$

Отсюда $x_1 = 5000000$, $x_2 = x_3 = 0$.

Данные значения переменных удовлетворяют ограничениям (1)–(8). Таким образом, обязательство $x = (5000000, 0, 0)$ является ядром данной игры, и оно указывает на важность первого игрока.

Примером подавляемого обязательства может служить следующее $x = (4000000, 500000, 500000)$. Оно подавляется обязательством $y = (4250000, 750000, 0)$ для коалиции $\{1, 2\}$: $y >^{\{1,2\}} x$.

Игра (Контейнеры с отходами)

Для данной игры обязательство $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ должно удовлетворять условиям

$$x_1 \geq -4, \quad (10.9)$$

$$x_2 \geq -4, \quad (10.10)$$

$$x_3 \geq -4, \quad (10.11)$$

$$x_4 \geq -4, \quad (10.12)$$

$$x_5 \geq -4, \quad (10.13)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq -5. \quad (10.14)$$

Если применить теорему о ядре, то должны выполняться условия

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq -1, \quad (10.15)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \geq -1, \quad (10.16)$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \geq -1, \quad (10.17)$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \geq -1, \quad (10.18)$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq -1. \quad (10.19)$$

Для того чтобы показать, что для данной игры отсутствует обязательство, которое является ядром, сложим неравенства (10.15)–(10.19)

$$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \geq -5. \quad (10.20)$$

С другой стороны, согласно условию (10.14)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq -5.$$

Таким образом, ограничение (10.20) не может выполняться. Отсюда, для данной игры ядром является пустое множество.

Игра (Парковое строительство)

Проведем рассуждения, аналогичные ранее приведенным. Рассмотрим обязательство $x = (x_1, x_2, x_3)$. Оно должно удовлетворять условиям

$$x_1 \geq 1000000, \quad (10.21)$$

$$x_2 \geq 0, \quad (10.22)$$

$$x_3 \geq 0, \quad (10.23)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3000000. \quad (10.24)$$

Для того чтобы данному обязательству быть ядром, необходимо выполнение условий, описываемых следующей системой ограничений:

$$x_1 + x_2 \geq 1500000, \quad (10.25)$$

$$x_1 + x_3 \geq 3000000, \quad (10.26)$$

$$x_2 + x_3 \geq 0, \quad (10.27)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3000000. \quad (10.28)$$

Сложим ограничения (10.22) и (10.26), в результате получим

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3000000.$$

Так как, согласно (10.24), $x_1 + x_2 + x_3 = 3000000$, то ограничения (10.22) и (10.26) должны быть связующими, то есть

$$x_2 = 0 \text{ и } x_1 + x_3 = 3000000. \quad (10.29)$$

Из (10.25) имеем

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1500000, \quad \text{откуда} \\ x_1 &\geq 1500000. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Для того чтобы обязательство x было ядром, необходимо выполнение условий (10.29) и (10.30). Кроме того, $x_3 \geq 0$, что влечет за собой $x_1 \leq 3000000$. Отсюда

$$1500000 \leq x_1 \leq 3000000.$$

Если это условие выполняется, то вектор $x = (x_1, 0, 3000000 - x_1)$ будет ядром игры паркового строительства. Суть данного обязательства может быть объяснена следующим образом: первый подрядчик не рассматривается как потенциальный игрок. Третий игрок (второй подрядчик) покупает у первого землю за x_1 грн. Тогда первый игрок получит награду x_1 , а третий $3000000 - x_1$. Число точек в ядре – бесконечно.

10.8. АЛЬТЕРНАТИВНАЯ КОНЦЕПЦИЯ РЕШЕНИЯ ИГРЫ n ЛИЦ – ОЦЕНКА ШЭПЛИ

В отличие от подхода к решению игры n лиц, когда ищется ядро игры и предпочтение при этом отдается наиболее важному игроку, данный подход (оценка Шэпли) дает, по мнению многих специалистов по теории игр, более справедливое решение игры. При этом учитывается вероятность создания той или иной коалиции игроков. Для того чтобы проследить, как найти решение игровой ситуации для n лиц с помощью оценки Шэпли, дадим формулировку следующих 4-х аксиом (согласно Ллойд Шэпли).

Шэпли показал, что для любой характеристической функции существует единственный вектор наград $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, который удовлетворяет следующим аксиомам:

Аксиома 1. *Перемена ролей игроков влечет за собой перемену наград игроков.*

Пусть, например, для игры трех лиц оценка Шэпли (как она определяется, будет ясно чуть позже) составляет $x = (5, 10, 15)$. Поменяем ролями первого и третьего игроков. Характеристические функции игроков при этом изменятся с $v(\{1\}) = 5$ и $v(\{3\}) = 15$ на $v(\{1\}) = 15$ и $v(\{3\}) = 5$. Это повлечет за собой изменение оценки Шэпли на $x = (15, 10, 5)$.

Аксиома 2.
$$\sum_{i=1}^n x_i = v(N).$$

Аксиома 3. *Если $v(S - \{i\}) = v(S)$ выполняется для всех коалиций S , то оценка Шэпли имеет $x_i = 0$. То есть, если игрок не увеличивает доход коалиции, то он сам получает нулевую награду оценки Шэпли.*

Для формулировки аксиомы 4 дадим определение суммы двух игр n лиц.

Определение. *Пусть имеется две характеристические функции v и v_1 игр с одинаковыми игроками. Суммой игр $(v + v_1) = V$ будет игра с характеристической функцией, определяемой как:*

$$V(S) = v(S) + v_1(S).$$

Так, если $v(\{1, 3\}) = 5$, а $v_1(\{1, 3\}) = -1$, то для пары $(v + v_1) = V$ коалиция тех же игроков $\{1, 3\}$ получит награду $V(\{1, 3\}) = 5 - 1 = 4$.

Аксиома 4. *Пусть x – вектор оценки Шэпли для игры v , а y – вектор оценки Шэпли для игры v_1 . Тогда оценка Шэпли для игры $(v + v_1) = V$ будет определяться вектором $x + y$.*

Если аксиомы 1–4 имеют силу, то справедлива следующая теорема, позволяющая определить составляющие оценки Шэпли.

Теорема. *Для любой игры n лиц с характеристической функцией v имеется единственный оценочный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий аксиомам 1–4. Причем награда i -го игрока (x_i) определяется по формуле*

$$x_i = \sum_{\substack{\text{для всех } S, \\ \text{у которых } i \notin S}} P_n(S) [v(S \cup \{i\}) - v(S)], \quad (10.31)$$

где
$$P_n(S) = \frac{S!(n-S-1)!}{n!} \quad (10.32)$$

вероятность того, что коалиция из S игроков уже существует в момент, когда присоединяется к коалиции i -й игрок.

Например, для трех игроков порядок их появления в коалиции случаен. Возможны 6 перестановок

$$\begin{array}{ll} (1, 2, 3); & (2, 3, 1); \\ (1, 3, 2); & (3, 1, 2); \\ (2, 1, 3); & (3, 2, 1). \end{array}$$

Вероятность появления каждой из них равна $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

Пусть игрок i присоединяется к коалиции в момент, когда в ней уже присутствуют S игроков. Он добавляет к общему выигрышу доход, равный $v(S \cup \{i\}) - v(S)$. С учетом вероятности $P_n(S)$ появления существующей коалиции S доход i -го игрока, определяемый по формуле (10.31), должен быть равен ожидаемому количеству, которое данный игрок добавляет к коалиции, составленной из игроков, ранее существовавшей, до того момента, как появился i -й.

Расчет вероятности (10.32) основан на следующем положении:

Появление различных коалиций из S игроков, исключаящих игрока i , возможен в различной комбинации. Число таких комбинаций равно

$$S \times (S-1) \times (S-2) \times \dots \times 2 \times 1 = S!$$

С учетом того, что после этого появляется i -й игрок, мы имеем:

$$S \times (S-1) \times (S-2) \times \dots \times 2 \times 1 \times 1 = S! \times 1.$$

В расчетах необходимо также учесть тот факт, что после i -го игрока к коалиции могут присоединиться остальные игроки. Число различных вариантов определяется перестановкой

$$(n-S-1) \times (n-S-2) \times \dots \times 2 \times 1 = (n-S-1)!$$

Общее число перестановок из n игроков равно $n!$

Отсюда вероятность того, что i -й игрок присоединится к коалиции, когда в ней уже имеется S игроков, равна

$$P_n(S) = \frac{S!(n-S-1)!}{n!}.$$

ЗАДАЧИ

- 10.1. Найдите оптимальную стратегию и цену игры, заданной следующей матрицей:

2	2
1	3

- 10.2. Найдите цену и оптимальные стратегии для игры двух лиц с нулевой суммой

4	5	5	8
6	7	6	9
5	7	5	4
6	6	5	5

- 10.3. Мистер «Искатель приключений» решил совершить путешествие из точки А в точку Е. Он заинтересован достичь конечной точки наиболее коротким путем. Возможные направления движения и расстояния между ними представлены в таблице

Маршрут	Расстояние, км
А–Б	800
А–В	900
В–Г	400
В–Д	200
Б–Г	300
Б–Д	600
Г–Е	500
Д–Е	300

Чтобы внести интригу в прохождение маршрута, мистеру «Искателю приключений» могут быть поставлены препятствия. В частности, может быть заблокирована одна дорога, идущая из пункта Б и одна дорога, идущая из пункта В.

Мистер «Искатель приключений» ничего не будет знать о блокировании дорог, пока не попадет в пункт Б или В.

- Куда стоит идти «Искателю приключений» – в Б или В?
- Какой из маршрутов из Б или из В стоит заблокировать?

- 10.4. Найдите цену и оптимальные стратегии для игры двух лиц с нулевой суммой

1	2	3
2	0	3

- 10.5. Первый игрок записывает целое число от 1 до 20 на листке бумаги. Не показывая второму игроку написанное число, первый говорит ему, что он написал. Первый игрок может сказать правду, а может и солгать.

Второй игрок должен угадать, сказал первый правду или нет.

Если первый уличен во лжи, то он должен заплатить второму 10 грн. Если он ошибочно обвинен во лжи, то получает от второго 5 грн. Если первый игрок сказал правду и второй угадал это, то второй получает от первого 1 грн. Если первый игрок сказал неправду, а второй не угадал, то он платит первому 5 грн.

Определите цену игры и оптимальные стратегии обоих игроков.

- 10.6. Найдите цену и оптимальные стратегии игры двух лиц с нулевой суммой

2	1	3
4	3	2

- 10.7. Для рассмотренного в учебном пособии примера с игрой на подбрасывание монет покажите, что, если первый игрок отклоняется от оптимальной стратегии, то второй может быть уверен в том, что ожидаемый доход первого меньше цены игры, равной $1/3$.

- 10.8. Для рассмотренного в учебном пособии примера с игрой на подбрасывание монет покажите, что, если второй игрок отклоняется от оптимальной стратегии, то первый может быть уверен в том, что ожидаемый проигрыш второго больше цены игры, равной $1/3$.

- 10.9. Две конкурирующие фирмы должны одновременно определить, сколько производить продукции. Общая прибыль, получаемая обеими фирмами, равна 1000 грн. Если производственный уровень первой фирмы низкий, а второй также низкий, то первая получит прибыль в размере 500 грн. Если у первой фирмы уровень низкий, а у второй высокий, то прибыль первой составит 400 грн. Если у обеих фирм уровень производства высокий, то первая получит прибыль в 600 грн. Однако если у первой фирмы уровень будет высоким, а у второй низким, то прибыль первой составит только 300 грн.

Определите цену игры и оптимальные стратегии для игры двух лиц с постоянной суммой.

- 10.10. Два университета собираются провести соревнование по теннису. У первого университета два игрока (А и Б), у второго три (В, Г и Д). Известна следующая информация относительно игроков противостоящих университетов. Игрок В всегда выиграет у Б, игрок Г всегда выиграет у А, игрок А всегда выиграет у Д. В любом другом сочетании игроков противоположных команд, шанс выиграть у каждого из них составляет $1/2$. До того как первый университет будет играть со вторым, тренер первого университета должен определить, кто будет играть первую одиночную партию, а кто вторую. Тренер второго университета (после определения двух игроков, которые будут участвовать в турнире), должен определить, кто будет играть в первой игре, а кто во второй. Предположите, что каждый тренер хотел бы максимизировать количество побед в одиночных соревнованиях.

Используя теорию игр, определите оптимальные стратегии для каждого из тренеров и цену игры для каждой команды.

- 10.11. Найдите точку равновесия (если она существует в чистых стратегиях) для игры двух лиц с постоянной суммой

(9, -1)	(-2, 3)
(8, 7)	(-9, 11)

- 10.12. Найдите точку равновесия (если существует) в чистых стратегиях для игры двух лиц с непостоянной суммой

(9, 9)	(-10, 10)
(10, -10)	(-1, 1)

- 10.13. Найдите точку равновесия (если существует) в чистых стратегиях для игры двух лиц с непостоянной суммой

(9, 9)	(-9, 0)
(0, -9)	(0, 0)

- 10.14. Городской совет готов провести голосование по проектам, предусматривающим строительство новых дорог в двух районах города. Если оба района соединят свои усилия, то они смогут принять оба проекта, но ни один из районов в одиночку не справится с тем, чтобы принять проект. Если проект принят, то это будет стоить налогоплательщикам района 1 млн. грн. Если же дорога построится в районе, то это принесет ему доход в размере 10 млн. грн.

Голосование по двум проектам осуществляется одновременно и председатель районного совета должен голосовать, не зная информации, как проголосуют другие.

Предполагая, что каждый район поддерживает проект, определите, имеет ли игра хотя бы одну точку равновесия.

Является ли данная игра аналогом игры «двух разбойников»? Объясните, почему "да" или "нет".

- 10.15. Найдите оптимальные стратегии каждого из игроков и цену игры двух лиц с нулевой суммой

20	1	2
12	10	4
24	8	-2