ГЛАВА 11. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Управление запасами – один из наиболее "популярных" разделов исследования операций. Задачам управления запасами уделялось больше всего внимания по сравнению с другими разделами. Круг применения данных задач достаточно широк – от производственных процессов, банковских операций, процессов в сфере обращения до военной области.

Первой вехой в развитии теории управления запасами считается полученное в 1915 г. Ф.В.Харрисом (General Electric) уравнение для определения оптимального размера партии поставки, который минимизирует общие затраты, связанные с заказом и хранением запасов при известном спросе на ресурс.

Основные разработки теории управления запасами были сделаны в послевоенные годы. Они распространились на случаи, когда спрос неизвестен и может быть определен только приближенно.

К числу задач, связанных с неопределенным спросом, относится задача определения величины резерва, необходимого для предотвращения нехватки запаса. В разработку данной задачи внесли вклад такие ученые, как Т.Фрай, К.Эйзенхарт, К.Эрроу, Ф.В.Харрис, Дж.Маршак, К.Томпкинс и др. В развитие данного вопроса было проведено исследование влияния необходимости создания резерва на размер партии (Т.Уайтн), а также необходимых условий, при которых можно определить оптимальный уровень запасов (А.Дворецкий, Дж.Кифер и Дж.Вольфовиц).

Разработке иерархических (многоступенчатых, многобункерных) систем с запасами посвятили свои работы И.Берман и А.Кларк. В задачах подобного типа рассматривается снабжение нескольких периферийных складов через один централизованный.

Т.Уайтн исследовал зависимость между скидками за количество заказываемой продукции и размерами партий поставки.

Дальнейшее развитие теории управления запасами относится к учету различного рода производственных ограничений при определении оптимальной партии поставки: на мощности, время и денежные средства.

Наряду со статическими развитие получили и динамические задачи управления запасами (толчок этому был дан Р.Беллманом, разработавшим метод динамического программирования). В задачах данного типа решения, принимаемые в настоящий период времени, влияют и на некоторый последующий период.

Среди рассматриваемых подходов – задачи с обратной связью. Здесь в зависимости от величины спроса определяется размер производства и закупки ресурса.

Еще одним приложением динамических моделей явилась возможность учитывать расходы, связанные с изменением уровня производства. Так, можно определить, при каком уровне производства общие затраты, связанные с хранением, заказом (запуском партии изделий в производство), уплатой штрафов в связи с нехваткой, совместно с расходами, связанными с изменением уровня производства, будут минимальными.

Разработки Р.Беллмана позволили также применить вариационное исчисление для исследования задач управления производством и запасами ресурсов. Для случая, когда функции затрат представляют собой квадратичные формы, разработан метод квадратического программирования К.Хольт, Ф.Модильяни, Х.Саймон).

Дальнейшее развитие методов управления запасами связано с разработкой подходов к определению оптимальной политики для случаев неустойчивости спроса на продукцию (метод планирования потребности в материалах), системы "Точно вовремя" (Just-in-time), системы Канбан, системы ABC и др.

Таким образом, арсенал методов управления запасами достаточно широк и в каждом конкретном случае может быть применен тот или иной подход, обеспечивающий оптимальную политику по использованию в производстве различных видов материалов, ресурсов, комплектующих изделий.

11.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЗАПАСОВ, ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

В повседневной жизни каждый из нас сталкивается с понятием запасов. Более того, управляет их изменением в зависимости от потребительских качеств и потребности в них. Так, в домашнем хозяйстве хозяйка знает, какое количество того или иного продукта необходимо приобрести, когда это сделать и когда пополнить запас. В производстве аналогичная картина. Планирование выпуска любого изделия предполагает установление размеров необходимых комплектующих изделий, которые должны быть поставлены на рабочее место в определенное время в определенном количестве. Учитывая периодическую потребность в одинаковых материалах, комплектующих изделиях, сырье, их обычно хранят в некотором количестве на складах предприятия с тем, чтобы, по мере необходимости, использовать в производстве. Готовая продукция также может некоторое время быть нереализованной и находиться на складах предприятия-изготовителя или магазина, торгующего этими изделиями. Данные хранимые материалы, сырье, комплектующие изделия, продукция могут рассматриваться как запасы. Дадим более общее понятие этого термина.

***Запасами** называются неиспользуемые в данный момент, но пригодные к дальнейшему использованию ресурсы.*

К необходимости создания запасов приводят следующие факторы:

1. Дискретность поставок при непрерывном или близком к непрерывному потреблению;
2. Случайные колебания:
   а) в спросе за период между поставками;
   б) в объеме поставок;
   в) в длительности интервала между поставками;
3. Предполагаемые изменения конъюнктуры:
   а) сезона спроса;
   б) сезона производства;
   в) ожидаемое повышение цен.

Эти факторы, действуя самостоятельно, создают тенденцию к увеличению запасов.

Снижению запасов способствуют следующие факторы:

1. Плата за физическое хранение запасов;
2. Упущенный доход, который мог бы быть получен при вложении омертвленных в запасах средств в предприятия с твердым доходом;
3. Потери в количестве запаса (испарение, разложение) и в качестве (ухудшение потребительских свойств при хранении);
4. Устаревание или моральный износ, приводящий к снижению спроса.

Управление запасами *заключается в установлении моментов и объемов заказа на их восполнение и распределении вновь прибывших партий по нижестоящим звеньям системы снабжения. Совокупность правил, по которым принимаются эти решения, называется* ***стратегией управления запасами****.*

Каждая стратегия связана с определенными затратами на доведение материальных средств до потребителя.

Оптимальная стратегия *– это та, которая минимизирует затраты.*

Отыскание оптимальных стратегий является **предметом** *теории управления запасами.*

Область применения методов управления запасами не ограничивается складскими операциями.

Под запасами можно подразумевать:

- наличие товаров;
- рабочую силу, планируемую для выполнения определенных задач;
- размещение капитала страховой компании;
- емкость складского помещения;
- грузоподъемность транспортных средств;
- производственную мощность предприятий;
- уровень воды в водохранилище;
- численность персонала данной квалификации и т.д.

Основными элементами системы управления запасами являются:

- система снабжения;
- спрос на предметы снабжения;
- возможность пополнения запасов;
- функции затрат;
- ограничения;
- принятая стратегия управления запасами.

Рассмотрим классификацию задач управления запасами. Она основана на перечисленных ранее элементах.

Система снабжения

По структуре возможны два варианта построения системы снабжения:

1) централизованный (эшелонированный);
2) децентрализованный.

В первом случае каждая недостача покрывается за счет конечных запасов складов высшей ступени (данная система может иметь 4-5 ступеней).

Во втором случае все склады непосредственно обслуживают потребителей и недостача на одном или нескольких складах может быть по решению организации управления снабжением покрыта за счет избытка запасов на других складах.

По динамике операций системы снабжения делятся на

1) статические;

2) динамические.

В статических системах заказ делается на один период, в динамических – на несколько периодов.

Системы снабжения классифицируются по числу хранимых номенклатур:
1) однокомпонентные;
2) многокомпонентные.

По стабильности свойств хранимого ресурса:
1) изменяющиеся;
2) неизменяющиеся.

Чаще всего предполагается, что ни свойства, ни количество хранимого ресурса не подвергаются изменению.

Спрос

Спрос может быть следующий:
1) стационарный или нестационарный;
2) детерминированный или стохастический;
3) непрерывно или дискретно распределенный;
4) зависящий или независящий от спроса на другие номенклатуры.

Пополнение запасов

Пополнение запасов может быть:
1) мгновенным;
2) с некоторой задержкой;
3) случайным, т.е. в случайный момент времени, распределенный по известному закону распределения.

Объем поставки может быть:
1) требуемым;
2) случайным (с заданным законом распределения).

При отсутствии запаса требования на его пополнение могут
1) учитываться;
2) не учитываться.

Функции затрат

Функции затрат в своей совокупности образуют критерии и учитывают следующие издержки:
1) расходы на хранение;
2) транспортные расходы;
3) затраты, связанные с заказом каждой партии;
4) затраты на выплату штрафов.

Ограничения

В задачах управления запасами могут рассматриваться следующие ограничения по:
1) максимальному объему запаса;
2) максимальному весу;
3) максимальной стоимости;

4) числу заказов;
5) максимальному объему поставки;
6) числу поставок в заданном интервале времени;
7) вероятности недостачи;
8) имеющемуся запасу.

Стратегии управления запасами

Различают периодические стратегии и стратегии с критическим уровнем. В периодической стратегии заказ производится в каждый период времени T. В стратегии с критическим уровнем – при снижении текущего запаса до порогового уровня y.

По способу определения объема запаса различают стратегии

1) с постоянным объемом Q;
2) достигающим максимального уровня Y.

Таким образом, каждая из четырех простейших стратегий может характеризоваться двумя параметрами:

1. (T, Q); 3. (y, Q);
2. (T, Y); 4. (y, Y).

11.2. СХЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Изменение запасов во времени удобно представить графически в виде некоторой функции (рис.11.1)

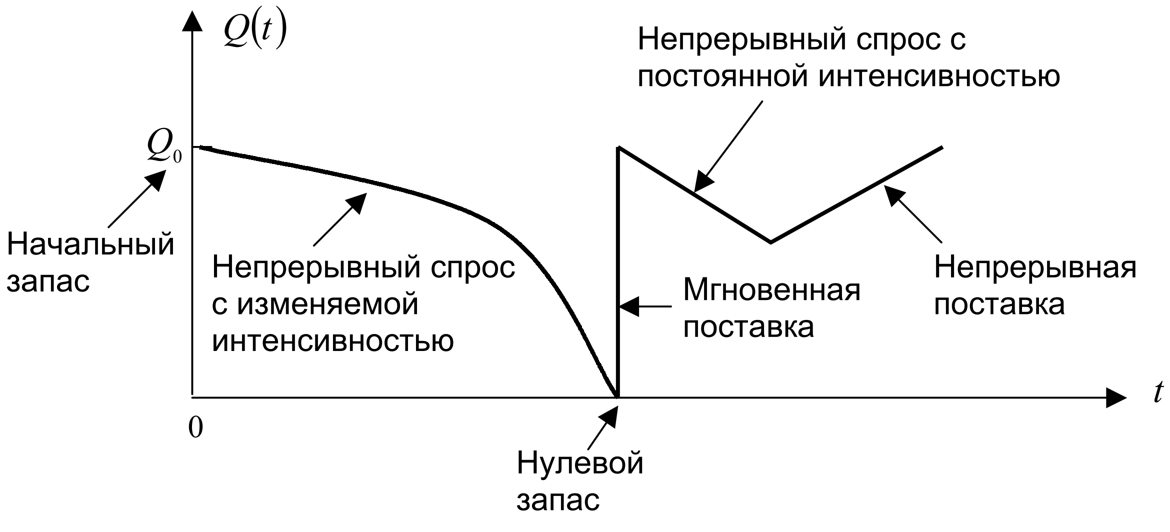
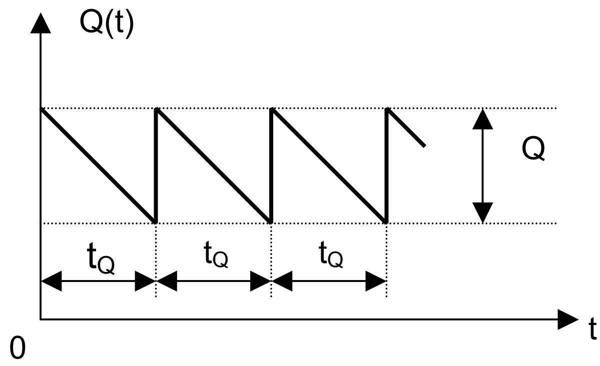


Рис. 11.1. Иллюстрация различных схем изменения запасов

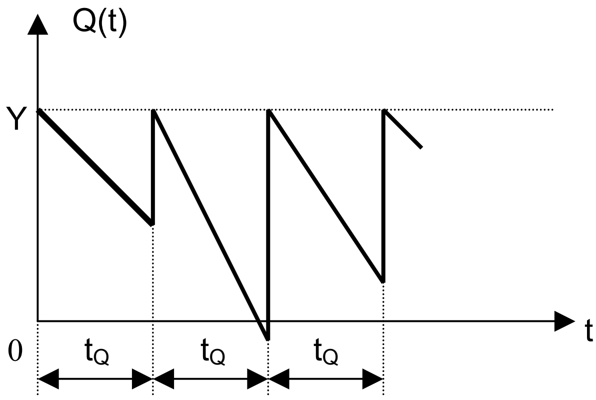
Некоторые схемы управления запасами для периодической стратегии и стратегии с критическим уровнем выглядят следующим образом:

1



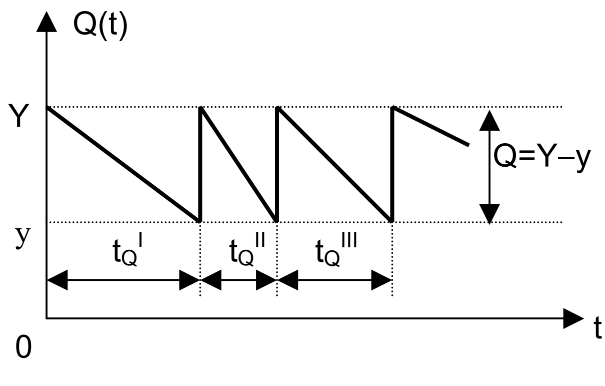
Поставки осуществляются через равномерные промежутки времени t_Q и имеют постоянную величину *Q*.

2



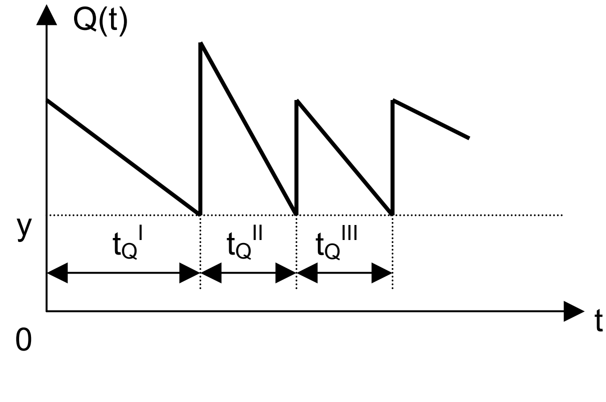
Объем поставок имеет переменную величину. Поставки в этом случае осуществляются таким образом, чтобы после пополнения запас достигал максимального уровня. Промежутки времени между поставками одинаковы. Может наблюдаться дефицит.

3



Заказ осуществляется при снижении текущего запаса до уровня *y* и имеет постоянную величину *Q*. Промежутки времени между отдельными заказами различны.

4



Заказ осуществляется при снижении текущего запаса до минимального уровня *y* и имеет переменную величину. Промежутки времени между отдельными заказами различны.

11.3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

11.3.1. ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОЙ ПАРТИИ ПОСТАВКИ (EOQ-МОДЕЛЬ)

Данная модель одна из старейших и наиболее широко применяемых. Она позволяет определить наиболее экономически выгодную партию поставки материалов, комплектующих изделий, которые либо должны быть куплены, либо произведены.

Экономически выгодная партия (EOQ – *Economic Order Quantity*) минимизирует затраты, связанные с оформлением заказа на поставку и хранение запасов. Рассматриваемая модель предполагает, что ситуация четко определена, поэтому она носит название детерминированной.

При определении величины оптимальной партии поставки будем принимать во внимание следующие предположения:

1. Имеют место переменные затраты C_S, связанные с оформлением заказа. Сюда входят следующие элементы: стоимость подготовки платежных поручений; стоимость подготовки заказа; стоимость сопровождения груза; затраты на проведение финансовых операций и т.д. Из расчета на один заказ эта величина постоянна. Общие затраты на оформление заказов зависят от числа партий поставки.
2. Имеют место затраты *c*, связанные с хранением материалов на складе. Сюда входят: затраты на использование площадей склада, страховка, налоги, стоимость усушки и утряски и других потерь материалов. В данные затраты также включается упущенный доход от отвлеченных в запасах средств. Часто данные затраты рассматриваются как процент от стоимости покупки или производства единицы изделия в расчете на плановый период.
3. Известна годовая потребность в материалах, *D*. Известно также, что эта потребность не меняется и возникает с постоянной интенсивностью. Например, количество единиц материалов, необходимых каждый день, каждую неделю, каждый месяц, – не меняется.
4. Стоимость единицы изделия, *b* предполагается неизменной. То есть нет изменения цен и скидок в цене в зависимости от объема покупаемых или производимых изделий.
5. Отсутствует дефицит. Каждый заказ равен одной и той же величине *Q*. Каждый раз, когда уровень запаса снижается до нуля, осуществляется новая поставка материала в количестве *Q* единиц.
6. Потребление идет с постоянной скоростью.

График изменения запасов имеет вид (рис. 11.2)

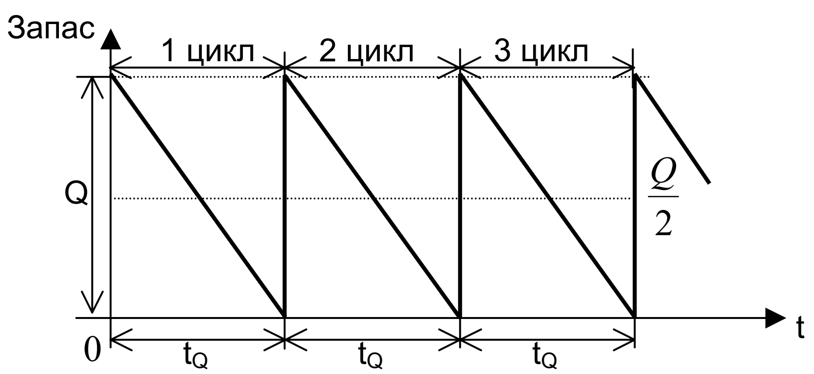


Рис. 11.2. Изменение уровня запаса в EOQ-модели

С учетом выдвинутых предположений и принятых обозначений можно рассчитать общие годовые затраты

TC = стоимость покупки материалов за год +
+ стоимость оформления заказов за год +
+ стоимость хранения запасов за год

или

$$TC = Db + C_S \frac{D}{Q} + bc\frac{Q}{2}. \qquad (11.1)$$

Первая составляющая формулы (11.1), Db, никак не связана с величиной Q – количеством покупаемых изделий за один раз. То есть увеличение или уменьшение Q не повлечет изменений Db.

Таким образом, для определения оптимальной партии поставки Q затраты на покупку материалов Db учитываться не будут. Будут рассматриваться только стоимость хранения и стоимость оформления заказов. Общие затраты, связанные с этим, составят

$$TC_Q = C_S \frac{D}{Q} + bc\frac{Q}{2}. \qquad (11.2)$$

Следует отметить, что первое слагаемое из (11.2) представляет собой гиперболическую функцию: с ростом величины Q общая стоимость заказов снижается. Второе слагаемое – линейная возрастающая функция от Q. Общие затраты – V-образная функция (рис.11.3)

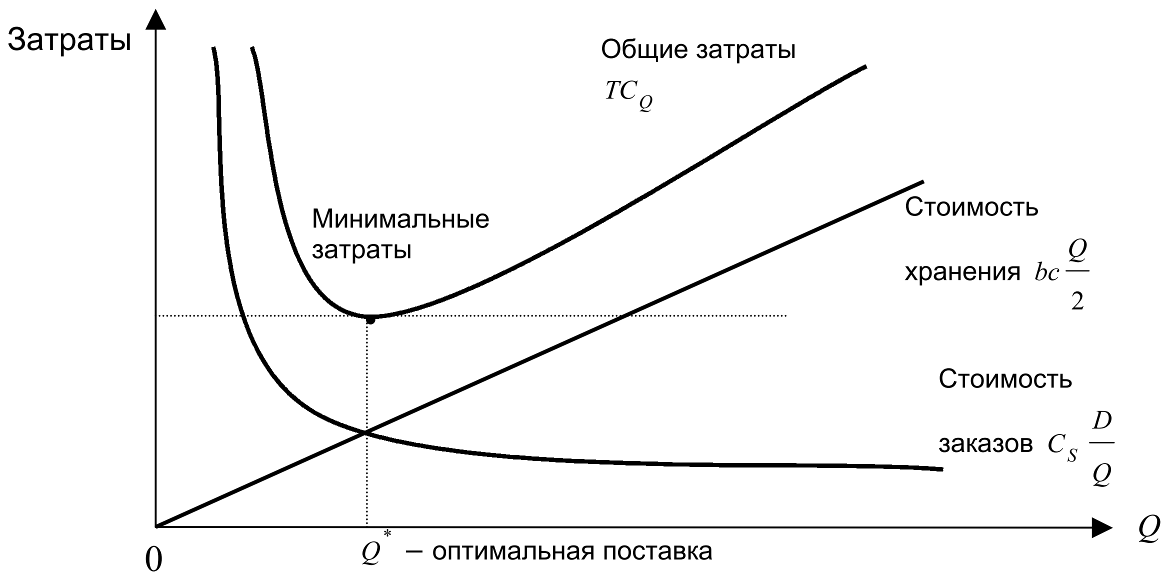


Рис. 11.3. Графическая иллюстрация изменения затрат, связанных с запасами

Оптимальная величина партии поставки Q^* должна минимизировать общие затраты. Отсюда, используя производную от функции TC_Q по Q, получаем

$$\frac{dTC_Q}{dQ} = -\frac{C_S D}{Q^2} + \frac{bc}{2}.$$

Приравнивая полученное выражение к нулю, решаем его относительно Q

$$-\frac{C_S D}{Q^2} + \frac{bc}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\quad {}^{*} \quad \sqrt{\frac{2C_S D}{bc}}}\,. \qquad (11.3)$$

Число поставок в течение планового периода определяется как

$$K = \frac{D}{Q^*},$$

а интервал времени между поставками как

$$t_Q = \frac{T}{K},$$

где T – длительность планового периода.

Пример.

Пусть на протяжении нескольких лет количество потребляемых изделий составляет 1000 шт. в неделю. Тогда годовая потребность равняется $D = 52000$ шт. Стоимость единицы изделия постоянна и составляет 4 грн. Изменений в стоимости единицы изделия не намечается. Анализ затрат на хранение показывает, что годовая стоимость хранения изделия на складе составляет 15% его гривневой цены, т.е. $bc = 4 \times 0.15 = 0.6$ грн. в год. Анализ затрат, связанных с оформлением заказа, в число которых входит заработная плата, оплата телефонных звонков, почтовые расходы, оформление заявки и др., показал, что они составляют примерно13.5 грн.

Решение.

Исходя из имеющейся информации, общие затраты могут быть определены из выражения (11.1)

$$TC = Db + C_S\frac{D}{Q} + bc\frac{Q}{2} = \underbrace{52000\times 4}_{\text{Не зависит от } Q} + \underbrace{13.5\times\frac{52000}{Q}}_{\text{Снижается с ростом } Q} + \underbrace{0.6\frac{Q}{2}}_{\text{Увеличивается с ростом } Q}.$$

Используя формулу (11.3) для расчета Q^*, находим экономически обоснованный размер партии поставки

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_S D}{bc}} = \sqrt{\frac{2 \times 13.5 \times 52000}{0.6}} = 1530 \text{ шт.}$$

С учетом этого можно подсчитать количество заказов в году

$$K = \frac{D}{Q^*} = \frac{52000}{1530} = 34 .$$

Таким образом, каждые 11 дней $(365 : 34 = 10.735 \approx 11)$ необходимо возобновлять поставки. Средняя величина запаса составит

$$\frac{Q^*}{2} = \frac{1530}{2} = 765 \text{ шт.}$$

Общие затраты будут равны

$$TC_{опт.} = Db + 13.5\frac{D}{Q^*} + 0.6\frac{Q^*}{2} =$$

$$= 52000 \times 4 + 13.5 \times \frac{52000}{1530} + 0.6 \times \frac{1530}{2} = 1208918 \text{ грн.}$$

Следует отметить, что в оптимальной точке затраты на хранение и на оформление заказа совпадают

$$13.5\frac{D}{Q^*} = 0.6\frac{Q^*}{2} = 459 \text{ грн.}$$

Для сравнения с оптимальным результатом рассчитаем затраты для различных размеров партий поставки. Соответствующие данные приведены в табл. 11.1.

Таблица 11.1. Зависимость затрат от величины партии поставки

Размер партии поставки, Q	Количество заказов, K	Годовая стоимость заказов, $13.5K$	Средний уровень запаса, $Q/2$	Годовая стоимость хранения, $0.6(Q/2)$	Стоимость покупки, Db	Общие годовые затраты, TC
500	104	1404	250	150	208000	209554
1000	52	702	500	300	208000	209002
1530	34	459	765	459	208000	208918
2000	26	351	1000	600	208000	208951
3000	19	234	1500	900	208000	209134

Как видно из таблицы, стоимость покупки не меняется, затраты на хранение с увеличением Q растут, а затраты на заказы снижаются. Общие затраты для различных уровней Q представлены на графике (рис.11.4)

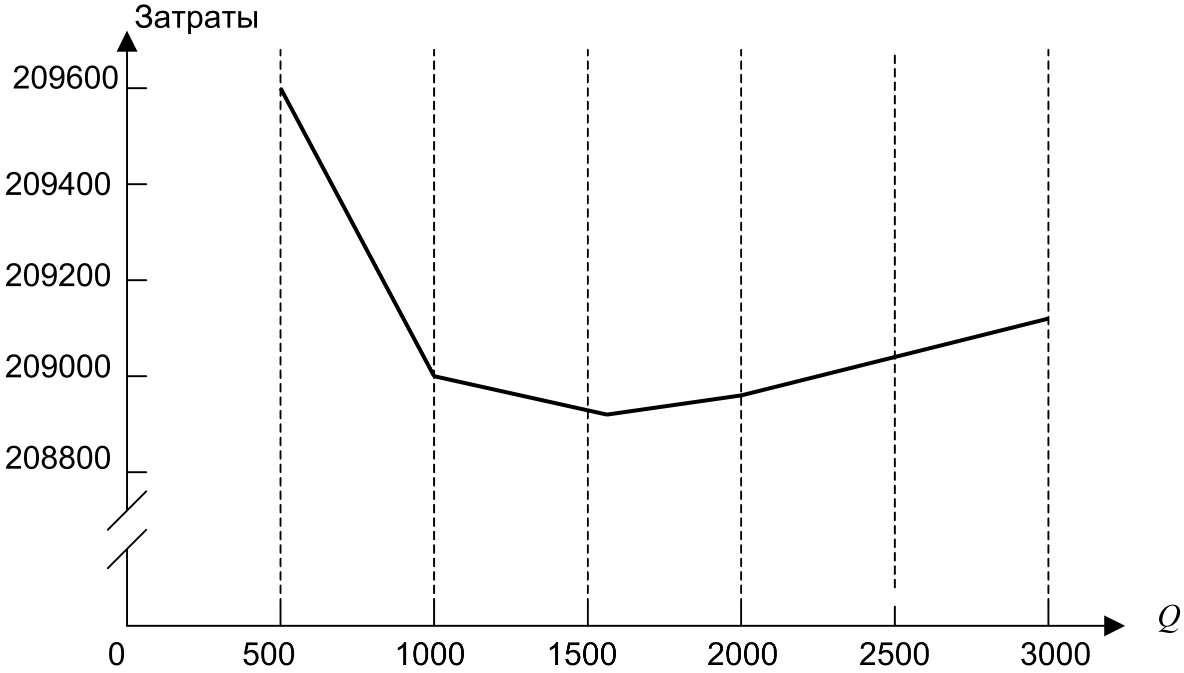


Рис. 11.4. Изменение уровня затрат в зависимости от величины партии поставки

11.3.2. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МОДЕЛИ К ВОЗМОЖНЫМ ПОГРЕШНОСТЯМ В ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Иногда исходные данные грешат неточностью. Это во многих случаях связано со сложностью ведения учета необходимой информации. Как правило, неточность в данных приводит к искажениям в окончательном результате. Однако предложенная модель для расчета экономически обоснованной партии поставки обладает в этом отношении преимуществом: она слабо чувствительна к изменениям в окрестности оптимальной точки.

Пример.

Пусть $D = 50$ *шт.;*
$b = 5$ *грн.;*
$C_S = 1$ *грн.;*
$c = 20\%$.

Необходимо рассчитать основные параметры системы управления запасами и провести анализ чувствительности решения к возможным изменениям данных параметров.

Решение,

Используя формулу (11.3), рассчитаем Q^*

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 1 \times 50}{5 \times 0.2}} = 10 \text{ шт.}$$

Общие затраты составят

$$TC_{опт.} = 50 \times 5 + 1 \times \frac{50}{10} + 1 \times \frac{10}{2} = 260 \text{ грн.}$$

Рассмотрим возможные изменения параметров.

1. Пусть имеет место ошибка в оценке потребностей, равная 20%. Реальная потребность, таким образом, составит 60 единиц. Рассчитаем Q^*, используя $D = 60$ шт.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 1 \times 60}{5 \times 0.2}} = 10.95 \text{ шт.,}$$

тогда

$$TC_{опт.} = 60 \times 5 + 1 \times \frac{60}{10.95} + 5 \times 0.2 \times \frac{10.95}{2} = 310.94 \text{ грн.}$$

Рассчитаем фактические затраты, используя потребность, равную 60 шт., и ранее определенную величину партии поставки $Q = 10$ шт.

$$TC_{опт.} = 60 \times 5 + 1 \times \frac{60}{10} + 1 \times \frac{10}{2} = 311 \text{ грн.}$$

Итак, ошибка в уровне потребности, равная 20%, приводит только к 9.5-процентной ошибке в уровне Q

$$\frac{10.95 - 10}{10} \times 100\% = 9.5\%$$

и менее, чем к 1-процентной ошибке в общих затратах

$$\frac{311 - 310.94}{310.94} \times 100\% = 0.0193\% .$$

2. Предположим, что была переоценена величина затрат на оформление заказа. На самом деле затраты составляют 0.9 грн. в расчете на один заказ. Рассчитаем оптимальный размер партии поставки и затраты, соответствующие данной величине

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 0.9 \times 50}{5 \times 0.2}} = 9.49 \text{ шт.}$$

$$TC_{опт.} = 50 \times 5 + 0.9 \times \frac{50}{9.5} + 5 \times 0.2 \times \frac{9.5}{2} = 259.49 \text{ грн.}$$

Для ранее рассчитанной величины партии поставки

$$TC = 50 \times 5 + 0.9 \times \frac{50}{10} + 1 \times \frac{10}{2} = 259.5 \text{ грн.}$$

Таким образом, ошибка в уровне заказа составляет чуть более 5%, а в уровне затрат – значительно меньше 1%:

3. Пусть ошибка заключалась в стоимости хранения. Действительная стоимость хранения составляет 30% от цены изделия. С учетом этого имеем

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 1 \times 50}{5 \times 0.3}} = 8.16 \text{ шт.}$$

Оптимальные затраты равны

$$TC_{опт.} = 50 \times 5 + 1 \times \frac{50}{8.17} + 5 \times 0.3 \times \frac{8.17}{2} = 262.25 \text{ грн.}$$

Фактические затраты составляют

$$TC = 50 \times 5 + 1 \times \frac{50}{10} + 5 \times 0.3 \times \frac{10}{2} = 262.2 \text{ грн.}$$

Таким образом, 50-процентная ошибка в затратах на хранение привела к 18.4-процентной ошибке в уровне заказа и к очень незначительной ошибке в затратах.

4. Пусть цена изделия составляет 7 грн., т.е. на 40% выше первоначальной цены. Произведем ранее приведенные выкладки для данного случая

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 1 \times 50}{7 \times 0.2}} = 8.45 \text{ шт.}$$

$$TC_{опт.} = 50 \times 7 + 1 \times \frac{50}{8.45} + 7 \times 0.2 \times \frac{8.45}{2} = 361.83 \text{ грн.}$$

$$TC = 50 \times 7 + 1 \times \frac{50}{10} + 7 \times 0.2 \times \frac{10}{2} = 362 \text{ грн.}$$

Такая значительная ошибка (40%) привела к значительно меньшей погрешности в уровне заказа (15.5%) и к абсолютно несущественной ошибке в затратах.

Все вышеприведенные расчеты позволяют сделать вывод о слабой чувствительности модели к возможным изменениям ее параметров.

11.3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ РАЗМЕЩЕНИЯ ЗАКАЗА НА ПОСТАВКУ

При определении оптимальной партии поставки материала предполагалось, что она осуществляется мгновенно, чего в реальной жизни не происходит. Обычно имеет место некоторый срок, связанный с рядом причин производственного и транспортного характера, который проходит с момента оформления заказа на поставку до его получения. В связи с этим возникает справедливый вопрос: когда необходимо осуществлять заказ, с тем, чтобы он прибыл вовремя и не возникли нехватки в тех или иных видах материалов.

Ответ на данный вопрос зависит от того, какова длительность периода времени доставки необходимого материала. Так, если необходимы l дней, чтобы заказ был доставлен, то оформление заказа должно быть сделано за l дней до конца каждого цикла потребления материала. Данная ситуация иллюстрируется для двух различных значений l (рис. 11.5).

Величины l_1 и l_2 определяют, соответственно, длительность времени доставки ресурса, когда оно не превышает время его потребления (t_Q) или превышает. Если встречается первая ситуация, то заказ на поставку следует осуществить всякий раз в момент времени

$$t_0 + nt_Q - l_1,$$

где t_0 – начальный момент времени потребления ресурса,

n – количество циклов потребления ресурса с момента начала его потребления $(n = 0,1,2,\ldots)$.

Если налицо вторая ситуация, то заказ на ресурс осуществляется в момент времени

$$t_0 + nt_Q - l_2.$$

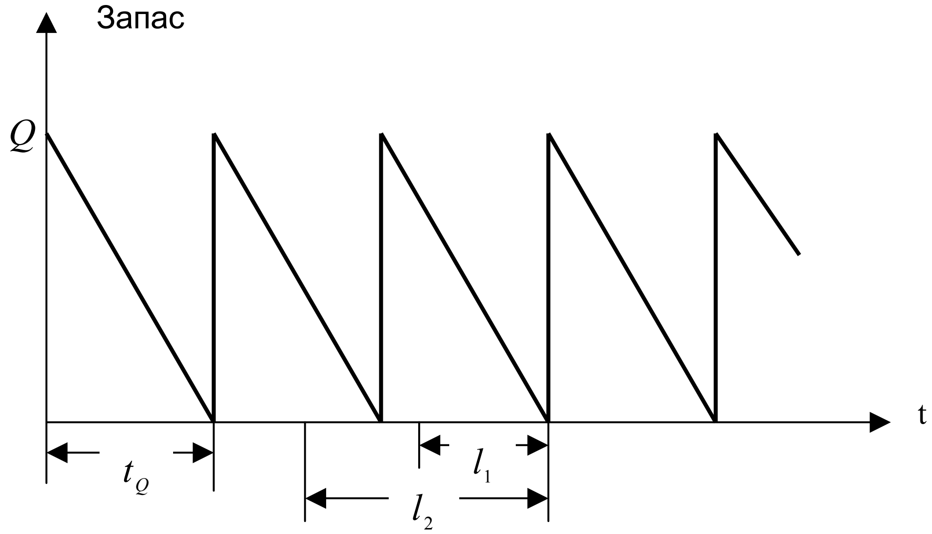


Рис. 11.5. Ситуации с различными длительностями времени доставки

На практике точное определение момента времени размещения заказа не всегда осуществимо в связи с тем, что предположение о постоянной интенсивности потребления ресурса часто не выдерживается. В связи с этим правило "когда заказывать?" может быть сформулировано следующим образом:

> *заказ на ресурс должен быть размещен в тот момент, когда* ***состояние запасов*** *равно потребности в ресурсе на период времени его поставки.*

Состояние запасов определяется как

состояние запасов = запасы на руках + запасы, размещенные в заказе.

В случае с постоянной интенсивностью потребления ресурса данное правило эквивалентно интуитивному правилу: *заказывайте за* l *дней до момента, когда вы хотите получить заказ*.

Для условий рассмотренного примера мы имели оптимальный уровень поставки в размере $Q^* = 1530$ шт. изделий, количество поставок в году – $K = 34$ раза, интервал времени между поставками $t_Q = 11$ дней. С учетом этого суточная интенсивность потребления изделий составляет $d = \dfrac{Q^*}{t_Q} = \dfrac{1530}{11} = 139$ шт.

Допустим, что время доставки заказа равно 4 дням $(l = 4)$. Следуя интуитивному правилу, нам необходимо осуществить очередной заказ спустя 7 дней с момента очередной поставки изделий (в количестве 1530 шт.), т.е. за 4 дня до возникновения новой потребности в них. В нашей ситуации оформление заказа осуществляется, когда на руках имеется запас в $139 \times 4 = 556$ шт. изделий. Так как на данный момент времени никаких других заказов сделано не было, то состояние запасов будет определено следующим образом:

состояние запасов	= запасы на руках + запасы, размещенные в заказе =		
	= 556	+	0 =
	= 556 шт.		

Отсюда состояние запасов равно потребности в изделиях на период времени их поставки и данный уровень запаса определяет **точку перезаказа**. Графическая иллюстрация данного случая представлена на рис 11.6.

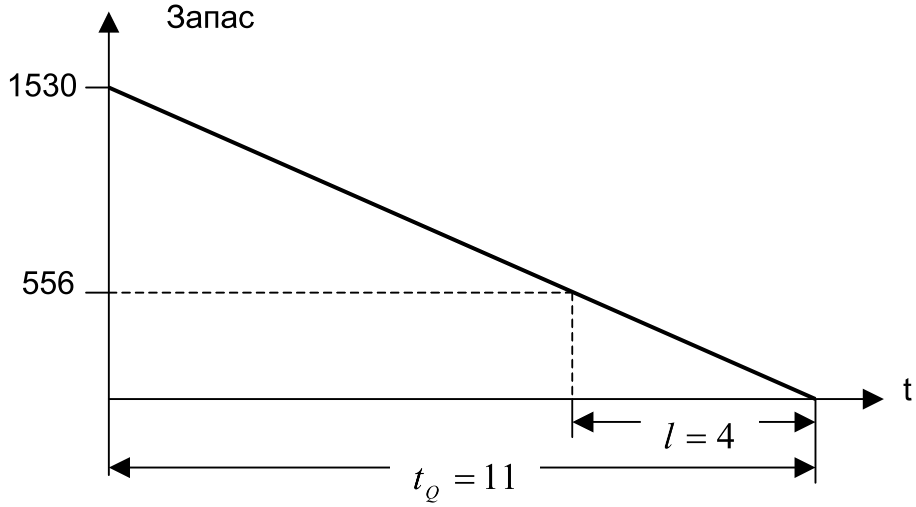


Рис. 11.6. Когда заказывать, если $l < t_Q$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $l > t_Q$. В частности, предположим, что $l = 15$ дням. Пусть нам необходимо получить новую партию изделий к 31 марта. В этом случае мы должны оформить заказ на поставку за 15 дней до того момента, когда эта партия изделий должна быть доставлена (см. рис. 11.7). Необходимо заметить, что по состоянию на 16 марта уровень запаса на руках составит 556 шт.:

запасы на руках = 556 шт.

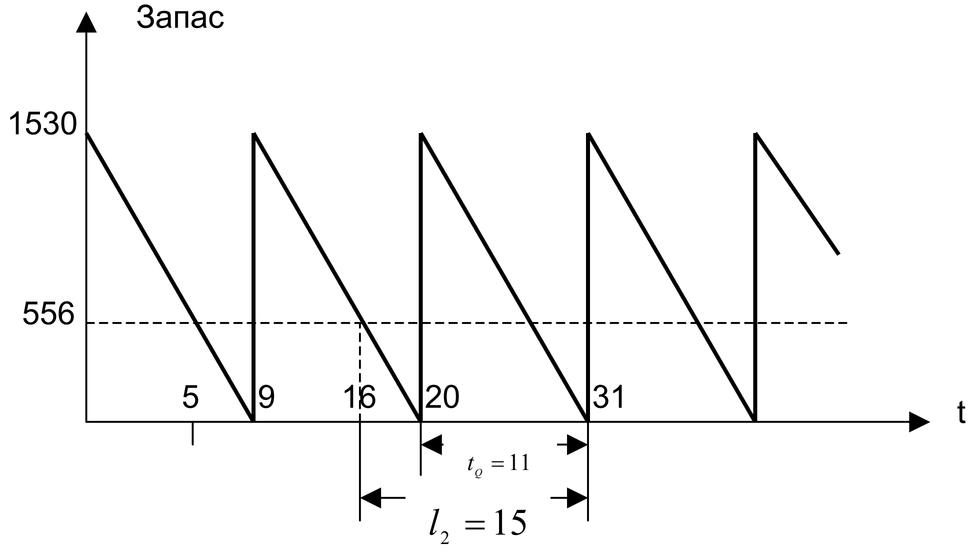


Рис. 11.7. Когда заказывать, если $l > t_Q$

Далее, заказ, который должен прибыть 20 марта, был размещен 5 марта в связи с длительностью периода времени поставки заказа, равного 15 дням. Этот заказ все еще не выполнен, и это единственный не выполненный заказ на данную дату.

Таким образом,

запасы, размещенные в заказе = 1530 шт.

В соответствии с определением получаем

состояние запасов = запасы на руках + запасы, размещенные в заказе =

= 556 + 1530 =

= 2086 шт.

Потребность в изделиях в течение времени поставки равна

$$15\,\text{дней} \times 139\,\text{шт./день} = 2085\,\text{шт.},$$

то есть она практически равна состоянию запасов (различие в одну единицу вызвано погрешностями округления). Таким образом, еще подтверждается правило

"необходимо осуществлять заказ тогда, когда состояние запасов будет равно потребности в изделиях в течение времени их доставки".

11.3.4. МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКИ ВЫГОДНОЙ ПАРТИИ ИЗДЕЛИЙ

Предыдущая модель предполагала, что поставка осуществляется в момент, когда уровень запаса снизится до нулевого уровня. Величина поставки равна Q.

Рассмотрим модель, которая описывает ситуацию, когда запасы образуются в процессе производства. Будем считать, что потребность в продукции в единицу времени постоянна и равна d шт. В момент, когда уровень запаса упадет до нуля, начнется процесс производства в количестве Q единиц. Этот объем производится не мгновенно, а в течение определенного периода времени. Интенсивность производства равна p шт. в единицу времени. Производство продолжается в течение t_p единиц времени (например, дней, часов, смен и т.д.).

Так, если необходимо произвести $Q = 2000$ единиц продукции и интенсивность производства составляет $p = 250$ единиц в день, то требуется период времени, равный 8 дням $(t_p = 8)$, чтобы изготовить партию изделий. Кроме того, если дневная потребность составляет 100 шт. $(d = 100)$, то в течение 8-дневного периода запасы возрастают с интенсивностью $250 - 100 = 150$ шт. в день. Таким образом, максимальный уровень запаса составит $Q_{\max} = 150 \times 8 = 1200$ шт. Как мы видим, размер запаса меньше размера партии изделий. Учитывая интенсивность потребления, равную 100 единицам изделий в день, запас будет израсходован в течение 12 $(t_Q = 12)$ дней, после чего начнется новый цикл производства. Схема изменения уровня запаса приведена на рис. 11.8.

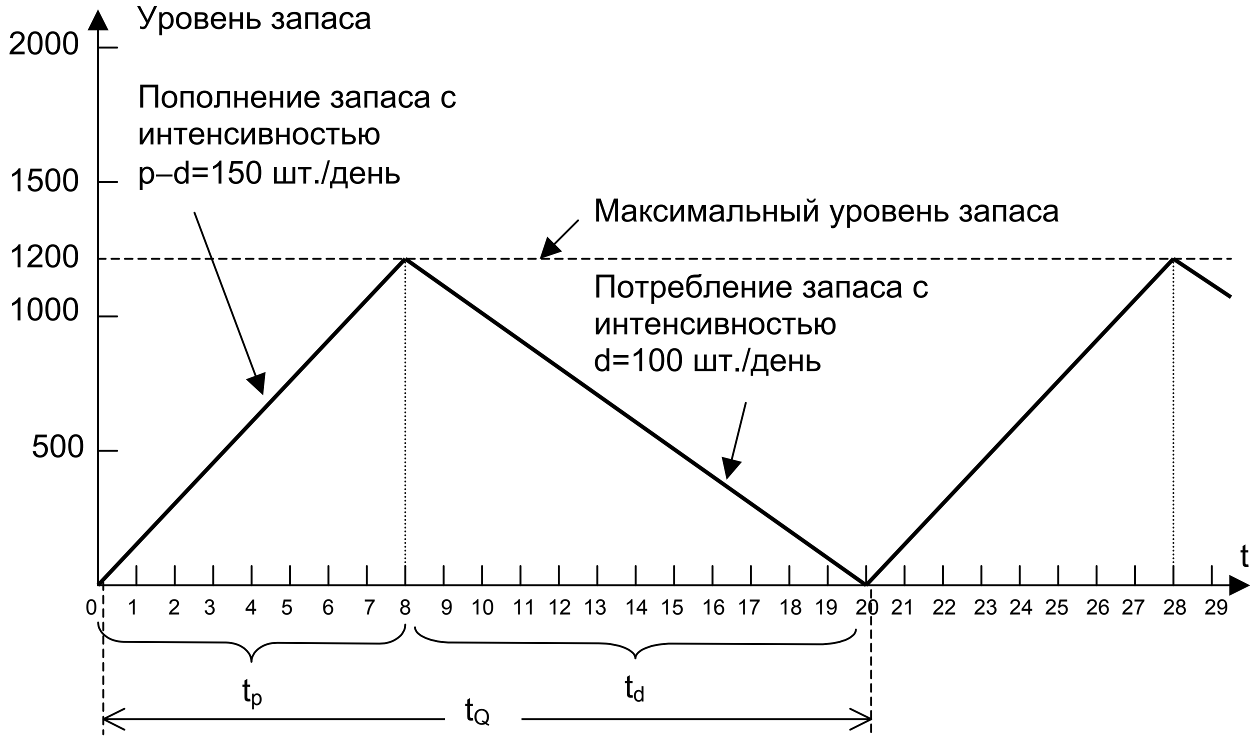


Рис. 11.8. Графическая иллюстрация схемы управления запасами для модели экономически выгодной партии продукции

Для анализа ситуации модифицируем выдвинутые ранее следующие предположения:

1. Затраты, связанные с организацией заказа, теперь рассматриваются как затраты, связанные с запуском партии изделий в производство. Сюда входят затраты на наладку и переналадку оборудования, оформление перечня материалов, маршрутных карт и операционных листов.
2. Затраты на хранение аналогичны рассмотренным в предыдущей модели.
3. Интенсивность потребления ресурсов постоянна и равна d шт. в единицу времени.
4. Стоимость единицы продукции ассоциируется с затратами на производство. Она предполагается неизменной в течение года.
5. Как и прежде, цель решения задачи – определить оптимальный размер партии продукции Q, запускаемой в производство. Запасы будут расти с интенсивностью $(p-d)$ шт. в единицу времени в течение всего срока производства, а не возникать единовременно. При этом требуется, чтобы выполнялось условие: $p>d$. В противном случае (когда $p<d$), производство никогда не будет соответствовать потребности. При $p=d$ запасы не возникают.

В отличие от ранее рассмотренной модели, когда был известен регулярно возобновляющийся уровень запаса, равный Q, и затраты на хранение при постоянной интенсивности потребления ресурса определялись как $\frac{Q}{2}bc$, в данном случае запас не появляется мгновенно, а растет с интенсивностью *p* при одновременном потреблении запаса с интенсивностью d. Таким образом, полный объем производства Q никогда не реализуется в виде запаса того же размера. Максимальный уровень запаса приходится на конец периода t_p – длительности производственного цикла. Его величина составляет $Q_{\max}=(p-d)t_p$. Так как t_p – функция от величины партии изделий Q и интенсивности производства p, т.е. $t_p=\frac{Q}{p}$, то максимальный запас можно представить как $Q_{\max}=(p-d)\frac{Q}{p}$, а средний уровень его $I_{\text{ср.}}=\frac{1}{2}(p-d)\frac{Q}{p}$. Отсюда, затраты на хранение составят $\frac{bc(p-d)Q}{2p}$, где bc – затраты на хранение единицы продукции в расчете на год.

Если D – общая потребность в продукции за год, то, используя затраты, связанные с запуском партии изделий в производство C_S и размер партии Q, можно найти годовые затраты на организацию запуска изделий:

$$C_S\frac{D}{Q}.$$

Отсюда общие годовые затраты составят

$$TC=Db+bcQ\frac{p-d}{2p}+C_S\frac{D}{Q}. \quad (11.4)$$

Для определения оптимального размера партии изделий, запускаемой в производство, найдем первую производную от полученного выражения по Q, приравняем ее к нулю и решим полученное уравнение относительно Q

$$\frac{dTC}{dQ} = \frac{bc(p-d)}{2p} - \frac{C_S D}{Q^2} = 0,$$

$$Q^2 = \frac{2pC_S D}{bc(p-d)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^{*} \quad \sqrt{\frac{2C_S D}{bc} \quad \frac{p}{p \quad d}}}\,. \qquad (11.5)$$

Данная формула позволяет рассчитать экономически выгодный размер партии изделий, запускаемой в производство. Формула отличается от ранее рассмотренной модели EOQ (11.3) на величину $\sqrt{\frac{p}{p-d}}$. Эта величина снижает затраты на хранение среднего количества запасов в связи с тем, что имеет место производственный цикл.

Пример.

Пусть производственный процесс позволяет выпускать 60 единиц продукции в день, годовая потребность в которой составляет 6500 шт., или примерно 25 шт. в день. Затраты на запуск партии изделий в производство составляют 180 грн., стоимость производства изделия равна 5.5 грн. за единицу, а годовые затраты на хранение равны 18% от стоимости изделия. Подготовка к производству новой партии составляет, в среднем, одну неделю. Необходимо рассчитать параметры системы управления запасами.

Решение.

Определим размер партии изделий, запускаемой в производство. Используя формулу (11.5), рассчитаем Q:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 180 \times 6500}{5.5 \times 0.18} \times \frac{60}{60-25}} = 2013 \text{ шт.}$$

Определим, сколько дней необходимо для того, чтобы произвести 2013 единиц изделий

$$t_p = \frac{2013}{60} = 34 \text{ дня.}$$

Максимальный уровень запаса составит

$$Q_{\max} = 34 \times (60 - 25) = 1190 \text{ шт.}$$

Учитывая, что ежедневная потребность в изделиях составляет 25 шт., то данный запас будет исчерпан в течение

$$t_d = \frac{1190}{25} = 48 \text{ дней.}$$

Общая длительность производственного цикла составит

$$t_Q = 34 + 48 = 82 \text{ дня.}$$

Всего в году будет $K = \frac{6500}{2013} = 3.2$ таких циклов.

Рассмотрим более детально взаимосвязь между моделью оптимальной партии поставки и оптимальной партии изделий, запускаемой в производство. Для этого воспользуемся данными из ранее рассмотренного примера, где $D = 50$ шт., $b = 5$ грн., $C_S = 1$ грн. и $c = 20\%$. Напомним, что размер оптимальной партии поставки составил 10 шт., а средний уровень запаса, исходя из этого, – 5 шт.

Предположим, что $p = 2$ шт./ед. врем., а $d = 1$ шт./ед. врем. и рассчитаем оптимальный размер партии изделий.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 1 \times 50}{5 \times 0.2} \times \frac{2}{2-1}} = 14.14 \text{ шт.}$$

Определим средний уровень запаса

$$I_{ср.} = \frac{Q^*}{2} \times \left(\frac{p-d}{p}\right) = \frac{14.14}{2} \times \frac{2-1}{2} = 3.54 \text{ шт.}$$

Как видим, размер оптимальной партии возрос с 10 до 14.14 шт., а средний запас снизился с 5 до 3.54 шт. С одной стороны, мы экономим на затратах, связанных с хранением, так как в процессе производства изделий идет их потребление, а с другой – на затратах, связанных с организацией заказа (запуска изделий в производство), так как количество заказов (запусков в производство) снизилось.

Если d будет уменьшаться, а p расти, то отношение $\frac{p}{p-d}$ будет стремиться к единице, а сама формула (11.5) будет приближаться к выражению, полученному для оптимальной партии поставки (11.3). Если d будет приближаться к p, то будем иметь дело с отсутствием запасов и с непрерывным производством.

11.3.5. МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОЙ ПАРТИИ ПОСТАВКИ И СКИДКИ В ЦЕНЕ

Часто поставщики продукции предлагают скидки в цене изделия, если приобретаются большие партии продукции. Для того чтобы реализовать данное условие при расчете схемы управления запасами, изменим наше предположение о неизменности цены изделия в течение года.

Рассмотрим три случая, когда

имеет место два уровня цен;

имеет место три уровня цен;
число уровней цен более трех.

Два уровня цен.

Итак, пусть ситуация с покупкой товара представлена следующим образом:

Размер заказа	Покупная цена
$1 \le Q_1 < M$	b_1
$Q_2 \ge M$	$b_2 < b_1$

Графически иллюстрация данного случая представлена на рис. 11.9.

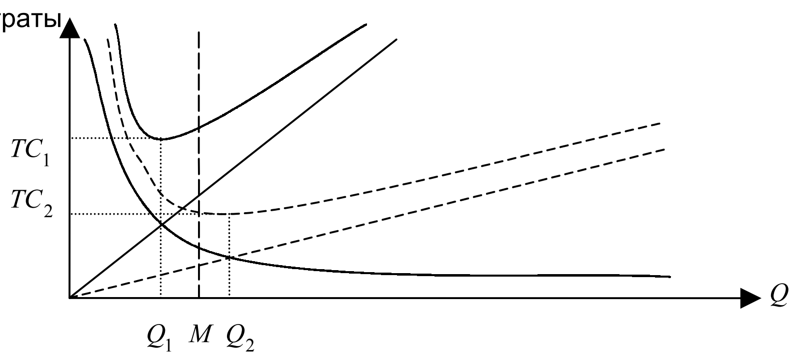


Рис. 11.9. Функции затрат для двух различных уровней цен

Для двух уровней цен будут иметь место два уровня затрат

$$TC_1 = Db_1 + C_S \frac{D}{Q_1} + b_1 c \frac{Q_1}{2},$$

$$TC_2 = Db_2 + C_S \frac{D}{Q_2} + b_2 c \frac{Q_2}{2}.$$

В ситуации с двумя уровнями цен возможны два случая:

1. Когда оптимальный размер партии поставки Q^* соответствует диапазону изменения уровня заказа с минимальной ценой, т.е. $Q_2 \ge M$.
2. Когда оптимальный размер партии поставки Q^* находится в диапазоне с наивысшей ценой, т.е. $1 \le Q_1 < M$.

В первом случае в качестве окончательного решения будет принята величина Q^*.

Во втором случае для определения величины партии поставки необходимо сопоставить затраты TC_1 и TC_2, причем первая величина рассчитывается с учетом найденного значения Q^*, а вторая – с учетом того, что партия поставки определена на минимальном для данного размера цены уровне, т.е. M .

В качестве окончательного решения принимается то, которому соответствуют минимальные затраты.

Пример.

Пусть $D = 3600$ *шт.,*

$C_S = 350$ *грн.*,
$c = 20\%$

Размер заказа	*Покупная цена*
$1 \le Q_1 < 500$	20 *грн.*
$Q_2 \ge 500$	18.5 *грн.*

Необходимо определить оптимальный размер партии поставки.

Решение.

Определим Q^*:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 350 \cdot 3600}{18.5 \cdot 0.2}} = 825 \text{ шт.}$$

Учитывая, что оптимальная партия поставки соответствует диапазону с минимальной ценой $\left(Q_2 \ge 500,\ b_2 = 18.5\right)$, то ее принимаем в качестве оптимального решения.

Изменим ситуацию. Пусть $C_S = 100$ грн. Рассчитаем $Q_i^* \ (i = 1,2)$

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 3600}{20 \cdot 0.2}} = 424 \text{ шт.}$$

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 3600}{18.5 \cdot 0.2}} = 441 \text{ шт.}$$

Так как Q_2^* не соответствует минимальному уровню цен, то предпримем сопоставление показателей затрат. Для первого диапазона возьмем партию поставки на уровне $Q_1^* = 424$, для второго - на уровне минимального значения для уровня цены в 18.5 грн.

$$TC_1 = 3600 \cdot 20 + 100 \cdot \frac{3600}{424} + 20 \cdot 0.2 \cdot \frac{424}{2} = 73697.06 \text{ грн.},$$

$$TC_2 = 3600 \cdot 18.5 + 100 \cdot \frac{3600}{500} + 18.5 \cdot 0.2 \cdot \frac{500}{2} = 68245 \text{ грн.}$$

Полученный результат позволяет сделать вывод о необходимости закупки партии товара в количестве 50 шт. по цене 18.5 грн./шт.

Если скидка в цене допускается при покупке партии товара в размере не менее 4000 шт. (при условии, что потребность сократится и на следующий плановый период), то получим следующий результат (из расчета текущей потребности в товаре):

$$TC_2 = 3600 \cdot 18.5 + 100 \cdot \frac{3600}{4000} + 18.5 \cdot 0.2 \cdot \frac{4000}{2} = 74090\,\text{грн.}$$

В этом случае $TC_1 < TC_2$, и размер партии поставки товара определяется на уровне 424 шт.

Три уровня цен.

Пусть ситуация описывается следующими условиями:

Размер заказа	Покупная цена
$1 \le Q_1 < M_1$	b_1
$M_1 \le Q_2 < M_2$	$b_2 < b_1$
$Q_3 \ge M_2$	$b_3 < b_2$

Графически данный случай представлен на рис. 11.10.

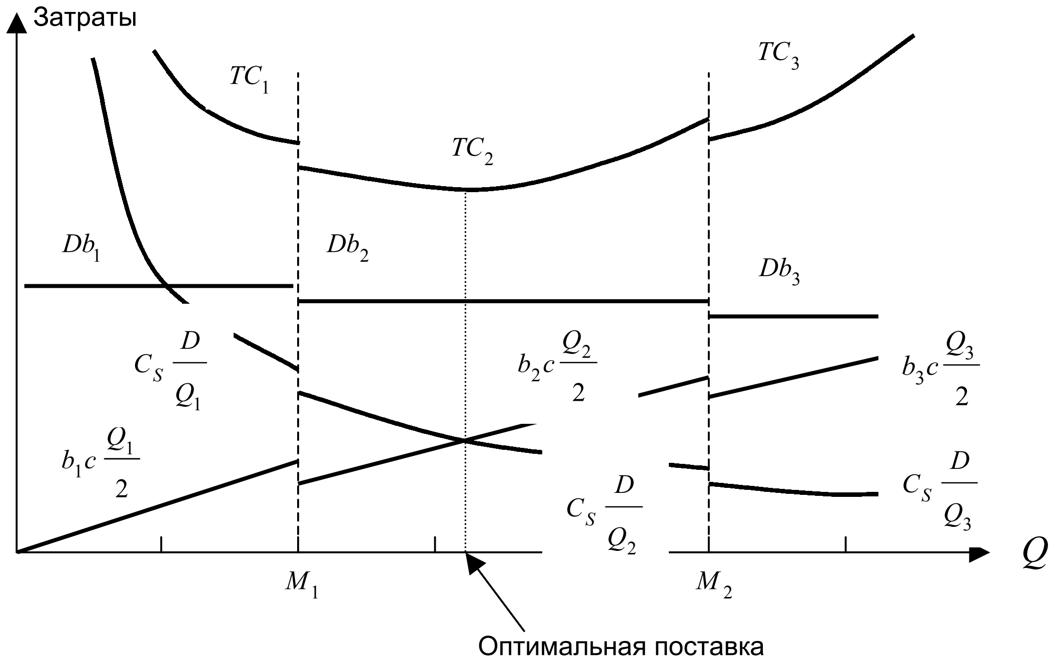


Рис. 11.10. Изменение затрат при трех уровнях цен

В этом случае применяется следующая схема расчетов:

1. Вычисляется значение Q^* для наименьшего значения цены (b_3). Если $Q^* \ge M_2$, то данный размер партии поставки принимается в качестве оптимального.
2. Если рассчитанное $Q^* < M_2$, то вычисляется его значение для среднего уровня цен (b_2). В случае попадания размера партии поставки Q^* заданный диапазон $M_1 \le Q_2 < M_2$, рассчитываются затраты TC_2 и TC_3 при условии, что для TC_3 размер Q принимается равным M_2. Минимальное значение затрат $(TC_2 \text{ или } TC_3)$ определит размер партии поставки.
3. Если размер партии поставки Q^* не попадает в диапазон $M_1 \le Q_2 < M_2$, то вычисляется его значение для первого диапазона $1 \le Q_1 < M_1$ (при самой

высокой цене), после чего рассчитываются и сопоставляются показатели затрат TC_1, TC_2 и TC_3, причем последние два определяются исходя из минимально допустимых значений партий поставки для соответствующих диапазонов, т.е. M_1 и M_2.

Пример.

Пусть $D = 3600$ *шт.*,
$C_S = 350$ *грн.*,
$c = 20\%$

и имеют место три диапазона цен

Размер заказа	*Покупная цена*
$1 \le Q_1 < 550$	20 *грн.*
$550 \le Q_2 < 750$	18.5 *грн.*
$Q_3 \ge 750$	17 *грн.*

Необходимо определить оптимальный размер партии поставки.

Решение.

Определим Q^* для минимальной цены единицы ресурса

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 350 \cdot 3600}{17 \cdot 0.2}} = 861 \text{ шт.}$$

Таким образом, размер партии поставки должен соответствовать 861 шт.

Пусть ситуация изменилась и $C_S = 200$ грн. Тогда значение Q^* для минимальной цены единицы ресурса будет равно

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 3600}{17 \cdot 0.2}} = 651 \text{ шт.}$$

Так как полученный оптимум является незаконным (цена 17 грн./шт. не соответствует величине партии поставки), то определим Q для цены из среднего диапазона

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 3600}{18.5 \cdot 0.2}} = 624 \text{ шт.}$$

Рассмотрим затраты TC_2 и TC_3

$$TC_2 = 3600 \cdot 18.5 + 200 \cdot \frac{3600}{624} + 18.5 \cdot 0.2 \cdot \frac{624}{2} = 68908.25 \text{ грн.},$$

$$TC_3 = 3600 \cdot 17 + 200 \cdot \frac{3600}{750} + 17 \cdot 0.2 \cdot \frac{750}{2} = 63435 \text{ грн.}$$

Как видим, затраты TC_3 ниже, чем TC_2. Следовательно, необходимо заказывать по 750 шт. товара.

Пусть теперь $C_S = 150$ грн., тогда

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 3600}{18.5 \cdot 0.2}} = 540 \text{ шт.}$$

В данном случае полученный результат нельзя считать законным, так как рассчитанная партия поставки не соответствует цене товара. Пересчитаем Q исходя из начального уровня цен

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 3600}{20 \cdot 0.2}} = 520 \text{ шт.}$$

Определим TC_1, TC_2 и TC_3

$$TC_1 = 3600 \cdot 20 + 150 \cdot \frac{3600}{520} + 20 \cdot 0.2 \cdot \frac{520}{2} = 74078.46 \text{ грн.},$$

$$TC_2 = 3600 \cdot 18.5 + 150 \cdot \frac{3600}{550} + 18.5 \cdot 0.2 \cdot \frac{550}{2} = 68599.32 \text{ грн.},$$

$$TC_3 = 3600 \cdot 17 + 150 \cdot \frac{3600}{750} + 17 \cdot 0.2 \cdot \frac{750}{2} = 63195 \text{ грн.}$$

Полученные расчеты позволяют сделать вывод о необходимости заказа партии поставки товара в количестве 750 шт.

Число уровней цен более трех.

Пусть ситуация описывается следующими условиями:

Размер заказа	Покупная цена
$1 \le Q_1 < M_1$	b_1
$M_1 \le Q_2 < M_2$	$b_2 < b_1$
$\vdots$	$\vdots$
$M_{n-2} \le Q_{n-1} < M_{n-1}$	$b_{n-1} < b_{n-2}$
$Q_n \ge M_{n-1}$	$b_n < b_{n-1}$

Когда рассматривается более трех уровней цен, то схема расчетов такова:

1. Сначала определяется размер партии поставки для самой низкой цены. Если при этом оказывается $Q^* \ge M_{n-1}$, то данный размер партии поставки принимается равным в качестве оптимального.
2. Если вышеприведенное условие не выполняется, определяется величина Q для предыдущего диапазона цен и, соответственно, предыдущего диапазона размера

поставки $(M_{n-2} \le Q_{n-1} < M_{n-1})$. Рассчитываются и сопоставляются затраты TC_{n-1} и TC_n. Для определения затрат TC_n используется размер партии поставки на минимальном уровне для данного диапазона, т.е. $Q_n = M_{n-1}$, а для TC_{n-1} – полученная величина Q^*. Минимальная из двух величин: TC_{n-1} и TC_n определяет, какую партию поставки считать оптимальной.

3. Если величина Q оказывается в диапазоне $M_{n-3} \le Q_{n-2} < M_{n-2}$, то рассчитываются и сопоставляются затраты TC_{n-2}, TC_{n-1} и TC_n, как для случая с тремя уровнями цен.

Процедура повторяется, причем на каждом новом шаге (если он необходим) число сравниваемых показателей затрат возрастает на единицу. Данный процесс конечный, так как n конечно.

11.3.6. МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОЙ ПАРТИИ ПОСТАВКИ С УЧЕТОМ НЕХВАТКИ ИЗДЕЛИЙ

Иногда возникают ситуации, когда имеют место небольшие нехватки запасов. Такие нехватки происходят периодически, но не приводят к резкому ухудшению эффективности работы системы снабжения. Большие размеры нехватки запасов нежелательны, так как влекут за собой высокие затраты в виде штрафов, упущенных доходов, оттока клиентов в силу несвоевременности поставки продукции и т.д. Модель, которая будет рассмотрена, предполагает, тем не менее, что затраты, связанные с нехваткой материалов, невысоки и что клиенты могут немного подождать получения заказанных ими изделий. То есть будем предполагать, что нехватка изделий не отразится на общей годовой потребности в них.

Таким образом, мы изменяем предположение о недопустимости нехватки материалов. Будем считать, что затраты, связанные с этим, невысоки. Пусть g – стоимость нехватки единицы изделий в год.

В основной модели оптимальной партии поставки предполагалось, что $g = \infty$. Политика по поставке изделий была таковой, что запас пополнялся в момент, когда его уровень опускался до нуля. В новой ситуации необходимо определить «терпимый» уровень нехватки изделий в дополнение к определению величины оптимальной партии поставки. Цикл изменения уровня запаса и его пополнения представлен на рис. 11.11.

Итак, пусть

g – затраты, связанные с нехваткой материалов (на единицу в год);

V – уровень нехватки материалов в расчете на цикл;

Q – количество заказываемого материала.

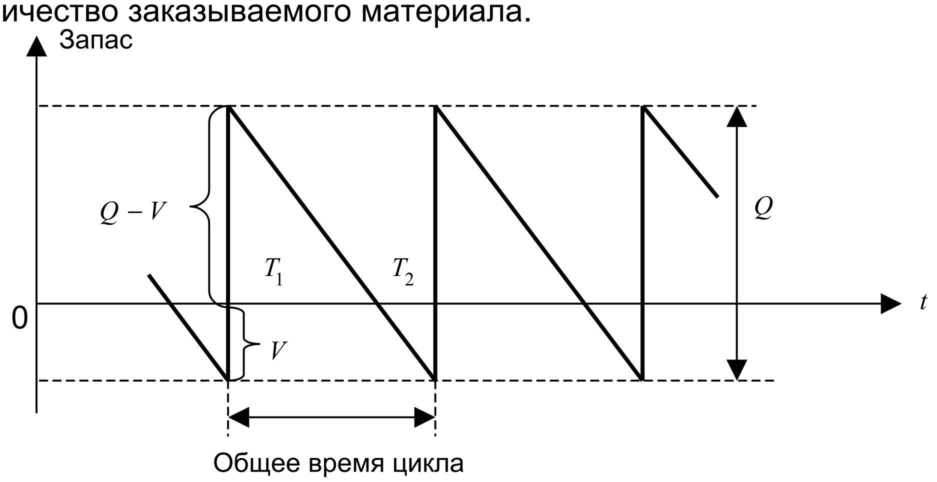


Рис. 11.11. Графическая иллюстрация модели управления запасами с учетом нехватки изделий

Периоды времени T_1 и T_2 будут рассматриваться как части года. В течение периода T_1 имеет место позитивный уровень запаса от $Q-V$ до нуля. Средний его уровень составляет $\frac{Q-V}{2}$. Стоимость хранения изделий в расчете на цикл составит

$$bc\frac{Q-V}{2}T_1.$$

Аналогично рассуждая, найдем затраты, связанные с нехваткой материала

$$g\frac{V}{2}T_2.$$

С учетом стоимости заказа C_S общие затраты из расчета на один цикл составят

$$C=bc\frac{Q-V}{2}T_1+\frac{gV}{2}T_2+C_S.$$

С учетом того, что $T_1+T_2=\frac{Q}{D}$, можно рассчитать T_1 и T_2

$$T_1=\frac{Q-V}{D};\quad T_2=\frac{V}{D}.$$

Подставляя данные выражения в формулу для C, получим

$$C=bc\frac{(Q-V)^2}{2D}+\frac{gV^2}{2D}+C_S.$$

Годовые затраты составят

$$C_{год.}=\left(bc\frac{(Q-V)^2}{2D}+\frac{gV^2}{2D}+C_S\right)\frac{D}{Q}$$

или

$$C_{год.}=bc\frac{(Q-V)^2}{2Q}+\frac{gV^2}{2Q}+C_S\frac{D}{Q}. \qquad (11.7)$$

Для нахождения значений Q и V необходимо вычислить первые производные от полученного выражения по Q и V, приравнять их к нулю и решить полученные уравнения относительно Q и V

$$\frac{dC_{год.}}{dQ}=\frac{bc}{2}\left[\frac{2Q(Q-V)-(Q-V)^2}{Q^2}\right]-\frac{gV^2}{2Q^2}-\frac{C_S D}{Q^2}=0,$$

$$\frac{dC_{год.}}{dV}=\frac{gV}{Q}-\frac{bc(Q-V)}{Q}=0,$$

$$Q^*=\sqrt{\frac{2C_S D}{bc}\cdot\frac{g+bc}{g}}, \qquad (11.8)$$

$$V^*=\sqrt{\frac{2C_S D}{g}\cdot\frac{bc}{g+bc}} \qquad (11.9)$$

Величина V^* может быть также рассчитана по формуле

$$V^*=\frac{bc}{g+bc}\cdot Q^*. \qquad (11.10)$$

Сравнивая полученные формулы с основной моделью оптимальной партии поставки

$$Q^*=\sqrt{\frac{2C_S D}{bc}},$$

$$V^*=0,$$

мы видим, что, если g будет расти, то V будет уменьшаться. Если $g=\infty$, то $V=0$. Таким образом, будем иметь основную модель.

Рассмотрим **пример.**

Пусть $D=50$,
$C_S=1$ *грн.*,
$b=5$ *грн.*,
$c=20\%$,
$g=3$ *грн.*

Необходимо рассчитать параметры системы управления запасами.

Решение.

Рассчитаем сначала оптимальные значения Q^* и V^*

$$Q^*=\sqrt{\frac{2\times1\times50}{1}\times\frac{3+1}{3}}=11.55\approx12 \text{ шт.},$$

$$V^{*} = \sqrt{\frac{2\times1\times50}{3}\times\frac{1}{3+1}} = 2.887 \approx 3 \text{ шт.}$$

С учетом этого найдем максимальный уровень хранимого запаса

$$Q^{*} - V^{*} = 12 - 3 = 9\,.$$

Найдем общее время цикла

$$T_1 + T_2 = \frac{Q^{*}}{D}\times 250 = \frac{12}{50}\times 250 = 60 \text{ дней.}$$

Зная общее время цикла, можно рассчитать период времени, в течение которого имеется запас

$$T_1 = \frac{Q^{*} - V^{*}}{D} = \frac{12-3}{50} = 0.18 \text{ года (или} 45 \text{ дней).}$$

Аналогично рассчитаем период времени, в течение которого запас отсутствует

$$T_2 = \frac{V^{*}}{D} = \frac{3}{50} = 0.06 \text{ года (или} 15 \text{ дней).}$$

Число заказов в течение года составляет

$$K = \frac{D}{Q^{*}} = \frac{50}{12} = 4.14\,.$$

Определим годовые затраты

1. Связанные с нехваткой запаса

$$\frac{gV^{2}}{2Q} = \frac{3\times3^{2}}{2\times12} = \frac{27}{24} = 1.13 \text{ грн.}$$

2. Связанные с хранением запаса

$$bc\frac{(Q-V)^{2}}{2Q} = 5\times0.2\times\frac{9^{2}}{24} = \frac{81}{24} = 3.38 \text{ грн.}$$

3. Связанные с оформлением заказа

$$C_S \frac{D}{Q} = 1 \times \frac{50}{12} = 4.47 \text{ грн.}$$

4. Общие затраты

$$C_{год.} = bc \frac{(Q-V)^2}{2} + \frac{gV^2}{2} + C_S \frac{D}{Q} = 1.13 + 3.38 + 4.47 = 8.68 \text{ грн.}$$

Если использовать базовую модель, то уровень запаса составит

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_S D}{bc}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 50}{5 \times 0.2}} = 10 \text{ шт.}$$

Затраты, связанные с оформлением заказа и хранением запаса, составляют:

$$TC = C_S \frac{D}{Q^*} + bc \frac{Q^*}{2} = 1 \times \frac{50}{10} + 5 \times 0.2 \times \frac{10}{2} = 10 \text{ грн.}$$

Таким образом, система управления запасами, допускающая дефицит материалов, обеспечивает годовые затраты меньшие, чем в случае, когда дефицит не допускается. Это связано с двумя моментами:

1. Со снижением числа заказов с 5 до 4.17 в течение года и снижением в связи с этим затрат на оформление заказов;
2. С хранением, в среднем, меньшего количества материала: 4.5 по сравнению с 5 единицами в течение цикла.

Тем не менее, несмотря на большую привлекательность системы с дефицитом, параметры ее будут приближаться к параметрам системы управления запасов без дефицита по мере увеличения затрат на «оплату» нехватки материала.