Глава 13. АНАЛИЗ ОБОЛОЧКИ ДАННЫХ (DATA ENVELOPMENT ANALYSIS)*

"Для оценки качества в мире существуют только два понятия: эффективность и неэффективность; и этому соответствуют только два типа людей: действующие эффективно и неэффективно".

Джордж Бернард Шоу
«Другой остров Джона Булла»

13.1. ВВОДНЫЙ ПРИМЕР

Прежде чем описать метод, рассмотрим следующий небольшой **пример** (основан на материале Дж.И.Бисли, Имперский колледж, Лондон).

Представим себе банк, у которого имеется 4 отделения. Для каждого из них в качестве единственного показателя результативности деятельности будем использовать количество совершенных персональных сделок за год, а в качестве единственного показателя затрат – количество банковских служащих. Соответствующие данные представлены в таблице

Отделение	*Количество сделок, тыс.*	*Количество служащих, чел.*
1	*125*	*18*
2	*44*	*16*
3	*80*	*17*
4	*23*	*11*

Так, второе отделение совершило за год 44000 сделок, имея штат 16 человек.

Как теперь, используя исходные данные, оценить эффективность работы отделений банка?

Решение.

Наиболее часто используемый прием – это расчет отношений (относительных показателей). В таких случаях мы делим показатель результативности на показатель затрат. Для краткости можно рассматривать затраты как «вход», а результативность как «выход», и измерять соответствующим образом деятельность каждого из отделений как превращения входа в выход.

На основе имеющихся данных рассчитаем показатели по каждому из отделений банка

Отделение	Число сделок на одного служащего, тыс.
1	6.94
2	2.75
3	4.71
4	2.09

* Материал подготовлен при содействии Йозефа Л.Хауншмида (Венский технический университет).

Данные таблицы ясно показывают, что первое отделение имеет наивысший показатель числа сделок на одного банковского служащего, а четвертое отделение – самый низкий.

Так как первое отделение характеризуется наивысшим отношением "вход–выход" (6.94), то мы можем сравнить с ним остальные отделения, рассчитав их относительную эффективность по отношению к первому отделению. Для этого разделим показатель числа совершенных сделок в расчете на одного служащего для каждого из отделений на 6.94, переведя затем полученные результаты в проценты. Получим таблицу

Отделение	Относительная эффективность, %
1	100(6.94/6.94)=100
2	100(2.75/6.94)=40
3	100(4.71/6.94)=68
4	100(2.09/6.94)=30

Итак, отделения 2–4 функционируют менее эффективно по сравнению с первым отделением: они производят при заданных ресурсах – входах (число служащих) меньший результат – выход (число сделок).

При необходимости с учетом полученной информации можно поставить цели перед отделениями, которые функционируют недостаточно эффективно, для улучшения их деятельности.

Например, для четвертого отделения может быть поставлена цель производить то же самое количество выхода (заключать то же количество сделок) при сокращенном на единицу показателе входа (число служащих отделения). В данном случае мы имеем дело с целью, ориентированной на вход.

В качестве примера цели, ориентированной на выход, можно дать задание четвертому отделению увеличить число совершаемых сделок на 10% при том же количестве персонала (т.е. привлечь новых вкладчиков).

В общем, могут быть установлены смешанные цели (ориентированные и на вход и на выход), которых планируется достичь.

Приведенный пример не является типичным, так как обычно мы имеем дело более чем с одним входом и одним выходом. Изменим его условия. Пусть мы теперь имеем дело с двумя выходами: количеством сделок, совершенных с частными лицами и с фирмами, при том же одном входе – количестве служащих, работающих в отделениях. Соответствующие данные приведены в таблице

Отделение	Количество сделок с частными клиентами, тыс.	Количество сделок с фирмами, тыс.	Количество служащих, чел.
1	125	50	18
2	44	20	16
3	80	55	17
4	23	12	11

Так, второе отделение за год осуществляет 44000 сделок с частными лицами и 20000 с фирмами, имея штат сотрудников 16 человек.

Как теперь могут быть сопоставлены отделения и измерена эффективность их деятельности с учетом имеющихся данных?

Как и прежде, воспользуемся отношением входа к выходу. В данном случае, учитывая, что имеется только один вход (количество служащих) и два выхода (число сделок с частными лицами и число сделок с фирмами), то мы будем иметь две колонки отношений – для частных лиц и фирм

Отделение	Число сделок с частными лицами на одного служащего, тыс.	Число сделок с фирмами на одного служащего, тыс.
1	6.94	2.78
2	2.75	1.25
3	4.71	3.24
4	2.09	1.09

В соответствии с полученными данными первое отделение является лидером по совершению сделок с частными лицами и вторым по сделкам с фирмами. Третье отделение, наоборот, имеет наивысшее отношение по сделкам с фирмами и второе – по сделкам с частными лицами. Второе и четвертое отделения не могут сравниться такими показателями с первым и третьим отделениями и, следовательно, они работают менее успешно. Таким образом, деятельность второго и четвертого отделений относительно менее эффективна в смысле использования входа – ресурсов (штат сотрудников) для производства выходов (числа сделок с частными лицами и фирмами).

Учитывая, что мы имеем дело с двумя различными видами отношений, дающими разные картины деятельности отделений, возникает проблема объединения данных наборов отношений в единый показатель, служащий для сравнения объектов.

Так, если сравнить второе и четвертое отделения, то мы будем иметь следующие показатели: по совершению сделок с частными лицами второе отделение работает в 1.32 раза эффективнее, чем четвертое (2.75/2.09=1.32), а по заключению сделок с фирмами – в 1.15 раза эффективнее (1.25/1.09=1.15). Можно ли объединить имеющуюся информацию в одну единственную меру?

Данная проблема усложняется по мере увеличения числа отделений, количества входов и/или выходов. Так, добавив к имеющимся четырем еще пять (А–Д) отделений с соответствующими отношениями, мы получим таблицу, анализ данных которой представляется весьма сложным и неопределенным.

Отделение	Число сделок с частными лицами на одного служащего, тыс.	Число сделок с фирмами на одного служащего, тыс.
1	6.94	2.78
2	2.75	1.25
3	4.71	3.24
4	2.09	1.09
А	1.23	2.92
Б	5.43	2.23
В	3.32	2.81
Г	3.70	2.68
Д	3.34	2.96

Для решения подобных проблем одним из подходящих средств является метод анализа оболочки данных.

13.2. ПРОИСХОЖДЕНИЕ МЕТОДА

Анализ оболочки данных (АОД) как новый метод оценки эффективности производства был предложен в конце семидесятых годов 20-го столетия. В настоящее время он стал одним из наиболее важных инструментов принятия решений и оценки эффективности деятельности различных производственных и непроизводственных подразделений и объектов в целом.

АОД используется в различных областях деятельности: при измерении экологической эффективности, при оценке эффективности больничного сервиса, на железнодорожном транспорте, в измерении технического прогресса, в банковской сфере, в фармакологии, при производстве автомобилей, в сравнительном анализе функционирования предприятий с высокими технологиями, в системе образования и т.д.*

В основе метода лежит идея Фаррелла относительно определения границы эффективности производства. В 1957 г. М. Дж.Фаррелл предложил подход к оценке технической эффективности для случая с одним входом и одним выходом [50].

АОД нашел признание в 1978 г. после публикации статьи А.Чарнса, У.Купера и Э.Родса «Измерение эффективности единиц принятия решений» в Европейском журнале по исследованию операций (модель носит название CCR по именам авторов) [47]. Дальнейшее развитие метода привело к созданию новых моделей, таких как мультипликативные (А.Чарнс и др., 1982, 1983 гг.), BCC (Р.Бэнкер, А.Чарнс, У.Купер, 1984 г.), аддитивные (А.Чарнс и др., 1985 г.) и т.д.

Все модели имеют отношение к проблемам экономики и менеджмента, и их реализация дает полезные результаты. Ориентация моделей различна. Так, они могут быть ориентированы на вход (ресурсы), выход (достигнутые результаты), на вход и выход одновременно. В них может учитываться возрастающая, убывающая или постоянная нормы отдачи на единицу мощности (*return to scales*), что имеет место в производстве, с обобщением на случай множества выходов. С помощью моделей определяется граница эффективности, которая может принять форму кусочно-линейной функции, кусочной линейно-логарифмической, кусочной функции Кобба-Дугласа с обобщением для ситуаций, когда имеют место множество входов и множество выходов в процессе производства. Модели допускают использование бесконечно малых (неархимедовых) величин, могут быть ориентированы на снижение уровня "входа" или увеличение уровня "выхода" для достижения эффективности.

Для реализации моделей применяется математическое программирование как метод получения оптимального результата. В АОД-методе каждый оцениваемый объект рассматривается как единица принятия решения (*Decision Making Unit – DMU*).

13.3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим n единиц принятия решений (ЕПР), которые должны быть оценены с точки зрения их эффективности. Каждая ЕПР потребляет разное количество m различных входов, чтобы произвести t различных выходов. Иначе j-я ЕПР потребляет количества $X_j = \{x_{ij}\}$ входов $(i = \overline{1,m})$ и производит количества $Y_j = \{y_{rj}\}$ выходов $(r = \overline{1,t})$. Данные величины получены путем наблюдений за реальными объектами. Для них мы предполагаем, что $x_{ij} > 0$ и

* Подробная библиография непосредственно по данной теме представлена отдельно в конце списка литературы.

$y_{rj} > 0$. *В этих терминах матрица выхода размерностью* $(t \times n)$ *определяется через* Y, *а матрица входа размерностью* $(m \times n)$ *определяется через* X. *Каждая j-я ЕПР, используемая для сравнения эффективности, потребляет те же самые входы и производит те же самые выходы, хотя и в различных количествах.*

Для заданного производственного множества (X *и* Y *) необходимо определить, какая ЕПР эффективно функционирует, а какая нет.*

Для иллюстрации проблемы рассмотрим ситуацию, в которой представлено семь единиц принятия решений, каждая из них характеризуется одним входом и одним выходом. Соответствующая информация представлена в табл. 13.1.

Таблица 13.1. Исходные данные для анализа

ЕПР	Количество входа	Количество выхода
1	2	2
2	3	5
3	6	7
4	9	8
5	5	3
6	4	1
7	10	7

Деятельность *ЕПР* представлена на точечном графике (рис.13.1).

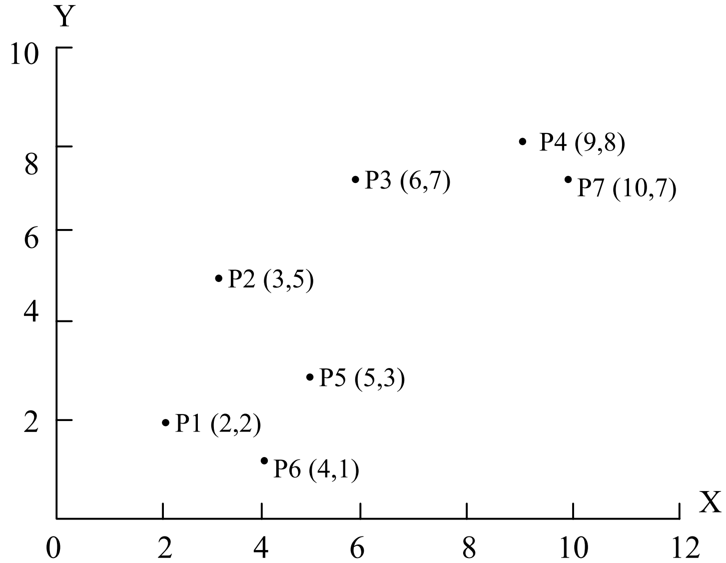

Рис.13.1. Точечный график, описывающий деятельность *ЕПР*

Модели АОД помогают найти подмножества из n *ЕПР*, которые определяют части поверхности оболочки (т.е. границу). Геометрическая форма каждой поверхности оболочки устанавливается типом используемой АОД-модели. Чтобы быть эффективной, точка P_j, соответствующая *j*-й *ЕПР*, должна лежать на поверхности. Единицы, которые не лежат на поверхности, считаются неэффективными, и с помощью АОД-метода определяются источники и степень данной неэффективности.

13.4. ПОСТУЛАТЫ

Прежде чем приступить к изучению конкретных моделей АОД, дадим определение и рассмотрим свойства «множества производственных возможностей».

Определение. **Множество производственных возможностей T** описывается следующим соотношением:

$$T = \{(X,Y) | Y \geq 0 \text{ может быть произведено из } X \geq 0\}.$$

Таким же способом определим множество возможных входов $L(X)$ для каждого X, как

$$L(X) = \{X | (X,Y) \in T\}$$

и возможных выходов $P(Y)$ для каждого Y, как

$$P(Y) = \{Y | (X,Y) \in T\}.$$

Свойства множества производственных возможностей T определяются четырьмя постулатами.

Постулат 1. Выпуклость

Если $(X_j, Y_j) \in T$, $j = \overline{1,n}$ и $\lambda_j \geq 0$ – неотрицательная скалярная величина, такая что $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, то

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \right) \in T.$$

Постулат 2. Неэффективность

a) если $(X,Y) \in T$ и $\overline{X} \geq X$, то $(\overline{X}, Y) \in T$.

b) если $(X,Y) \in T$ и $\overline{Y} \leq Y$, то $(X, \overline{Y}) \in T$.

Постулат 3. Неограниченность луча

Если $(X,Y) \in T$, то $(kX, kY) \in T$ для любого $k > 0$.

Постулат 4. Минимальная экстраполяция

Множество T есть пересечение всех множеств $\hat{T}$, удовлетворяющих постулатам 1, 2 и 3, и условию, что каждый рассматриваемый вектор $\left(X_j, Y_j\right) \in \hat{T},\ j = \overline{1,n}$.

Таким образом, T – наименьшее из множеств, согласующееся с имеющейся информацией и особенностями постулатов для множества производственных возможностей. Так как множество T основано на выпуклости и неограниченности луча, то оно – многогранное множество.

Теперь необходимо дать характеристику любого $\left(X, Y\right) \in T$. Постулаты 1 и 3 предполагают, что каждая пара $\left(X, Y\right)$ из выражения $\left(k\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j, k\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j\right)$ при $k > 0, \lambda_j \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$ принадлежит T.

Используя постулаты 2 и 4, можно сделать заключение, что $\left(X, Y\right) \in T$ тогда и только тогда, когда $X \geq k\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j$ и $Y \leq k\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j$, для некоторых $k > 0$ и некоторых $\lambda_j,\ j = \overline{1,n}$, удовлетворяющих условиям $\lambda_j \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$.

13.5. ФОРМЫ ОТНОШЕНИЙ АОД И ПОСТРОЕНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ

АОД использует меру эффективности Парето для каждой *ЕПР* для того чтобы определить, является ли она эффективной или нет. Рассмотрим несколько определений эффективности.

Определение 1. (Эффективность по Парето)

Вектор $\overline{X^*} = (X_1^*, \ldots, X_m^*)$ называется **эффективным по Парето** тогда, когда в рамках ограничений на допустимое производственное множество $\overline{P}$ не существует вектора $\overline{X} = (X_1, \ldots, X_m)$, который бы имел такую особенность, что, переходя от $\overline{X^*}$ к $\overline{X}$, значения функций полезности $U_1, U_2, \ldots, U_k$ не убывают и, по крайней мере, для одной из них возрастают.

С целью определения эффективности в подходе АОД принято рассчитывать специальное отношение. Могут быть рассмотрены различные формы отношений, в зависимости от ориентации модели.

Возьмем для каждого входа веса v_i $(i = \overline{1,m})$, а для каждого выхода – w_r $(r = \overline{1,t})$. Если модель ориентирована на вход (что означает, что целью анализируемых *ЕПР* является максимальное снижение уровня входа для того чтобы достичь эффективности при заданном уровне выхода), то форма отношения должна быть следующей:

$$\frac{\sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \quad \text{для всех } j = \overline{1,n}.$$

Числитель отношения может рассматриваться как «виртуальный выход», так как веса преобразуют t уровней выхода в единый скаляр. Аналогично, знаменатель отношения может рассматриваться как «виртуальный вход» и, таким образом, общее отношение сводится к скалярной мере эффективности.

Определение 2. (Парето-Купманс-Фаррелл)

Функционирование *ЕПР$_0$* считается полностью (100%) эффективным тогда и только тогда, когда функционирование остальных *ЕПР* не обеспечивает доказательства того, что некоторые входы или выходы *ЕПР$_0$* могли бы быть улучшены без ухудшения некоторых других ее входов и выходов.

Определение 3. (ТДТ-эффективность)

ЕПР$_0$ может считаться эффективной тогда и только тогда, когда она достигает значения единицы в отношении

$$\frac{\sum_{r=1}^{t} w_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}} = \max\left\{ \frac{\sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \,\middle|\, j = \overline{1,n} \right\}. \tag{13.1}$$

Иначе, значение отношения (13.1), которое меньше единицы, говорит о том, что функционирование остальных *ЕПР* доказывает относительную неэффективность *ЕПР$_0$*.

(ТДТ: Р.Г.Томпсон, П.С.Дармапала, Р.М.Тролл)

Определение 4. (Техническая эффективность)

ЕПР$_0$ является технически эффективной при использовании входов (ресурсов), если ни какая другая *ЕПР* или их линейная комбинация не производят такое же количество выходов с меньшим объемом хотя бы одного из входов (ресурсов).

Итак, эффективность любой *ЕПР* может быть измерена как максимальное отношение взвешенных выходов к взвешенным входам при ограничениях, отражающих деятельность остальных *ЕПР* (в противном случае отношение будет неограниченным).

АОД-метод использует в выражении (13.1) данные наблюдений за входами x_{ij} и выходами y_{rj} в качестве констант и подбирает значения весов входов и выходов таким образом, чтобы максимизировать общую эффективность 0–й *ЕПР* по отношению к деятельности остальных *ЕПР*.

Это приводит к формулировке целевой функции (здесь и далее единица принятия решений, для которой рассчитывается отношение, имеет индекс 0)

$$\max Z_0 = \frac{\sum_{r=1}^{t} w_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}}. \quad (13.2)$$

Принимая во внимание, что ни одна *ЕПР* не может иметь оценку относительной эффективности больше единицы, нам необходимо ввести ограничения типа «не больше, чем единица»

$$\frac{\sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1, \quad j = \overline{1,n}, \quad (13.3)$$

$$v_i, w_r > 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad r = \overline{1,t}. \quad (13.4)$$

Модель (13.2–13.4) рассматривается отдельно для каждой *ЕПР*, что обеспечивает получение n наборов оптимальных весов. Веса в целевой функции выбираются таким образом, чтобы максимизировать значение отношения для каждой конкретной *ЕПР* при ограничении типа «не больше, чем единица». Эти ограничения обеспечивают нахождение таких оптимальных весов для 0–й *ЕПР*, при которых оценка эффективности не превысит единицы ни для данной *ЕПР*, ни для какой-либо другой.

Оценка эффективности, получаемая с помощью модели (13.2–13.4), согласуется с предельными возможностями деятельности объекта. Величина ее, равная единице, подразумевает, что наблюдаемая и потенциальная деятельность объекта совпадают. В этом случае говорят, что соответствующая *ЕПР* является «наилучшей в деятельности». Там, где наблюдаемая деятельность хуже потенциальной, соответствующая *ЕПР* получает оценку эффективности меньше единицы. Это означает, что ее деятельность слабее той *ЕПР*, которой соответствуют наилучшие показатели и, следовательно, она относительно неэффективна.

Аналогично может быть рассмотрено и другое отношение, ориентированное на выход

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj}} \text{ для всех } j = \overline{1,n}.$$

В смысле ориентации на выход было бы резонно максимизировать количество выходов при заданных количествах входов (ресурсов). Это приводит к формулировке следующей цели:

$$\min F_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}}{\sum_{r=1}^{t} w_r y_{r0}}. \qquad (13.5)$$

Данная функция должна быть ограничена

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj}} \geq 1 \text{ для всех } j = \overline{1,n}, \qquad (13.6)$$

$$v_i, w_r > 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad r = \overline{1,t}. \qquad (13.7)$$

13.6. МОДЕЛИ АОД

13.6.1. МОДЕЛЬ CCR

Модели (13.2)–(13.4) и (13.5)–(13.7) не могут быть использованы в практических расчетах оценки эффективности, так как они имеют трудноразрешимые нелинейные и невыпуклые свойства. А.Чарнс, У.Купер и Э.Родс сделали их преобразования, превратив нелинейные модели в линейные. Так, линейная модель для 0–й *ЕПР* получается из модели (13.2)–(13.4) путем приравнивания знаменателя целевой функции модели к единице. Из этого следует формулировка:

$$\max Z_0 = \sum_{r=1}^{t} w_r y_{r0},$$

при ограничениях

$$\sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1,$$

$$v_i, w_r > 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad r = \overline{1,t}.$$

Рассмотренная модель линейная. Она ограничивает взвешенную сумму входов с помощью единицы и максимизирует взвешенную сумму выходов 0–й *ЕПР*, подбирая соответствующие значения v_i и w_r. Ограничения «не больше, чем единица» модели (13.2)–(13.4) включены в число ограничений модели (13.8)–(13.10) с тем, чтобы оценка эффективности *ЕПР₀* не могла превысить единицу. Следует отметить, что веса входов и выходов (v_i и w_r, соответственно) в модели строго положительны. Чтобы удовлетворить данным требованиям, ограничения $v_i, w_r > 0; \quad i = \overline{1,n}; \quad r = \overline{1,t}$ должны быть заменены следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} w_r &\geq \varepsilon,\ r = \overline{1,t} \\ v_i &\geq \varepsilon,\ i = \overline{1,m} \end{aligned}\right\},$$

где ε – бесконечно малая или неархимедова константа обычно порядка 10^{-5} или 10^{-6}. С учетом этого модель запишется следующим образом:

$$\max Z_0 = \sum_{r=1}^{t} w_r y_{r0}\ , \tag{13.8}$$

при ограничениях

$$\sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = \overline{1,n}\,, \tag{13.9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1, \tag{13.10}$$

$$\left.\begin{aligned} -w_r &\leq -\varepsilon,\ r = \overline{1,t} \\ -v_i &\leq -\varepsilon,\ i = \overline{1,m} \end{aligned}\right\}. \tag{13.11}$$

Аналогичной трансформации может быть подвергнута и модель (13.5)–(13.7)

$$\min F_0 = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}\ , \tag{13.12}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj} \geq 0, \quad j = \overline{1,n}\,, \tag{13.13}$$

$$\sum_{r=1}^{t} w_r y_{r0} = 1, \tag{13.14}$$

$$\left.\begin{aligned} w_r &\geq \varepsilon,\ r = \overline{1,t} \\ v_i &\geq \varepsilon,\ i = \overline{1,m} \end{aligned}\right\}. \tag{13.15}$$

Теперь вернемся к нашему примеру и рассмотрим, как рассчитывается эффективность каждой *ЕПР*.

Сначала мы должны выбрать переменные – веса для входов и выходов. Так как в нашем случае только один вход и один выход, то переменных будет только две

v – вес входа;

w – вес выхода.

Модели CCR, ориентированные на вход, представлены для двух единиц принятия решений – *ЕПР*$_1$ и *ЕПР*$_2$ (см. табл. 13.2). Для остальных *ЕПР* модели строятся аналогично.

Таблица 13.2. Формулировка моделей CCR, ориентированных на вход для *ЕПР*$_1$ и *ЕПР*$_2$

Модель для *ЕПР*$_1$	Модель для *ЕПР*$_2$
$\max Z_1 = 2w$	$\max Z_2 = 5w$
Ограничения	Ограничения
(1) $-2v + 2w \le 0$	(1) $-2v + 2w \le 0$
(2) $-3v + 5w \le 0$	(2) $-3v + 5w \le 0$
(3) $-6v + 7w \le 0$	(3) $-6v + 7w \le 0$
(4) $-9v + 8w \le 0$	(4) $-9v + 8w \le 0$
(5) $-5v + 3w \le 0$	(5) $-5v + 3w \le 0$
(6) $-4v + w \le 0$	(6) $-4v + w \le 0$
(7) $-10v + 7w \le 0$	(7) $-10v + 7w \le 0$
(8) $2v = 1$	(8) $3v = 1$
(9) $v \ge 0.0001$	(9) $v \ge 0.0001$
(10) $w \ge 0.0001$	(10) $w \ge 0.0001$

Каждая из моделей решается отдельно. Результаты расчетов представлены в табл. 13.3. Как видим, только одна *ЕПР* – *ЕПР*$_2$ эффективна. Она имеет оптимальное значение Z, равное единице. Остальные *ЕПР* имеют значения целевой функции меньше единицы.

Таблица 13.3. Результаты решения моделей CCR, ориентированных на вход

ЕПР	Z_j^*	v	w
1	3/5	1/2	3/10
2	**1**	**1/3**	**1/5**
3	7/10	1/6	1/10
4	8/15	1/9	1/15
5	9/25	1/5	3/25
6	3/20	1/4	3/20
7	21/50	1/10	3/50

Для модели CCR поверхность оболочки проходит через точку, имеющую координаты эффективной *ЕПР*$_2$ (см. рис. 13.2).

Рассмотрим интерпретацию поверхности оболочки и результатов вычислений. Возьмем точку $P_3(6,7)$. Значение целевой функции для данной точки равно 7/10. Это означает, для того чтобы достичь уровня выхода в размере 7 единиц *ЕПР*$_3$ должна потребить 7/10 количества входа, который она сейчас потребляет, т.е. реальное количество входа должно быть равно $6 \cdot \frac{7}{10} = 4\frac{1}{5}$. Аналогичная картина и с точкой $P_7(10,7)$. Все неэффективности показаны на графике пунктирной линией.

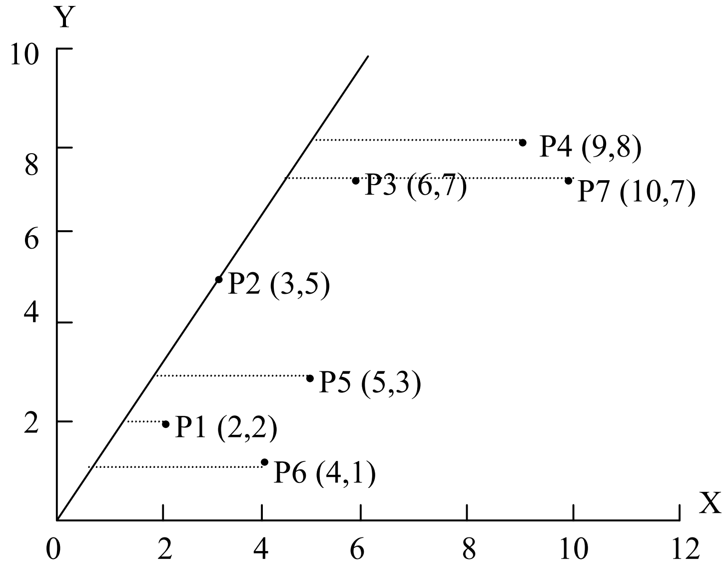

Рис.13.2. Поверхность оболочки для модели CCR, ориентированной на вход

Выводы по результатам расчетов данной модели могут быть сделаны следующие: *чтобы быть эффективной в смысле достигнутого выхода (результата деятельности) 0–я ЕПР должна потреблять вход в количестве* Z_j^*, *уменьшенный на реальный уровень потребления*

$x_{ij}^{efficient} = Z_j^* \cdot x_{ij}^{real}$.

Каждой модели линейного программирования может быть поставлена в соответствие двойственная модель. Для задачи CCR на максимум, ориентированной на вход, двойственная задача для 0–й *ЕПР* выглядит следующим образом:

$$\min D_0 = \theta_0 - \varepsilon\left(\sum_{r=1}^{t} s_r + \sum_{i=1}^{m} s_i\right), \tag{13.16}$$

при ограничениях

$$x_{i0}\theta_0 - s_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{13.17}$$

$$y_{r0} + s_r = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}, \quad r = \overline{1,t}, \tag{13.18}$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{13.19}$$

$$s_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{13.20}$$

$$s_r \geq 0, \quad r = \overline{1,t}, \tag{13.21}$$

$$\theta_0 - \text{ любая}, \tag{13.22}$$

где λ_j – вес *j*–й *ЕПР*;

s_i – свободная переменная для *i*–го входа;

s_r – свободная переменная для *r*–го выхода;

θ_0 – оценка отношения эффективности для входа по оцениваемой *ЕПР*.

Интерпретация двойственной задачи следующая*: j–я ЕПР является относительно эффективной тогда и только тогда, когда оценка отношения* θ_j^* *равна единице и свободные переменные равны нулю, т.е. тогда и только тогда, когда*

$$\theta_j^* = 1 \text{ при } s_i^* = s_r^* = 0, \text{ для всех } i \text{ и } r, \tag{13.23}$$

где символ звездочка (*) определяет оптимальные значения переменных в двойственной задаче.

Для полноты картины запишем двойственную задачу по отношению к модели CCR, ориентированной на выход

$$\max L_0 = h_0 + \varepsilon\left(\sum_{r=1}^{t} s_r + \sum_{i=1}^{m} s_i\right), \tag{13.24}$$

при ограничениях

$$y_{r0}h_0 + s_r = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}, \quad r = \overline{1,t}, \tag{13.25}$$

$$x_{i0} - s_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{13.26}$$

$$\lambda_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{13.27}$$

$$s_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{13.28}$$

$$s_r \ge 0, \quad r = \overline{1,t}, \tag{13.29}$$

$$h_0 - \text{ любая}, \tag{13.30}$$

где h_0 – оценка отношения эффективности выхода для оцениваемой *ЕПР*.

В дальнейшем каждая из моделей (13.16)–(13.22) и (13.24)–(13.30) будут рассматриваться как прямые к моделям (13.8)–(13.11) и (13.12)–(13.15), соответственно.

Подобно предыдущему случаю, *j–я ЕПР будет эффективной, когда оценка отношения эффективности* h_j^* *равна единице и все свободные переменные равны нулю, т.е. тогда и только тогда, когда*

$$h_j^* = 1 \text{ при } s_i^* = s_r^* = 0, \text{ для всех } i \text{ и } r. \tag{13.31}$$

Рассмотрим, как выглядит двойственная задача по отношению к основной, ориентированной на вход (для *ЕПР*$_1$)

$$min\, D_1 = \theta_1 - 0.0001 s_v - 0.0001 s_w .$$

Ограничения

$$(1)\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 6\lambda_3 - 9\lambda_4 - 5\lambda_5 - 4\lambda_6 - 10\lambda_7 + 2\theta_1 - s_v = 0,$$

$$(2)\quad 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 7\lambda_3 + 8\lambda_4 + 3\lambda_5 + \lambda_6 + 7\lambda_7 - s_w = 2,$$

$$(3)\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7 \geq 0,$$

$$(4)\quad s_v \geq 0,$$

$$(5)\quad s_w \geq 0,$$

$$(6)\quad \theta_1 - \text{любая.}$$

Модели для остальных *ЕПР* выглядят аналогично. Их реализация приносит следующие результаты (табл. 13.4):

Таблица 13.4. Результаты решения двойственных задач по отношению к основным CCR-задачам, ориентированным на вход

ЕПР	θ_j^*	s_v	s_w	λ_j
1	**3/5**	**0**	**0**	**λ_2=0.4**
2	**1**	**0**	**0**	**λ_2=1**
3	7/10	0	0	λ_2=1.4
4	**8/15**	**0**	**0**	**λ_2=1.6**
5	9/25	0	0	λ_2=0.6
6	3/20	0	0	λ_2=0.2
7	21/50	0	0	λ_2=1.4

Результаты расчетов показывают, что каждая *ЕПР* проецируется на эффективную лучевую поверхность, проходящую через точку $P_2(2,2)$. Все свободные переменные в полученном решении равны нулю.

Для завершения исследования модели АОД данного типа рассмотрим модели, ориентированные на выход (прямую и двойственную). Прямые модели для двух *ЕПР* (1 и 2) представлены в табл.13.5.

Таблица 13.5. Модели CCR, ориентированные на выход

Модель для *ЕПР₁*	Модель для *ЕПР₂*
$\max F_1 = 2v$	$\max F_2 = 3v$
Ограничения	Ограничения
(1) $2v - 2w \geq 0$	(1) $2v - 2w \geq 0$
(2) $3v - 5w \geq 0$	(2) $3v - 5w \geq 0$
(3) $6v - 7w \geq 0$	(3) $6v - 7w \geq 0$
(4) $9v - 8w \geq 0$	(4) $9v - 8w \geq 0$
(5) $5v - 3w \geq 0$	(5) $5v - 3w \geq 0$
(6) $4v - w \geq 0$	(6) $4v - w \geq 0$
(7) $10v - 7w \geq 0$	(7) $10v - 7w \geq 0$
(8) $2w = 1$	(8) $5w = 1$
(9) $v \geq 0.0001$	(9) $v \geq 0.0001$
(10) $w \geq 0.0001$	(10) $w \geq 0.0001$

Двойственная задача для *ЕПР*$_1$ представлена ниже

$$min\, \mathrm{D}_1 = \mathrm{h}_1 + 0.0001\mathrm{s}_\mathrm{v} + 0.0001\mathrm{s}_\mathrm{w}.$$

Ограничения

(1) $2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 + 9\lambda_4 + 5\lambda_5 + 4\lambda_6 + 10\lambda_7 + \mathrm{s}_\mathrm{v} = 2,$

(2) $-2\lambda_1 - 5\lambda_2 - 7\lambda_3 - 8\lambda_4 - 3\lambda_5 - \lambda_6 - 7\lambda_7 + 2\mathrm{h}_1 + \mathrm{s}_\mathrm{w} = 0,$

(3) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7 \geq 0,$

(4) $\mathrm{s}_\mathrm{v} \geq 0,$

(5) $\mathrm{s}_\mathrm{w} \geq 0,$

(6) $\mathrm{h}_1 -$ *любая.*

Результаты решения задач приведены в табл. 13.6.

Таблица 13.6. Результаты решения по моделям CCR, ориентированным на выход

ЕПР	Прямая задача			Двойственная задача			
	F_j^*	v	w	h_j^*	s_v	s_w	λ_j
1	5/3	1/2	5/6	5/3	0	0	λ_2=2/3
2	**1**	**1/5**	**1/3**	**1**	**0**	**0**	**λ_2=1**
3	10/7	1/7	5/21	10/7	0	0	λ_2=2
4	15/8	1/8	5/24	15/8	0	0	λ_2=3
5	25/9	1/3	5/9	25/9	0	0	λ_2=5/3
6	20/3	1	5/3	20/3	0	0	λ_2=4/3
7	50/21	1/7	5/21	50/21	0	0	λ_2=10/3

Как было уже ранее определено, только одна *ЕПР* эффективна – *ЕПР*$_2$. Она имеет оценку отношения эффективности h_2 и значение F_2, равные единице. Интерпретация результатов аналогична ранее приведенным для модели, ориентированной на вход.

В модели, ориентированной на выход, проекции на эффективную поверхность оболочки (см. рис. 13.3) сделаны в предположении о достижении наивысшей отдачи при заданных количествах ресурсов.

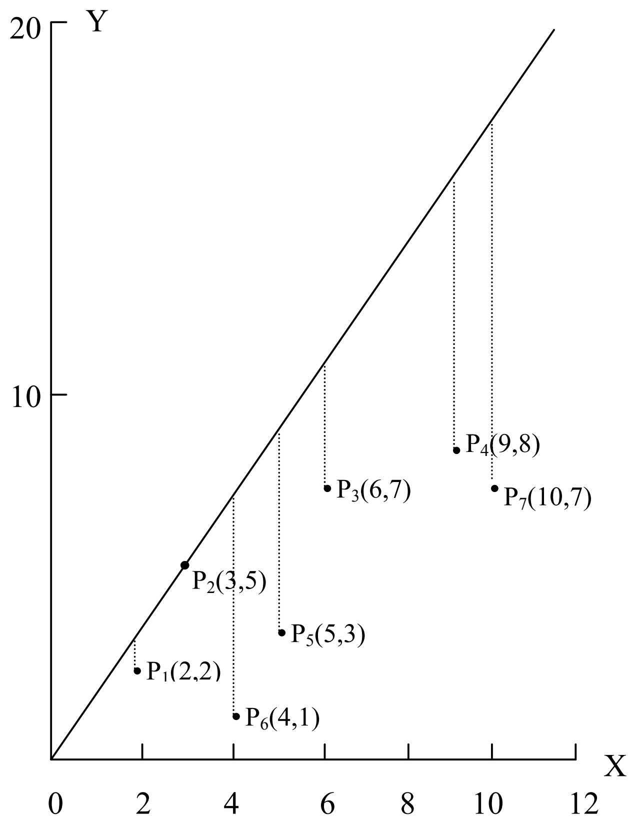

Рис.13.3. Проекции неэффективных *ЕПР* на поверхность оболочки

Интерпретация этих результатов примерно та же, что и у моделей CCR, ориентированных на вход. *Эффективная ЕПР при заданном уровне входа должна производить больше выхода, уровень которого рассчитывается следующим образом:*

$$y_{rj}^{efficient} = Z_j^* \cdot y_{rj}^{real}$$

Модель CCR использует границу с постоянным уровнем отдачи ("вход–выход") для определения неэффективных единиц принятия решений. С помощью модели выбирается та *ЕПР*, которая обеспечивает максимальное отношение выхода к входу. Данное отношение интерпретируется как *максимальная средняя производительность* и определяет отдачу эффективно работающей *ЕПР*.

Если мы вернемся к рис. 13.2, то увидим, что *ЕПР*$_2$ (точка P_2 находится на границе эффективности) максимизирует среднюю производительность. Луч, проведенный из точки пересечения осей координат к любой из оставшихся *ЕПР* (точки P_1, $P_3 - P_7$), будет иметь наклон более пологий и не будет максимизировать среднюю производительность, т.е. $(Y_2/X_2) > (Y_j/X_j)$, $j \neq 2$. Граница с постоянным уровнем отдачи является неограниченным лучом, начинающимся в точке пересечения осей координат и проходящим через точку с максимальной средней производительностью у *ЕПР₂* (P_2).

Для лучшего понимания данного положения рассмотрим решение двойственной задачи (табл. 13.4). Для *ЕПР₂* мы имеем

$$\theta_2^* = 1.$$

Ограничения "вход-выход" имеют вид

$$X_2 \times \theta_2^* = X_2 \times \lambda_2^*$$

и $Y_2 = Y_2 \times \lambda_2^*$,
где $\lambda_2^* = 1$ и $\lambda_j^* = 0, j \neq 2$.

Так как *ЕПР₂* максимизирует среднюю производительность, то она эффективна для данного типа отдачи на масштаб – постоянного (*constant return to scales* – *CRS*), и имеет весовую оценку в ограничениях, равную единице ($\lambda_2^* = 1$). Остальные *ЕПР* имеют более низкие отношения эффективности. Для этих *ЕПР* отношения рассчитаны относительно продления вектора, характеризующего деятельность *ЕПР₂*, с использованием постулата 3 о неограниченности луча. Так как *ЕПР₂* эффективна для данного типа отдачи, луч имеет такую же интерпретацию – постоянного уровня отдачи. С вычислительной точки зрения он построен путем варьирования весов у эффективной с точки зрения отдачи *ЕПР* (в правых частях ограничений) при решении двойственной задачи.

Решения для неэффективных *ЕПР* рассматриваются сквозь призму показателей, рассчитанных для эффективно работающей *ЕПР₂*. В частности, рассмотрим двойственное решение для *ЕПР₄*, у которой значения входа и выхода выше, чем у *ЕПР₂* (см. табл. 13.4). Итак, имеем значение оценки отношения эффективности

$$\theta_4^* = 8/15 < 1.$$

Ограничения для входа и выхода выглядят так:

$$X_4 \times \theta_4^* = X_2 \times \lambda_2^*,$$
$$9 \times 8/15 = 3 \times 1.6,$$
$$Y_4 = Y_2 \times \lambda_2^*,$$
$$8 = 5 \times 1.6,$$

где $\lambda_2^* > 1$ и $\lambda_j^* = 0$ для $j \neq 2$. Это означает, что целевой вектор для *ЕПР₄* $(X_2 \times \lambda_2^*, Y_2 \times \lambda_2^*)$, при $\lambda_2^* = 1.6$ переориентирован на деятельность эффективной *ЕПР* с помощью показателя λ_2^*.

Рассмотрим решение двойственной задачи для *ЕПР*$_1$, которая имеет более низкие значения входа и выхода, чем эффективно работающая *ЕПР*$_2$. Для *ЕПР*$_1$

$$\theta_1^* = 3/5 < 1.$$

Ограничения по входу и выходу выглядят так:

$$X_1 \times \theta_1^* = X_2 \times \lambda_2^*,$$
$$2 \times 3/5 = 3 \times 0.4,$$
$$Y_1 = Y_2 \times \lambda_2^*,$$
$$2 = 5 \times 0.4,$$

где $\lambda_2^* < 1$ и $\lambda_j^* = 0$ для $j \neq 2$.

Целевой вектор для *ЕПР*$_1$ в ограничениях снова переориентирован на деятельность эффективной *ЕПР* – *ЕПР*$_2$.

Из этих примеров становится очевидным, что, варьируя значения весов эффективно (по отдаче) работающей *ЕПР* (единиц), т.е. варьируя λ_2^*, можно построить границу, согласующуюся с постоянным уровнем отдачи. Заметим, что в точке пересечения осей координат $\lambda_2^* = 0$, а для наиболее высоких уровней входов и выходов $\lambda_2^* \to \infty$.