

13.6.2. Модель ВСС

При построении данной модели не учитывается постулат 3 о неограниченности луча, что позволяет принять во внимание возможность изменения уровня отдачи на масштаб в случае наращивания производственного потенциала исследуемого объекта. Такой подход обеспечивает построение эффективной производственной поверхности с переменным уровнем отдачи (*variable return to scales* – *VRS*), который имеет место на различных сегментах производственной поверхности. Для этих целей в модель добавляется ограничение $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, что немедленно исключает возможность построения неограниченного луча с постоянным уровнем отдачи.

Пример поверхностей с различными уровнями отдачи приведен на рис. 13.4. Так как допустимыми являются возрастающая и снижающаяся отдачи, то граница может включать неэффективные с позиции постоянной отдачи точки, такие как *B* (*ЕПР* с возрастающей отдачей) или *D* и *E* (*ЕПР* со снижающимся уровнем отдачи), которые, тем не менее, соответствуют технически эффективным для данного уровня функционирования (уровня мощности) *ЕПР*. Как результат, – мы имеем кусочно-линейную границу *ABCDE*.

Уровень отдачи изменяется от отрезка поверхности к отрезку, каждый из которых представляет решение ограничений двойственной задачи. Для комбинаций значений входа и выхода, меньших, чем у эффективной *ЕПР* (т.е. вдоль отрезка *BC*), имеет место возрастающий уровень отдачи. Отрезки, отражающие более высокие уровни производства, имеют снижающийся уровень отдачи. Эффективная с точки зрения отдачи *ЕПР_С* включена как в число эффективных с точки зрения постоянного (*CRS*), так и переменного (*VRS*) уровней отдачи. На самом деле она представлена точкой на пересечении границ с возрастающим и снижающимся уровнями.

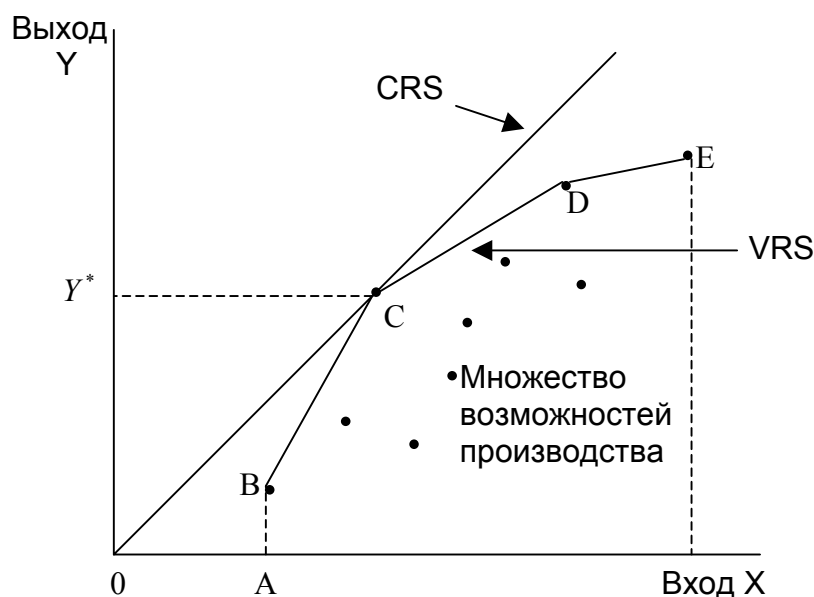


Рис.13.4. Различные типы уровней отдачи

Из объяснения результатов расчетов модели CCR (см. § 13.5.1) мы нашли, что точка P_1 , которая лежит ниже эффективной точки P_2 , имеет рассчитанное значение $\lambda_2^* < 1$, точка P_4 , лежащая выше эффективной точки P_2 , имеет рассчитанное значение $\lambda_2^* > 1$, а эффективная точка P_2 имеет значение $\lambda_2^* = 1$.

Модель ВСС, минимизирующая вход и допускающая локально возрастающий, постоянный и снижающийся уровни отдачи, выглядит следующим образом:

$$\min D_0 = \theta_0 - \varepsilon \left(\sum_{r=1}^t s_r + \sum_{i=1}^m s_i \right), \quad (13.32)$$

при ограничениях:

$$x_{io} \theta_0 - s_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (13.33)$$

$$y_{r0} + s_r = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}, \quad r = \overline{1, t}, \quad (13.34)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad (13.35)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (13.36)$$

$$s_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (13.37)$$

$$s_r \geq 0, \quad r = \overline{1, t}, \quad (13.38)$$

$$\theta_0 - \text{любая}. \quad (13.39)$$

Данная модель идентична модели (13.16)–(13.22) с тем лишь дополнением, что в нее включено ограничение (13.35) на сумму весов *ЕПР*. Оно дает гарантию, что эффективная граница будет представлена выпуклой линейной комбинацией наиболее хорошо работающих *ЕПР*, где доминирование эффективных *ЕПР* определено слабее с целью учета областей с возрастающей и убывающей отдачами. На самом деле выпуклая линейная комбинация наблюдаемых входов и выходов является допустимым производственным планом.

Условия эффективности *ЕПР*

1. $\theta^* = 1$,
2. $s_j, s_r = 0$.

Свободные переменные, отличные от нуля, а также значение $\theta^* \leq 1$ определяют источники и размеры любых видов неэффективности, которые могут иметь место.

Для нашего примера формулировка модели ВСС (для $ЕПР_1$) выглядит следующим образом:

$$\min D_1 = \theta_1 - 0.0001s_v - 0.0001s_w.$$

Ограничения

- (1) $-2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 6\lambda_3 - 9\lambda_4 - 5\lambda_5 - 4\lambda_6 - 10\lambda_7 + 2\theta_1 - s_v = 0,$
- (2) $2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 7\lambda_3 + 8\lambda_4 + 3\lambda_5 + \lambda_6 + 7\lambda_7 - s_w = 2,$
- (3) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 = 1,$
- (4) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7 \geq 0,$
- (5) $s_v \geq 0,$
- (6) $s_w \geq 0,$
- (7) $\theta_1 - \text{любая}.$

Реализация моделей для семи *ЕПР* представлена в табл. 13.7.

Таблица 13.7. Результаты решения моделей ВСС, ориентированных на вход

<i>ЕПР</i>	θ^*	s_v	s_w	λ
1	1	0	0	$\lambda_1=1$
2	1	0	0	$\lambda_2=1$
3	1	0	0	$\lambda_3=1$
4	1	0	0	$\lambda_4=1$
5	7/15	0	0	$\lambda_1=2/3, \lambda_2=1/3$
6	1/2	0	0	$\lambda_1=1$
7	3/5	0	0	$\lambda_3=1$

Рис. 13.5 иллюстрирует ситуацию с данным примером. При ориентации на вход целью является производство желаемого выхода с минимальным уровнем ресурсов.

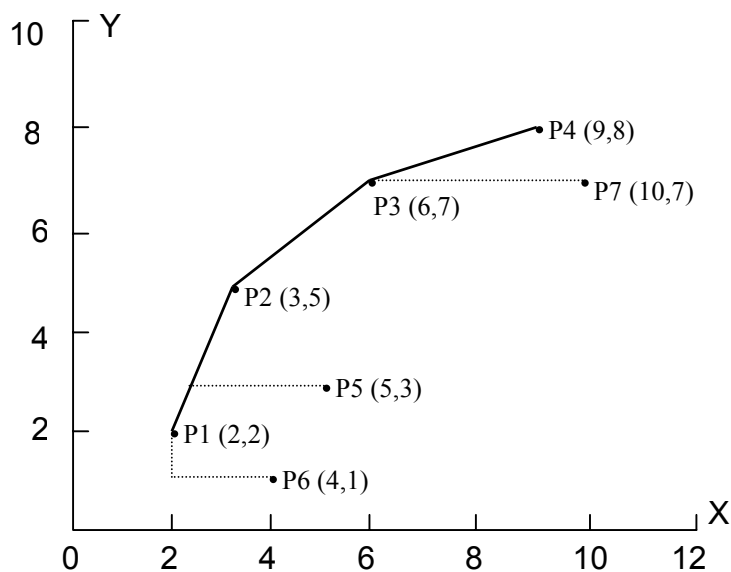


Рис.13.5. Поверхность оболочки для модели ВСС, ориентированной на вход

Из табл. 13.7 видно, что для $ЕПР_5$ максимальное значение θ^* равно $7/15$, а вектор $\lambda^* = (2/3, 1/3, 0, 0, 0, 0)$. Таким образом, вышеупомянутое условие (1) не выполняется. Снижение входа до уровня $\frac{7}{15} \cdot X_5 = \frac{7}{15} \cdot 5 = 7/3$ при всех свободных переменных, равных нулю, проецирует $ЕПР_5$ на точку $(\hat{X}_5, \hat{Y}_5) = (2\frac{1}{3}, 3) = (X\lambda^*, Y\lambda^*)$. Значения λ^* определяют поверхность (линейную комбинацию точек), на которую точка, соответствующая неэффективной $ЕПР$, должна быть спроецирована. Кусочно-линейную эффективную поверхность определяют $ЕПР$ с 1 по 4 (для них выполняются условия эффективности).

Двойственная ВСС модель по отношению к прямой задаче (13.32)–(13.39) формулируется следующим образом:

$$\max Z_0 = \sum_{r=1}^t w_r y_{r0} + u_0, \quad (13.40)$$

при ограничениях

$$\sum_{r=1}^t w_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u_0 \leq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (13.41)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1, \quad (13.42)$$

$$\left. \begin{aligned} -w_r &\leq -\varepsilon, \quad r = \overline{1, t} \\ -v_i &\leq -\varepsilon, \quad i = \overline{1, m} \end{aligned} \right\}, \quad (13.43)$$

$$u_0 - \text{любая}, \quad (13.44)$$

где переменная u_0 соотносится с ограничением $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ в основной задаче.

Для иллюстрации этой модели вернемся к примеру. Соответствующие модели для $ЕПР_1$ и $ЕПР_2$ приведены в табл. 13.8. Для остальных $ЕПР$ модели выглядят аналогично.

Таблица 13.8. Формулировка моделей ВСС для $ЕПР_1$ и $ЕПР_2$

Модель для $ЕПР_1$	Модель для $ЕПР_2$
$\max Z_1 = 2w + u_1$	$\max Z_2 = 5w + u_2$
Ограничения	Ограничения
(1) $-2v + 2w + u_1 \leq 0$	(1) $-2v + 2w + u_2 \leq 0$
(2) $-3v + 5w + u_1 \leq 0$	(2) $-3v + 5w + u_2 \leq 0$
(3) $-6v + 7w + u_1 \leq 0$	(3) $-6v + 7w + u_2 \leq 0$
(4) $-9v + 8w + u_1 \leq 0$	(4) $-9v + 8w + u_2 \leq 0$
(5) $-5v + 3w + u_1 \leq 0$	(5) $-5v + 3w + u_2 \leq 0$
(6) $-4v + w + u_1 \leq 0$	(6) $-4v + w + u_2 \leq 0$
(7) $-10v + 7w + u_1 \leq 0$	(7) $-10v + 7w + u_2 \leq 0$
(8) $2v = 1$	(8) $3v = 1$
(9) $v \geq 0.0001$	(9) $v \geq 0.0001$
(10) $w \geq 0.0001$	(10) $w \geq 0.0001$
(11) u_1 – любая	(11) u_2 – любая

Результаты расчетов приведены в табл. 13.9. Они отражают те же заключения, что и для основной задачи: только $ЕПР$ 1–4 эффективны, а $ЕПР$ 5–7 неэффективны.

Таблица 13.9. Результаты расчетов двойственных моделей ВСС, ориентированных на вход

$ЕПР$	Z_j^*	v	w	u_j
1	1	1/2	ε	$1 - \varepsilon$
2	1	1/3	1/9	4/9
3	1	1/6	1/4	-3/4
4	1	1/9	1/3	-5/3
5	7/15	1/5	1/15	4/15
6	$\frac{1}{2} - \varepsilon$	1/4	ε	$\frac{1}{2} - 2\varepsilon$
7	3/5	1/10	3/20	-9/20

Рассмотрим модели ВСС, ориентированные на выход: прямую и двойственную. В ориентации на выход акцент смещается с минимизации входящих ресурсов на другую цель – максимизацию выхода при непревышении заданного уровня ресурсов.

Прямая задача выглядит следующим образом:

$$\max L_0 = h_0 + \varepsilon \left(\sum_{r=1}^t s_r + \sum_{i=1}^m s_i \right), \quad (13.45)$$

при ограничениях

$$y_{r0}h_0 + s_r = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}, \quad r = \overline{1, t}, \quad (13.46)$$

$$x_{i0} - s_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (13.47)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad (13.48)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (13.49)$$

$$s_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (13.50)$$

$$s_r \geq 0, \quad r = \overline{1, t}, \quad (13.51)$$

$$h_0 - \text{любая}. \quad (13.52)$$

Интерпретация данной модели аналогична модели, ориентированной на вход, с одним лишь отличием, что с помощью модели, ориентированной на выход, осуществляется попытка через переменную h^* достичь такого (как можно большего) увеличения значения выхода Y_0 , какого позволяют ограничения.

Двойственная модель выглядит следующим образом:

$$\min F_0 = \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + g_0, \quad (13.53)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^t w_r y_{rj} + g_0 \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (13.54)$$

$$\sum_{r=1}^t w_r y_{r0} = 1, \quad (13.55)$$

$$\left. \begin{aligned} w_r &\geq \varepsilon, \quad r = \overline{1, t} \\ v_i &\geq \varepsilon, \quad i = \overline{1, m} \end{aligned} \right\}, \quad (13.56)$$

$$g_0 - \text{любая}. \quad (13.57)$$

Двойственная модель представляет собой мультипликативную форму, в то время как прямая относится к форме оболочки. В двойственной задаче цель – найти опорную гиперплоскость (то есть гиперплоскость, которая лежит на всех *ЕПР* или выше), минимизирующую вертикальное расстояние от нее до анализируемой *ЕПР*. В этой интерпретации переменная g_0 играет роль пересечения с осью Y .

Ниже приведены примеры модели ВСС для *ЕПР*₁. Для остальных единиц принятия решений модели выглядят аналогично. Результаты расчетов представлены в табл. 13.10. Эффективная поверхность оболочки изображена на рис. 13.6.

Прямая модель

$$\min D_1 = h_1 + 0.0001s_v + 0.0001s_w.$$

Ограничения

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 + 9\lambda_4 + 5\lambda_5 + 4\lambda_6 + 10\lambda_7 + s_v &= 2, \\ -2\lambda_1 - 5\lambda_2 - 7\lambda_3 - 8\lambda_4 - 3\lambda_5 - \lambda_6 - 7\lambda_7 + 2h_1 + s_w &= 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 &= 1, \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7 &\geq 0, \\ s_v &\geq 0, \\ s_w &\geq 0, \\ h_1 &\text{ — любая.} \end{aligned}$$

Двойственная модель

$$\max F_1 = 2v + g_0.$$

Ограничения

$$\begin{aligned} 2v - 2w + g_0 &\geq 0, \\ 3v - 5w + g_0 &\geq 0, \\ 6v - 7w + g_0 &\geq 0, \\ 9v - 8w + g_0 &\geq 0, \\ 5v - 3w + g_0 &\geq 0, \\ 4v - w + g_0 &\geq 0, \\ 10v - 7w + g_0 &\geq 0, \\ 2w &= 1, \\ v &\geq 0.0001, \\ w &\geq 0.0001, \\ g_0 &\text{ — любая.} \end{aligned}$$

Таблица 13.10. Результаты решения моделей ВСС, ориентированных на выход

ЕПР	Прямая модель				Двойственная модель			
	h_j^*	s_v	s_w	λ_j	F_j^*	v	w	g_0
1	1	0	0	$\lambda_1 = 1$	1	1/2	3/2	-2
2	1	0	0	$\lambda_2 = 1$	1	1/5	1/5	3/5
3	1	0	0	$\lambda_3 = 1$	1	1/7	2/21	3/7
4	1	0	0	$\lambda_4 = 1$	1	1/8	1/24	5/8
5	19/9	0	0	$\lambda_2 = 1/3, \lambda_3 = 2/3$	19/9	1/3	2/9	1
6	17/3	0	0	$\lambda_2 = 2/3, \lambda_3 = 1/3$	17/3	1	2/3	3
7	8/7	0	1	$\lambda_4 = 1$	$\frac{8}{7} + \varepsilon$	1/7	ε	$\frac{8}{7} - 9\varepsilon$

Информация из табл. 13.10 позволяет сделать заключение, что самая близкая опорная гиперплоскость для $ЕПР_5$ имеет уравнение $\frac{1}{3} \cdot Y - \frac{2}{9} \cdot X = 1$, которое формирует отрезок поверхности, объединяя $ЕПР_2$ и $ЕПР_3$. Значение целевой функции равно $F_5^* = 19/9$. Эта величина показывает, во сколько раз может быть увеличен уровень выхода, чтобы $ЕПР_5$ стала считаться эффективной (то есть при уровне входа, равном 5, уровень выхода должен составить $\frac{19}{9} \cdot 3 = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$). Как показано на рис. 13.6, $ЕПР_5$ проецируется на точку $(5, 6\frac{1}{3})$.

Следует иметь в виду, что пропорциональное увеличение выхода само по себе может быть недостаточным для достижения эффективности. Дополнительное продвижение к поверхности оболочки может быть достигнуто за счет положительных значений свободных переменных входа и/или выхода.

Так, для $ЕПР_7$ проецирование в "эффективную" точку $(X_7, Y_7) \rightarrow (\hat{X}_7, \hat{Y}_7) = (X_7 - s_v^*, g^* Y_7 + s_w^*) = (9, 8)$ требует одновременно и увеличения доли выхода (в $g^* = 8/7$ раза), и использования свободной переменной $s_v^* = 1$.

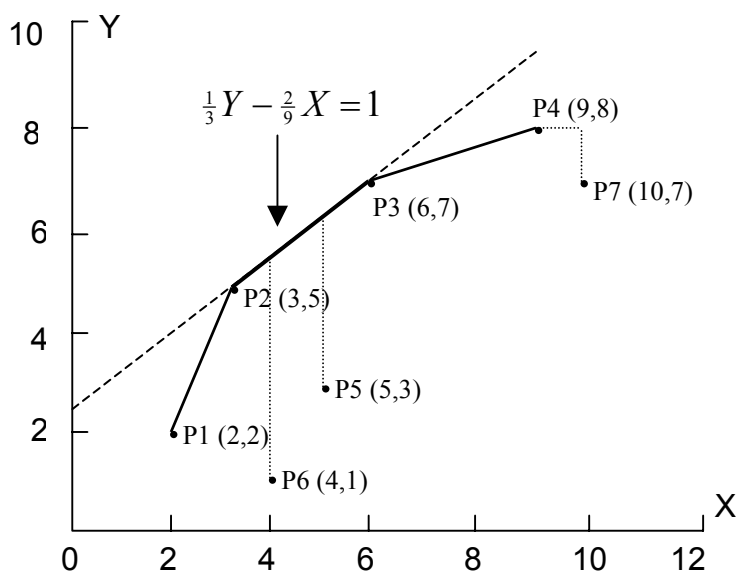


Рис.13.6. Поверхность оболочки для модели ВСС, ориентированной на выход

На обоих рисунках, 13.5 и 13.6, поверхности оболочки при ориентации на вход и выход одинаковы, однако неэффективные $ЕПР$ проецируются на различные точки поверхности оболочки. Например, при ориентации на вход $ЕПР_5$ проецировалась в точку $(2\frac{1}{3}, 3)$, в то время как при ориентации на выход – в точку $(5, 6\frac{1}{3})$.

Данный пример отражает акцент на ориентацию модели, т.е. либо делается упор на снижение входа, либо на увеличение выхода. Характеристики эффективности, тем не менее, те же самые: достижение значения целевой функции, равного единице при нулевых значениях свободных переменных.

В общем, $ЕПР$ считается эффективной при ориентации на выход тогда и только тогда, если она считается эффективной и при ориентации на вход при тех же самых исходных данных.

13.6.3. Аддитивная модель

Аддитивная модель предложена А.Чарнсом, У.Купером, Б.Голани, Л.Сейфордом и Дж.Стуцем в 1985 г. [45]. По сравнению с моделью ВСС в аддитивной модели отсутствуют оценки входа (θ) и выхода (h) и нет конкретной ориентации (на вход или выход). Она ориентирована и на вход, и на выход одновременно. Принимая во внимание, что аддитивная модель содержит ограничение выпуклости $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ как составную часть, она оперирует той же формой эффективной поверхности оболочки, что и модель ВСС с различными типами отдачи. Обе формулировки модели (прямой и двойственной) представлены в табл. 13.11.

Таблица 13.11. Формулировки прямой и двойственной аддитивных моделей

Прямая модель	Двойственная модель
$\min D_0 = -\varepsilon \left(\sum_{r=1}^t s_r + \sum_{i=1}^m s_i \right) \quad (13.58)$	$\max Z_0 = \sum_{r=1}^t w_r y_{r0} - \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + u_0 \quad (13.65)$
Ограничения	Ограничения
$-\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i = -x_{i0}, \quad i = \overline{1, m} \quad (13.59)$	$\sum_{r=1}^t w_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u_0 \leq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (13.66)$
$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r = y_{r0}, \quad r = \overline{1, t} \quad (13.60)$	$\left. \begin{aligned} -w_r &\leq -\varepsilon, \quad r = \overline{1, t} \\ -v_i &\leq -\varepsilon, \quad i = \overline{1, m} \end{aligned} \right\} \quad (13.67)$
$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (13.61)$	$u_0 - \text{любая} \quad (13.68)$
$\lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (13.62)$	
$s_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (13.63)$	
$s_r \geq 0, \quad r = \overline{1, t} \quad (13.64)$	

ЕПР считается эффективной тогда и только тогда, когда она имеет нулевое значение целевой функции, т.е. $D_0 = Z_0 = 0$. ЕПР считается неэффективной, если точка, характеризующая ее, не лежит на границе. Это означает, что любая из компонент свободных переменных является ненулевой. Значения ненулевых компонент и их количество определяют источники неэффективности, соответственно, выхода и входа. Общая неэффективность рассматривается как сумма значений свободных переменных.

Прямая и двойственная аддитивные задачи для $ЕПР_1$ представлены в табл. 13.12. Модели для остальных $ЕПР$ выглядят так же с той лишь разницей, что они используют определенные количества входов и выходов для конкретной $ЕПР_j$. Значения целевых функций, полученные в результате решения, делят множество $ЕПР$ на два подмножества: $ЕПР$, для которых $Z_0 = 0$ (они определяют поверхность оболочки), и $ЕПР$ с $Z_0 < 0$ (являются неэффективными и лежат ниже поверхности).

Таблица 13.12. Формулировки прямой и двойственной аддитивных моделей для $ЕПР_1$

Прямая модель	Двойственная модель
$\min D_1 = -0.0001s_v - 0.0001s_w$ Ограничения (1) $-2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 6\lambda_3 - 9\lambda_4 - 5\lambda_5 - 4\lambda_6 - 10\lambda_7 - s_v = -2$ (2) $2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 7\lambda_3 + 8\lambda_4 + 3\lambda_5 + \lambda_6 + 7\lambda_7 - s_w = 2$ (3) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 = 1$ (4) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7 \geq 0$ (5) $s_v \geq 0$ (6) $s_w \geq 0$	$\max Z_1 = 2w - 2v + u_1$ Ограничения (1) $-2v + 2w + u_1 \leq 0$ (2) $-3v + 5w + u_1 \leq 0$ (3) $-6v + 7w + u_1 \leq 0$ (4) $-9v + 8w + u_1 \leq 0$ (5) $-5v + 3w + u_1 \leq 0$ (6) $-4v + w + u_1 \leq 0$ (7) $-10v + 7w + u_1 \leq 0$ (8) $v \geq 0.0001$ (9) $w \geq 0.0001$ (10) u_1 – любая

В табл. 13.13 даны оптимальные решения для вышеприведенных моделей. Эти результаты отражены на графике поверхности оболочки для аддитивной модели (рис. 13.7).

Таблица 13.13. Результаты решения аддитивной модели

ЕПР	Прямая модель				Двойственная модель			
	D_j^*	s_v	s_w	λ_j	Z_j^*	v	w	u_0
1	0	0	0	$\lambda_1 = 1$	0	1	3	4
2	0	0	0	$\lambda_2 = 1$	0	1	1	-2
3	0	0	0	$\lambda_3 = 1$	0	3/2	1	-9/2
4	0	0	0	$\lambda_4 = 1$	0	3	1	-15
5	-4	2	2	$\lambda_2 = 1$	-4	1	1	-2
6	-5	4	1	$\lambda_2 = 1$	-5	1	1	-2
	-4	0	4	$\lambda_3 = 1$	-4	3/2	1	-9/2

$ЕПР_1$, $ЕПР_2$, $ЕПР_3$ и $ЕПР_4$ имеют нулевые значения целевой функции, следовательно, они эффективны и определяют кусочно-линейную поверхность оболочки, состоящую из трех отрезков. $ЕПР_5$, $ЕПР_6$ и $ЕПР_7$ неэффективны со значениями целевых функций $Z_5^* = -4$, $Z_6^* = -5$, и $Z_7^* = -4$ и лежат ниже поверхности оболочки.

С каждой неэффективной точкой (X_j, Y_j) ассоциируется оптимальная точка $(\hat{X}_j, \hat{Y}_j)$ на поверхности оболочки. Неэффективная $ЕПР$ может быть выражена через выпуклую комбинацию эффективных $ЕПР$, т.е. $\hat{X}_j = \sum \lambda_k^* X_k$, $\hat{Y}_j = \sum \lambda_k^* Y_k$ при $\sum \lambda_k^* = 1$, $\lambda_k^* \geq 0$, $\forall k$.

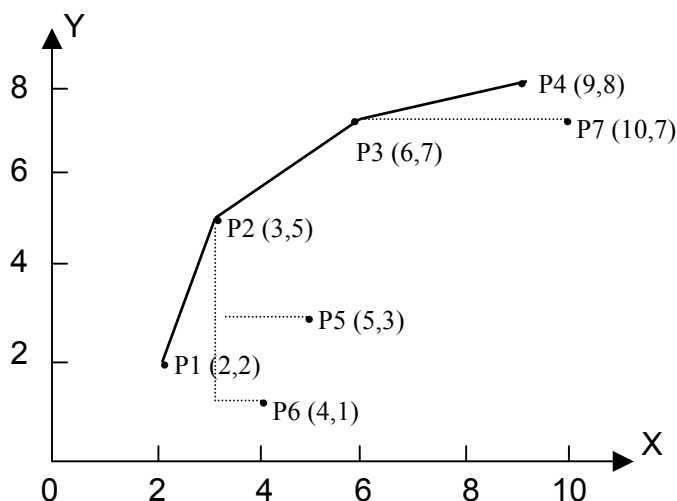


Рис.13.7. Поверхность оболочки для аддитивной модели

Полученные путем решения прямой аддитивной задачи оптимальные значения свободных переменных измеряют расстояние $L1$ от неэффективной точки (X_j, Y_j) до точки на границе поверхности $(\hat{X}_j, \hat{Y}_j)$, на которую она проецируется. Аддитивная модель позволяет выбрать точку на поверхности оболочки, которая максимизирует расстояние $L1$ в северо-западном направлении. В частности, для конкретной $ЕПР_0$ выбирается самая экстремальная из всех выпуклых комбинаций единиц принятия решений с уровнем отдачи $Y\lambda \geq Y_0$ и уровнем входа $X\lambda \leq X_0$.

Так, для $ЕПР_5$ с координатами (5,3) эта наиболее удаленная точка (с положительными значениями свободных переменных) соответствует точке для $ЕПР_2$, имеющей координаты (3,5). Расстояние $L1$ равно 4. Оно получается за счет ненулевых свободных переменных для входа $5-3=2$ и выхода $5-3=2$.

Двойственная модель (в мультипликативной форме) приносит другую геометрическую интерпретацию. Она позволяет найти наиболее близкую опорную (определяемую отрезком) гиперплоскость, т.е. $\sum_{r=1}^t w_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u_0 = Z_0$ с максимальным значением Z_0 . Эффективная точка (X_0, Y_0) будет лежать на отрезке, определяя гиперплоскость с уравнением $w^* Y_0 - v^* X_0 + u_0 = 0$.

На рис. 13.8 показана опорная гиперплоскость для эффективной $ЕПР_3$ с уравнением $\frac{3}{2}y - x - \frac{9}{2} = 0$, значения коэффициентов для которого получены из строки для $ЕПР_3$ в табл. 13.13. Для неэффективных $ЕПР$ значение целевой функции Z_0^* измеряет расстояние до ближайшей опорной гиперплоскости. Например, для $ЕПР_3$ опорная гиперплоскость выражается уравнением $\frac{3}{2}y - x - \frac{9}{2} = 0$, а параллельная гиперплоскость $\frac{3}{2}y - x - \frac{9}{2} = -4$, проходящая через точку для $ЕПР_7$, определяет расстояние $L1$ в 4 единицы до первой гиперплоскости.

Как было указано ранее, и это следует из анализа поверхности оболочки, аддитивная модель оперирует поверхностью с изменяющимися уровнями отдачи. Это – следствие присутствия в прямой модели ограничения выпуклости $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ или, что эквивалентно, присутствия соответствующей неограниченной на знак переменной u_0 в двойственной.

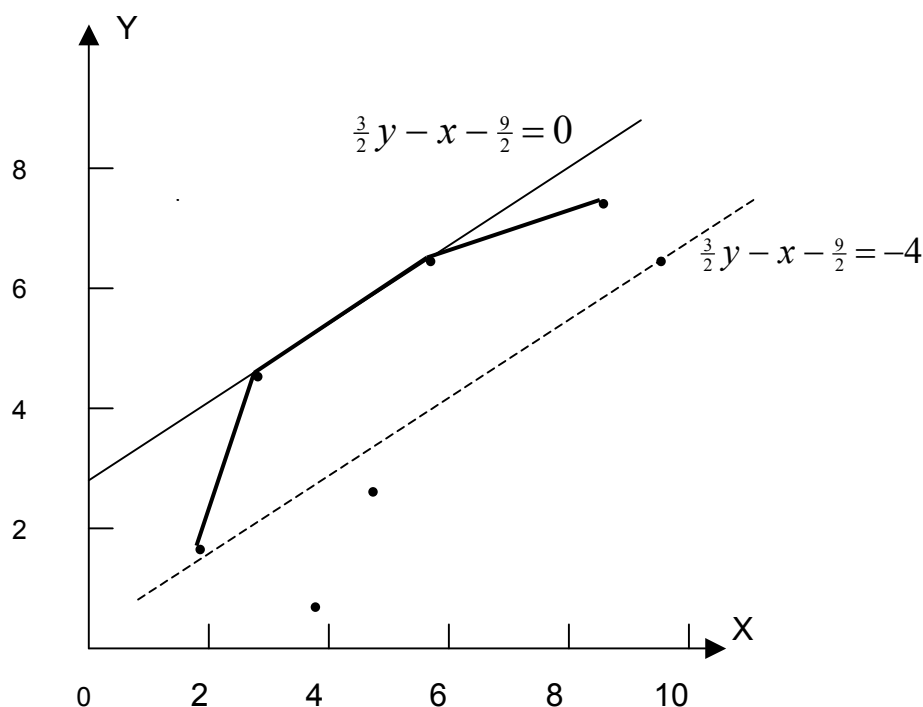


Рис.13.8. Граничная опорная гиперплоскость для аддитивной модели

Оптимальное значение целевой функции аддитивной модели (для неэффективных *ЕПР*) зависит от принятых единиц измерения. Тем не менее можно получить относительные показатели (независящие от единиц измерения) путем нормализации.

Одним из дополнительных следствий использования ограничений выпуклости является учет свойства инвариантности поверхности оболочки. В частности, заменяя значения y_{rj} и x_{ij} на новые (измененные) значения

$$\begin{aligned}\hat{y}_{rj} &= y_{rj} + c_r, \quad r = \overline{1, t}, \\ \hat{x}_{ij} &= x_{ij} + d_i, \quad i = \overline{1, m}\end{aligned}$$

(при $c_r > 0$ и $d_i > 0$), мы получим эквивалентную задачу линейного программирования. Таким образом, для аддитивной модели деление *ЕПР* на эффективные и неэффективные инвариантно по отношению к тождественному преобразованию данных.

13.6.4. Мультипликативная модель

В отличие от кусочно-линейных поверхностей, которые используются большинством моделей АОД, мультипликативные модели позволяют строить линейно-логарифмическую и кусочную Кобба-Дугласа поверхности.

Используются два типа мультипликативных моделей: инвариантная и вариантная. Мультипликативная инвариантная модель была предложена А.Чарнсом, У.Купером, Л.Сейфордом и Дж.Стуцем в 1983 г. Она является результатом приложения аддитивной модели к логарифмам в исходных данных. Таким образом, интерпретация мультипликативной модели аналогична аддитивной, с тем лишь

изменением, что она оперирует трансформированным к логарифмам пространством $(\text{Log}(X), \text{Log}(Y))$.

Инвариантные мультипликативные модели представлены в табл. 13.14.

Таблица 13.14. Прямая и двойственная инвариантные мультипликативные модели

Прямая модель	Двойственная модель
$\min D_0 = -\varepsilon \left(\sum_{r=1}^t s_r + \sum_{i=1}^m s_i \right) \quad (13.69)$	$\max Z_0 = \sum_{r=1}^t w_r \text{Log}(y_{r0}) - \sum_{i=1}^m v_i \text{Log}(x_{i0}) + u_0 \quad (13.76)$
Ограничения	Ограничения
$\sum_{j=1}^n \lambda_j \text{Log}(x_{ij}) + s_i = \text{Log}(x_{i0}), \quad (13.70)$ $i = \overline{1, m}$	$\sum_{r=1}^t w_r \text{Log}(y_{rj}) - \sum_{i=1}^m v_i \text{Log}(x_{ij}) + u_0 \leq 0, \quad (13.77)$ $j = \overline{1, n}$
$\sum_{j=1}^n \lambda_j \text{Log}(y_{rj}) - s_r = \text{Log}(y_{r0}), \quad (13.71)$ $r = \overline{1, t}$	$\left. \begin{aligned} -w_r &\leq -\varepsilon, \quad r = \overline{1, t} \\ -v_i &\leq -\varepsilon, \quad i = \overline{1, m} \end{aligned} \right\} \quad (13.78)$
$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (13.72)$	$u_0 - \text{любая} \quad (13.79)$
$\lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (13.73)$	
$s_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (13.74)$	
$s_r \geq 0, \quad r = \overline{1, t} \quad (13.75)$	

Кусочно-линейная поверхность аддитивной модели в трансформированном пространстве приносит кусочную поверхность Кобба-Дугласа.

Вариантная мультипликативная модель получается из инвариантной путем исключения из нее ограничения выпуклости. Эта модель первоначально была разработана и предложена А.Чарнсом, У.Купером, Л.Сейфордом и Дж.Стуцем в 1982 г.

Формулировка пары двойственных вариантных мультипликативных моделей приведена в табл. 13.15.

Эти модели выглядят как инвариантные за исключением отсутствия в них ограничения выпуклости $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ в прямой и соответствующей двойственной переменной u_0 в двойственной задаче.

Эффект этих изменений легче увидеть с позиции двойственной задачи. Отсутствие переменной u_0 «заставляет» опорные гиперплоскости в трансформированном пространстве проходить через начало координат. Как результат, числа эффективных ЕПР и отрезков поверхности резко сокращаются. А так как опорные гиперплоскости должны проходить через начало координат, то модель ограничена до использования в ней постоянного уровня отдачи (CRS) в трансформированном пространстве. Это свойство соотносит данную модель с моделью CCR.

Таблица 13.15. Прямая и двойственная варианты мультипликативные модели

Прямая модель	Двойственная модель
$\min D_0 = -\varepsilon \left(\sum_{r=1}^t s_r + \sum_{i=1}^m s_i \right) \quad (13.79)$	$\max Z_0 = \sum_{r=1}^t w_r \text{Log}(y_{r0}) - \sum_{i=1}^m v_i \text{Log}(x_{i0}) \quad (13.85)$
Ограничения $\sum_{j=1}^n \lambda_j \text{Log}(x_{ij}) + s_i = \text{Log}(x_{i0}), \quad (13.80)$ $i = \overline{1, m}$	Ограничения $\sum_{r=1}^t w_r \text{Log}(y_{rj}) - \sum_{i=1}^m v_i \text{Log}(x_{ij}) \leq 0, \quad (13.86)$ $j = \overline{1, n}$
$\sum_{j=1}^n \lambda_j \text{Log}(y_{rj}) - s_r = \text{Log}(y_{r0}), \quad (13.81)$ $r = \overline{1, t}$	$\left. \begin{aligned} -w_r &\leq -\varepsilon, \quad r = \overline{1, t} \\ -v_i &\leq -\varepsilon, \quad i = \overline{1, m} \end{aligned} \right\} \quad (13.87)$
$\lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (13.82)$	
$s_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (13.83)$	
$s_r \geq 0, \quad r = \overline{1, t} \quad (13.84)$	

Краткие выводы

Подход АОД показывает только относительную эффективность – эффективность относительно рассматриваемых данных. Он не дает (и не может дать) оценки абсолютной эффективности.

Различные результаты могут быть достигнуты не только путем выбора различных типов моделей, но также и путем различной ориентации в рамках данных моделей.

Модель CCR позволяет построить границу с постоянным уровнем отдачи (CRS) путем определения той (тех) ЕПР, которая максимизирует отношение виртуального выхода к виртуальному входу. Модель CCR создает довольно жесткие условия для ЕПР для измерения их эффективности. Поверхность оболочки представляет коническую форму, начинающуюся в точке пересечения осей координат. Из-за этого только некоторые ЕПР могут быть эффективными. Эффективность остальных ЕПР может быть достигнута либо за счет снижения уровня входа для достижения заданного уровня выхода, либо за счет увеличения уровня выхода при заданном уровне входа.

Модели ВСС и аддитивная имеют дело с границей с изменяющимся уровнем отдачи (VRS). Мультипликативные модели могут иметь границу как с изменяющимся уровнем отдачи (инвариантные), так и с постоянным (вариантные). В то время как модели CCR, ВСС и аддитивная дают кусочно-линейную поверхность оболочки, мультипликативная модель приносит кусочную линейно-логарифмическую поверхность.

Путь проекции неэффективных ЕПР зависит от ориентации модели (для CCR и ВСС моделей).

Если выбрана изменяющаяся форма отдачи (VRS), то для оценки эффективности могут быть использованы следующие меры:

1. Радиальная мера, ориентированная на вход;
2. Радиальная мера, ориентированная на выход;

3. $L1$ -мера для аддитивной модели.

Выбор конкретного вида модели АОД определяется:

1. Исключительно свойствами уровня отдачи;
2. Геометрией поверхности оболочки (с определением, какая из мер эффективности используется);
3. Проекцией эффективности, т.е. маршрутом от неэффективных $ЕПР$ к эффективной границе.

Пример. (Оценка эффективности работы больниц)

Три больницы распространяют свою деятельность на три группы населения:

- *пациентов возрастом до 14 лет;*
- *пациентов возрастом от 14 до 65 лет;*
- *пациентов старше 65 лет.*

Различные возрастные группы требуют различного подхода для оказания помощи. Первую группу составляют дети, во вторую входят взрослые, в последнюю – люди, чей возраст делает их менее активными в жизни.

Два вида ресурсов (входов) имеются в наличии для оказания помощи пациентам:

вход 1 – капитал, измеряемый числом больничных коек;

вход 2 – труд, измеряемый в тыс. пациенто-дней, используемых в течение месяца.

Результаты деятельности (выходы) – сервис, обеспечиваемый больницами для каждой группы населения:

выход 1 = тыс. пациенто-дней в течение месяца для оказания медицинской помощи пациентам возрастом до 14 лет;

выход 2 = тыс. пациенто-дней в течение месяца для оказания медицинской помощи пациентам возрастом от 14 до 65 лет;

выход 3 = тыс. пациенто-дней в течение месяца для оказания помощи пациентам возрастом старше 65 лет.

Значения входов и выходов для каждой больницы представлены в таблице

Больница	Входы		Выходы		
	1	2	1	2	3
1	5	14	9	4	16
2	8	15	5	7	10
3	7	12	4	9	13

Используя метод АОД, определите, какая из больниц эффективно работает, а какая нет.

Решение.

Определим переменные:

t_r = цена единицы выхода r ;

w_s = цена единицы входа s .

Эффективность i -й больницы может быть оценена следующим образом:

$$E_i = \frac{\text{ценность выходов } i\text{-й больницы}}{\text{ценность входов } i\text{-й больницы}} .$$

Таким образом, для первой больницы имеем

$$E_1 = \frac{9t_1 + 4t_2 + 16t_3}{5w_1 + 14w_2} ,$$

для второй

$$E_2 = \frac{5t_1 + 7t_2 + 10t_3}{8w_1 + 15w_2} ,$$

для третьей

$$E_3 = \frac{4t_1 + 9t_2 + 13t_3}{7w_1 + 12w_2} .$$

Для формулировки проблемы используем предположения:

1. Ни одна из больниц не может быть более чем на 100% эффективной, т.е. $E_i \leq 1$ для $i = 1, 2, 3$:

$$\text{для } i = 1 \quad \frac{9t_1 + 4t_2 + 16t_3}{5w_1 + 14w_2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -9t_1 - 4t_2 - 16t_3 + 5w_1 + 14w_2 \geq 0 ,$$

$$\text{для } i = 2 \quad \frac{5t_1 + 7t_2 + 10t_3}{8w_1 + 15w_2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -5t_1 - 7t_2 - 10t_3 + 8w_1 + 15w_2 \geq 0 ,$$

$$\text{для } i = 3 \quad \frac{4t_1 + 9t_2 + 13t_3}{7w_1 + 12w_2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -4t_1 - 9t_2 - 13t_3 + 7w_1 + 12w_2 \geq 0 .$$

2. Если эффективность больницы равна 1, то она работает эффективно, в противном случае – неэффективно.
3. Стоимость входа для больницы должна быть равна 1:

$$\text{для } i = 1 \quad 5w_1 + 14w_2 = 1 ,$$

$$\text{для } i = 2 \quad 8w_1 + 15w_2 = 1 ,$$

$$\text{для } i = 3 \quad 7w_1 + 12w_2 = 1.$$

4. Цены входа (затрат) и выхода должны быть строго положительными, в противном случае будет невозможно определить неэффективность, включающую вход или выход.
5. Цель деятельности каждой больницы – максимизировать выход.

Формулировка моделей для определения эффективности каждой из больниц

Больница 1.

Целевая функция

$$\max Z = 9t_1 + 4t_2 + 16t_3.$$

Ограничения

- (1) $-9t_1 - 4t_2 - 16t_3 + 5w_1 + 14w_2 \geq 0,$
- (2) $-5t_1 - 7t_2 - 10t_3 + 8w_1 + 15w_2 \geq 0,$
- (3) $-4t_1 - 9t_2 - 13t_3 + 7w_1 + 12w_2 \geq 0,$
- (4) $5w_1 + 14w_2 = 1,$
- (5) $t_1 \geq 0,0001,$
- (6) $t_2 \geq 0,0001,$
- (7) $t_3 \geq 0,0001,$
- (8) $w_1 \geq 0,0001,$
- (9) $w_2 \geq 0,0001,$
- (10) $t_1, t_2, t_3, w_1, w_2 \geq 0.$

Больница 2.

Целевая функция

$$\max Z = 5t_1 + 7t_2 + 10t_3.$$

Ограничения

- (1) $-9t_1 - 4t_2 - 16t_3 + 5w_1 + 14w_2 \geq 0,$
- (2) $-5t_1 - 7t_2 - 10t_3 + 8w_1 + 15w_2 \geq 0,$
- (3) $-4t_1 - 9t_2 - 13t_3 + 7w_1 + 12w_2 \geq 0,$
- (4) $8w_1 + 15w_2 = 1,$
- (5) $t_1 \geq 0,0001,$
- (6) $t_2 \geq 0,0001,$
- (7) $t_3 \geq 0,0001,$
- (8) $w_1 \geq 0,0001,$
- (9) $w_2 \geq 0,0001,$
- (10) $t_1, t_2, t_3, w_1, w_2 \geq 0.$

Больница 3.

Целевая функция

$$\max Z = 4t_1 + 9t_2 + 13t_3.$$

Ограничения

- (1) $-9t_1 - 4t_2 - 16t_3 + 5w_1 + 14w_2 \geq 0$,
- (2) $-5t_1 - 7t_2 - 10t_3 + 8w_1 + 15w_2 \geq 0$,
- (3) $-4t_1 - 9t_2 - 13t_3 + 7w_1 + 12w_2 \geq 0$,
- (4) $7w_1 + 12w_2 = 1$,
- (5) $t_1 \geq 0,0001$,
- (6) $t_2 \geq 0,0001$,
- (7) $t_3 \geq 0,0001$,
- (8) $w_1 \geq 0,0001$,
- (9) $w_2 \geq 0,0001$,
- (10) $t_1, t_2, t_3, w_1, w_2 \geq 0$.

Как видно из приведенных моделей, каждая из них отличается выражением целевой функции, которая определяет максимум виртуального выхода, и четвертым ограничением, отражающим потенциальные возможности по использованию виртуального входа.

Для решения задач был использован стандартный пакет прикладных программ *QSB+*. Ниже приведены оптимальные решения задач для каждой больницы отдельно.

Таблица. 13.16. Оптимальное решение задачи для первой больницы

Номер	Переменная	Решение	Альтернативная цена	Кэф. цел. функции	Мин. знач. коэф. ц. ф.	Макс. знач. коэф. ц. ф.
1	t1	+0.0001000	0	+9.0000000	- ∞	+9.0000000
2	t2	+0.0001000	0	+4.0000000	- ∞	+4.0000000
3	t3	+0.0624187	0	+16.0000000	+16.0000000	+ ∞
4	w1	+0.0001000	0	0	- ∞	0
5	w2	+0.0713928	0	0	0	+ ∞
Огран.	Статус	Правая часть ограничения	Теневая цена	Перевып./недовып.	Мин. знач. прав.ч.огр.	Макс. знач. прав.ч.огр.
1	Жестк.	> 0	+1.0000000	0	-0.0549791	+0.9971000
2	Своб.	> 0	0	+0.4463053	- ∞	+0.4463053
3	Своб.	> 0	0	+0.0446705	- ∞	+0.0446705
4	Жестк.	=+1.0000000	+1.0000000	0	+0.0029000	+ ∞
5	Жестк.	>+0.0001000	0	0	0	+0.1108888
6	Жестк.	>+0.0001000	0	0	0	+0.0078687
7	Своб.	>+0.0001000	0	+0.0623187	- ∞	+0.0624187
8	Жестк.	>+0.0001000	0	0	0	+0.1997200
9	Своб.	>+0.0001000	0	+0.0712928	- ∞	+0.0713928
Максимум Z = 1 Iteration = 9 Elapsed CPU second = 5.078125E-02						

Таблица. 13.17. Оптимальное решение задачи для второй больницы

Номер	Переменная	Решение	Альтернативная цена	Кэф. цел. функции	Мин. знач. коэф. ц. ф.	Макс. знач. коэф. ц. ф.
1	t1	+0.0798206	0	+5.0000000	+4.3441725	+15.750000
2	t2	+0.0532752	0	+7.0000000	+3.5849059	+8.0567703
3	t3	+0.0001000	0	+10.000000	- ∞	+12.784616
4	w1	+0.0001000	0	0	- ∞	+0.2482054
5	w2	+0.0666133	0	0	-0.4653852	+ ∞
Огран.	Статус	Правая часть ограничения	Теневая цена	Перевып./недовып.	Мин. знач. прав.ч.огр.	Макс. знач. прав.ч.огр.
1	Жестк.	>0	+0.2615384	0	-0.8640984	+0.5757600
2	Своб.	>0	0	+0.2269699	- ∞	+0.2269699
3	Жестк.	>0	+0.6615384	0	-0.3430941	+0.3840437
4	Жестк.	=+1.0000000	+0.7733333	0	+0.0034923	+ ∞
5	Своб.	>+0.0001000	0	+0.0797206	- ∞	+0.0798206
6	Своб.	>+0.0001000	0	+0.0531752	- ∞	+0.0532752
7	Жестк.	>+0.0001000	-2.7846155	0	0	+0.0564243
8	Жестк.	>+0.0001000	-0.2482054	0	0	+0.1248125
9	Своб.	>+0.0001000	0	+0.0665133	- ∞	+0.0666133
Максимум Z = 0.77303 Iteration = 11 Elapsed CPU second = 0.109375						

Таблица. 13.18. Оптимальное решение задачи для третьей больницы

Номер	Переменная	Решение	Альтернативная цена	Кэф. цел. функции	Мин. знач. коэф. ц. ф.	Макс. знач. коэф. ц. ф.
1	t1	+0.0001000	0	+4.0000000	- ∞	+4.0000000
2	t2	+0.0091603	0	+9.0000000	+3.2500000	+9.0000000
3	t3	+0.0705505	0	+13.000000	+13.000001	+36.000000
4	w1	+0.0001000	0	0	- ∞	0
5	w2	+0.0832750	0	0	0	+ ∞
Огран.	Статус	Правая часть ограничения	Теневая цена	Перевып./недовып.	Мин. знач. прав.ч.огр.	Макс. знач. прав.ч.огр.
1	Жестк.	>0	0	0	-0.0641192	+0.7201610
2	Своб.	>0	0	+0.4797972	- ∞	+0.4797972
3	Жестк.	>0	+1.0000000	0	-0.6130743	+0.0520968
4	Жестк.	=+1.0000000	+1.0000000	0	+0.0028538	+ ∞
5	Жестк.	>+0.0001000	0	0	0	+0.0998146
6	Своб.	>+0.0001000	0	+0.0090603	- ∞	+0.0091603
7	Своб.	>+0.0001000	0	+0.0704505	- ∞	+0.0705505
8	Жестк.	>+0.0001000	0	0	0	+0.1426857
9	Своб.	>+0.0001000	0	+0.0831750	- ∞	+0.0832750
Максимум Z = 1 Iteration = 10 Elapsed CPU second = 5.078125E-02						

Исходя из полученного решения, можно сделать вывод, что эффективно работают только первая и третья больницы (значения целевых функций для них равны единице). Вторая больница работает неэффективно ($Z = 0,773$).

Дополнительный анализ проблемы проведем с помощью теневых цен. Рассчитаем векторы средневзвешенного входа и средневзвешенного выхода. Тем самым получим показатели для так называемой «объединенной» больницы.

Вектор среднего входа

$$0.261538 \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix} + 0.661538 \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.938 \\ 11.6 \end{bmatrix}.$$

Вектор среднего выхода

$$0.261538 \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} + 0.661538 \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 12.785 \end{bmatrix}.$$

Сравним деятельность второй и «объединенной» больниц

	Больница 2		«Объединенная» больница	
Вход	$\begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}$	>	$\begin{bmatrix} 5.938 \\ 11.6 \end{bmatrix}$	
Выход	$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 12.785 \end{bmatrix}$	одинаково

Результаты сравнения позволяют сделать вывод: «объединенная» больница потребляет меньшее количество входа и производит не меньше выхода, чем вторая больница.

Интерпретация значения целевой функции для второй больницы может быть сделана следующим образом: более эффективная «объединенная» больница производит свой выход, используя не более 0,773 каждого вида входа второй больницы.

$$1\text{-й вход "объед." больницы} < 0,773 \cdot (1\text{-й вход второй больницы}) = 6.184,$$

$$2\text{-й вход "объед." больницы} = 0,773 \cdot (2\text{-й вход второй больницы}) = 11.6.$$

Количественный показатель неэффективности второй больницы составляет

$$12,785 - 10 = 2,785 \text{ тыс. пациенто-дней}$$

при оказании помощи лицам старше 65 лет.

Задачи

13.1. Районный отдел народного образования решил оценить эффективность четырех городских общеобразовательных школ. Для оценки эффективности используются три вида выхода:

- 1) средний балл по литературе;
- 2) средний балл по математике;

3) средний балл по биологии.

В качестве входов рассматриваются:

- 1) средний образовательный уровень матерей (15 баллов – высшее образование, 13 – среднетехническое, 11 – среднее);
- 2) количество родителей, посетивших школу (в расчете на одного учащегося);
- 3) количество учителей, приходящихся на одного ученика.

Соответствующая информация приведена в таблице

Школа	Входы			Выходы		
	1	2	3	1	2	3
1	13	4	0.05	9	7	6
2	14	5	0.05	10	8	7
3	11	6	0.06	11	7	8
4	15	8	0.08	9	9	9

Определите, какие (если таковые имеются) школы являются неэффективными. Для неэффективно работающих школ определите природу неэффективности.

- 13.2. Городской филиал сельскохозяйственного банка имеет три отделения для обслуживания клиентов. Для оценки степени эффективности их работы используется следующая информация.

Входы:

- 1) затраты рабочего времени (сотен часов в месяц);
- 2) используемая площадь (сотен квадратных метров);
- 3) денежные запасы, используемые в течение месяца (сотен грн.).

Выходы:

- 1) предоставление займов в месяц;
- 2) обработка вкладов в месяц (тыс.);
- 3) обработка чеков в месяц (тыс.).

Соответствующая информация приведена в таблице

Отделение	Входы			Выходы		
	1	2	3	1	2	3
1	15	20	50	200	15	35
2	14	23	51	220	18	45
3	16	19	51	210	17	20

Используя приведенную информацию, определите: насколько эффективно работают отделения банка. Какова природа неэффективности?

- 13.3. Для оценки эффективности работы трех участков ГАИ, расположенных на территории области, используются следующие данные.

Входы:

- 1) количество работников ГАИ;
- 2) количество используемых патрульных машин.

Выходы:

- 1) количество патрульных единиц, использованных при ответах на вызовы (тыс. в год);

- 2) количество вынесенных приговоров за правонарушения (сотен в год).

Информация о работе участков ГАИ приведена в таблице

Участок ГАИ	Входы		Выходы	
	1	2	1	2
1	200	60	6	8
2	300	90	8	9.5
3	400	120	10	11

Определите, все ли участки ГАИ работают эффективно. Если нет, то какова природа их неэффективности?

- 13.4. В таблице собрана информация о работе четырех факультетов университета

Факультет	Входы			Выходы	
	преподаватели	обслуживающий персонал	бюджет	число кредитов, тыс.	число публикаций
Экономический	150	70	5	15	225
Филологический	60	20	3	5.4	70
Математический	80	44	4	8	130
Физический	30	15	1	2.1	40

Используя анализ оболочки данных, определите факультеты, работающие неэффективно. Объясните природу выявленной неэффективности.

- 13.5. Имеется 11 единиц принятия решений, работа каждой из которых характеризуется двумя входами и двумя выходами.

ЕПР	Входы		Выходы	
	1	2	1	2
1	40	30	160	100
2	30	60	180	70
3	93	40	170	60
4	50	70	190	130
5	80	30	180	120
6	35	45	140	82
7	105	75	120	90
8	97	67	100	82
9	100	50	140	40
10	90	60	140	105
11	98	65	140	50

Определите степень эффективности их работы, используя разные модели анализа оболочки данных с различной ориентацией.

- 13.6. Для оценки относительной эффективности школ используется информация о среднем балле аттестата (выход 1), проценте выпускников, продолживших обучение в высших учебных заведениях (выход 2), а также о посещаемости (в процентах) школьниками занятий (вход 1) и удельном весе учителей, имеющих педагогический стаж более 10 лет (вход 2).

Школа	Входы		Выходы	
	1	2	1	2
1	97.8	8.6	10.0	65
2	99.9	17.7	10.5	67
3	96.0	15.8	9.4	63
4	98.1	9.6	10.0	69
5	96.4	8.9	9.3	62
6	100	18.8	10.9	71
7	100	23.4	11.0	76
8	93.6	18.8	9.8	59
9	98.6	17.1	9.7	64
10	100	25.6	11.0	78
11	95.1	29.2	10.0	74

Определите школы, имеющие наивысшие показатели эффективности. Сравните полученные результаты, используя различные модели анализа оболочки данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов экономических специальностей вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.
2. Банди Б. Основы линейного программирования: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.
3. Вагнер Г. Основы исследования операций: В 3 т. – М.: Мир, 1972-1973.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972. – 552 с.
5. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
6. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
7. Дегтярев Ю.И. Исследование операций: Учеб. для вузов по спец. АСУ. – М.: Высш. шк., 1986. – 320 с.
8. Деордица Ю.Л., Нефедов Ю.М. Исследование операций в планировании и управлении: Учеб. пособие для экономических специальностей. – К.: Вища шк., 1991. – 270 с.
9. Ермольев Д.Н., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюття В.И. Математические методы исследования операций. – К.: Вища шк., 1979. – 312 с.
10. Зайченко Ю.Л. Исследование операций: Учебник. – М.: Высш. шк., 1986. – 549 с.
11. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов/ Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
12. Калихман И.Л. Линейная алгебра и программирование. – М.: Высш. шк., 1967. – 427 с.
13. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. – М.: Изд-во АН СССР, 1959.
14. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учеб. пособие. – 3-е изд. – М.: Наука, 1986. – 285 с.
15. Костевич Л.С., Лапко А.А. Теория игр. Исследование операций. – Минск: Высшая шк., 1982. – 230 с.
16. Кофман А. Методы и модели исследования операций. – М.: Мир, 1966. – 523 с.
17. Кофман А., Фор Р. Займемся исследованием операций. – М.: Мир. – 1966. – 278 с.
18. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.В. Математическое программирование: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1985. – 301 с.
19. Линейное и нелинейное программирование / Под ред. И.И. Ляшенко. – К.: Высш. шк., 1979. – 372 с.
20. Методические указания и задачи по математическому программированию: Для студентов экономических специальностей / В.В. Христиановский, В.Г. Ерин, О.В. Ткаченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 154 с.
21. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1986. – 285 с.
22. Ожегов С.И. Словарь русского языка. Около 57000 слов. Изд. 10-е, стереотип. / Под ред. д-ра филолог. наук, проф. Н.Ю.Шведовой. – М.: Сов. Энциклопедия, 1973. – 846 с.

23. Решение задач математического программирования: Курс лекций для студентов экономических специальностей / В.В. Христиановский, В.Г. Ерин, О.В. Ткаченко. – Донецк: ДонГУ, 1992. – 254 с.
24. Саати Т.Л. Математические методы исследования операций. – М.: Воениздат, 1963.
25. Сборник задач по математическому программированию: в помощь студентам-экономистам / В.В. Христиановский, В.Г. Ерин, О.В. Ткаченко. – К.: УМК ВО, 1992. – 336 с.
26. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х кн./ Пер. с англ. В.Я. Алтаева, В.Т. Вавилова, В.С. Данилина и др. – М.: Мир, 1985.
27. Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л. Введение в исследование операций. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
28. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
29. BURTON R.M. *Quantitative approaches to business decision making*, Harper Row, Publishers. – New York, 1986.
30. CHARNES A., COOPER W.W., LEWIN A.Y., and SEIFORD L.M. *Data Envelopment Analysis: Theory; Methodology; and Applications*. Kluwer Academic. – Boston, 1994.
31. CURWIN J., SLATER R. *Quantitative Methods for Business Decisions*. – London: International Thomson Business Press, 1996.
32. EPPEN G.D., GOULD F.J., SCHMIDT C.P. *Introductory Management Science*. – 3rd ed., Englewood Cliffs, New Jersey 07632: Prentice Hall, Inc., 1991. – 830 p.
33. HANNA M.E. *Introduction to Management Science. Mastering Quantitative Analysis*, Cincinnati, Ohio: South-Western College Publishing, 1996.
34. OBERSTONE J. *Management Science: Concepts, Insights, and Applications*. – New York: West Publishing Company, 1990. – 660 p.
35. WATERS D. *Operations Management. Producing Goods & Services*. – Harlow: England, Addison-Wesley, 1996.
36. WATERS D. *Quantitative Methods for Business*, 2nd ed. – Harlow: England, Addison-Wesley, 1997.
37. WILD R. *Production and Operations Management*, 5th ed. – London: Cassel, 1995.
38. WINSTON W.L. *Mathematical Programming*, 3d ed. – Boston: PWS-Kent Publishing Company, 1998.
39. WINSTON W.L. *Operations Research: Applications and Algorithms*. – 2nd ed. – Boston: PWS-Kent Publishing Company, 1991. – 1262 p.
40. WISNIEWSKI M. *Quantitative Methods for Decision Makers*. – London: Pitman Publishing, 1994.

Литература, относящаяся к главе 13

41. ALI A.I., and SEIFORD L.M. *The mathematical programming approach to Efficiency Analysis*. In: Fried, Lovell, Schmidt (Eds.) *The Measurement of Productive Efficiency - Techniques and Applications*, Oxford University Press (1993). – p. 120-159.
42. ALTHIN R., FÄRE R., and GROSSKOPF S. *Profitability and productivity changes: An application to Swedish pharmacies*. *Annals of Operations Research*. – Vol. 66 (1996). – p. 219-232.
43. ARNOLD V.L., BARDHAN I.R., COOPER W.W., and KUMBHAKAR S.C. *New uses of DEA and statistical regression for efficiency evaluation and estimation – with an illustrative application to public secondary schools in Texas*. *Annals of Operations Research*. – Vol. 66 (1996). – p. 255-278.

44. BANKER R.D., CHARNES A., and COOPER W.W. *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis*. Management Science. – Vol. 30. – No. 9 (1984). – p. 1078-1092.
45. CHARNES A., COOPER W.W., GOLANY B., SEIFORD L.M., and STUTZ J. *Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions* // Journal of Econometrics. – No. 30 (1985). – p. 91-107. (North Holland).
46. CHARNES A., COOPER W.W., LEWIN A.Y., and SEIFORD L.M. *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology, and Applications*. Kluwer Academic. – Boston, 1994.
47. CHARNES A., COOPER W.W., and RHODES E. *Measuring the efficiency of decision making units* // European Journal of Operational Research. – No. 2 (1978). – p. 429-444. (North Holland Publishing Company).
48. CHARNES A., COOPER W.W., and RHODES E. *Evaluating program and managerial efficiency: An application of data envelopment analysis to program follow through* // Management Science. – No. 27 (1981). – p. 668-697.
49. DYSON R.G., and THANASSOULIS E. *Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis* // Journal of the Operational Research Society. – No. 39/6 (1988). – p. 563-576.
50. FARRELL M.J. *The measurement of productive efficiency* // Journal of the Royal Statistical Society, Series A. – No. 120 (1957). – p. 253-290.
51. GANLEY J.A., and CUBBIN J.S. *Public sector efficiency measurement. Applications of Data Envelopment Analysis*. North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1992.
52. GATHON H.-J., and PESTIEAU P. *Decomposing efficiency into its managerial and its regulatory components: The case of European railways* // European Journal of Operational Research. – No. 80 (1995). – p. 500-507.
53. LOVELL C.A.K. *Production Frontiers and Productivity efficiency*. In: Fried, Lovell, Schmidt (Eds.) *The Measurement of Productive Efficiency – Techniques and Applications*, Oxford University Press (1993). – p. 3-67.
54. SEIFORD L.M., and THRALL R.M., *Recent developments in DEA – The Mathematical Programming Approach to Frontier Analysis* // Journal of Econometrics. – No. 46 (1990). – p. 7-38. (North Holland).
55. SINHA K.K. *Moving frontier analysis: An application of Data Envelopment Analysis for competitive analysis of a high-technology manufacturing plant* // Annals of Operations Research. – Vol. 66 (1996). – p. 197-218.
56. SUEYOSHI T. *Measuring Technical, Allocative and Overall Efficiencies using a DEA algorithm* // Journal of the Operational Research Society. – No. 43/2 (1992). – p. 141-155.
57. TAYLOR W.M., THOMPSON R.G., THRALL R.M., and DHARMAPALA P.S. *DEA/AR efficiency and profitability of Mexican banks. A total income model* // European Journal of Operational Research. – No. 98 (1997). – p. 346-363.
58. THANASSOULIS E., DYSON R.G., and FOSTER M.J. *Relative efficiency Assessments using Data Envelopment Analysis: An application to data on rates departments* // Journal of the Operational Research Society. – No. 38/5 (1987). – p. 397-411.
59. TYTECA D. *Linear programming model for the measurement of environmental performance of firms – concepts and empirical results* // Journal of Productivity Analysis. – No. 8 (1997). – p. 183-197.

60. WEI Q.L., SUN B., and XIAO Z.J. *Measuring technical progress with data envelopment analysis* // European Journal of Operational Research. – No. 80 (1996). – p. 691-702.
61. ZENG G. *Evaluating the efficiency of vehicle manufacturing with different products* // Annals of Operations Research. – Vol. 66 (1996). – p. 299-310.