

ГЛАВА 2. СИМПЛЕКС МЕТОД

2.1. КАК ПРИВЕСТИ ЗАДАЧУ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К СТАНДАРТНОЙ ФОРМЕ?

Выше было рассмотрено, что условия задач линейного программирования могут быть выражены как в виде равенств, так и в виде неравенств. Кроме того, переменные, используемые в моделях, могут быть либо неотрицательными, либо неограниченными на знак. Симплекс метод решения задач линейного программирования предполагает, что все условия задачи выражены в виде равенств, а переменные могут принимать только неотрицательные значения. Такую форму представления задачи линейного программирования будем называть **стандартной**. В связи с этим любая задача линейного программирования, прежде чем она будет решена, должна быть представлена в стандартной форме.

В литературе по линейному программированию очень часто используется термин **каноническая форма задачи линейного программирования**. Понятие "канонический", согласно С.И.Ожегову, определяется как 1. Соответствующий канону; 2. Принятый за образец, твердо установленный [22, 244]. Основанием не использовать термин "канонический" по отношению к определенной форме задачи линейного программирования послужило то обстоятельство, что в различных источниках под ним подразумевают различные формы задачи ЛП, в то время как должен быть строго принят один. Вот несколько иллюстративных примеров.

Дж.Данциг называет канонической следующую задачу линейного программирования [6, 97]:

Найти такие $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ и $\min Z$, которые удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & & + \bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{1,j}x_j + \dots + \bar{a}_{1,n}x_n = \bar{b}_1, \\
 x_2 & & + \bar{a}_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{2,j}x_j + \dots + \bar{a}_{2,n}x_n = \bar{b}_2, \\
 \vdots & & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 x_m & & + \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{m,j}x_j + \dots + \bar{a}_{m,n}x_n = \bar{b}_m, \\
 (-Z) & & + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_jx_j + \dots + \bar{c}_nx_n = -\bar{Z}_0.
 \end{array}$$

Как видно из определения, особенностью канонической формы, по Данцигу, является минимизация целевой функции и выделение в системе ограничений m переменных x_i ($i = \overline{1, m}$), каждая из которых представлена только в одном ограничении с коэффициентом 1.

К стандартной форме представления задачи ЛП он относит такую задачу, целью решения которой является "определение таких неотрицательных интенсивностей технологических процессов, при которых количества каждого ингредиента (для этих интенсивностей технологических процессов) удовлетворяют уравнениям материального баланса, а величина выигрыша максимальна [6, 39].

Гарвей Вагнер говорит, что в настоящее время существует большое разнообразие канонических форм, находящих практическое применение [3, 109]. И далее он приводит две канонические формы задачи линейного программирования [3, 109-100].

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = a_{10} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = a_{m0} \end{array} \right\}$$

и условиям неотрицательности

$$x_k \geq 0 \quad (\text{где } k = 1, 2, \dots, n),$$

для которых целевая функция

$$Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

достигает максимума.

В учебном пособии [9] под канонической формой модели понимается такая модель, в которой правые части ограничений неотрицательны и в каждом уравнении выделена переменная с коэффициентом 1 и с коэффициентом 0 в остальных уравнениях. Стандартная же форма предполагает только наличие равенств в ограничениях.

Таким образом, в силу отсутствия устоявшегося понятия "каноническая форма задачи линейного программирования" в рассматриваемом учебном пособии используется термин "стандартная форма задачи линейного программирования", предусматривающая достижение любого вида критерия (max или min) на заданной системе ограничений в виде равенств, при неотрицательных неизвестных принятия решений.

Исходя из вышеизложенного для преобразования задачи к стандартному виду каждое ее неравенство (кроме ограничений на знак переменной) должно быть представлено в виде равенства.

Пример.

Рассмотрим задачу о кожаных ремнях. Кожевенная компания производит два типа упряжи для лошадей: обыкновенного и улучшенного качества. Для изготовления любого из типов упряжи требуется один квадратный метр кожи. С другой стороны, затраты труда на производство продукции отличаются: один час необходим для производства упряжи обыкновенного качества и два часа – для производства упряжи улучшенного качества.

Каждую неделю в распоряжении компании имеется 40 м² кожи и 60 часов рабочего времени. Вклад в прибыль от реализации одной упряжи обыкновенного качества составляет 3 грн., а улучшенного качества – 4 грн.

Пусть

x_1 – количество производимой еженедельно упряжи обыкновенного качества;

x_2 – количество производимой еженедельно упряжи улучшенного качества.

С учетом введенных обозначений соответствующая задача линейного программирования имеет вид

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2, \quad (2.1)$$

$$x_1 + x_2 \leq 40 \quad (\text{ограничение по ресурсам кожи}), \quad (2.2)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 60 \quad (\text{ограничение по рабочему времени}), \quad (2.3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{ограничения на знак}). \quad (2.4)$$

Преобразуем приведенные ограничения к виду равенств. Для этого введем понятие **дополняющих переменных** (или **остаточных**, по Г.Вагнеру [3]). Каждому ограничению типа « $\leq$ » поставим в соответствие дополняющую переменную S_i , которая определяет недоиспользованное количество ресурса i -го ограничения. Так, для ограничения (2.2) будем иметь

$$S_1 = 40 - x_1 - x_2$$

или

$$x_1 + x_2 + S_1 = 40,$$

где S_1 – недоиспользованное количество квадратных метров кожи.

Аналогично поступим с ограничением (2.3), введя в него дополняющую переменную S_2

$$S_2 = 60 - 2x_1 - x_2$$

или

$$2x_1 + x_2 + S_2 = 60,$$

где S_2 – недоиспользованное количество часов рабочего времени.

Точка (x_1, x_2) будет удовлетворять ограничениям только тогда, когда $S_i \geq 0$.

Например, точка (15, 20) удовлетворяет ограничениям (2.2) и (2.3), так как в первом случае $S_1 = 5$, а во втором $S_2 = 10$. С другой стороны, точка (25, 25) не удовлетворяет ограничениям, так как $S_1 = -10$, $S_2 = -15$.

После преобразования ограничений модель принимает вид

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2,$$

$$x_1 + x_2 + S_1 = 40,$$

$$2x_1 + x_2 + S_2 = 60,$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0.$$

Итак, чтобы преобразовать ограничения типа « $\leq$ » к стандартной форме, необходимо в каждое i -е ограничение ввести дополняющую переменную S_i и ограничение на знак $S_i \geq 0$.

Рассмотрим, как привести к стандартной форме ограничения типа « $\geq$ ». Вспомним задачу о диете. Математическая модель выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\min Z &= 150x_1 + 60x_2 + 90x_3 + 240x_4, \\ 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 &\geq 500, \\ 30x_1 + 20x_2 &\geq 60, \\ 20x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 40x_4 &\geq 100, \\ 20x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 50x_4 &\geq 80, \\ x_j &\geq 0 \quad (j = \overline{1,4}).\end{aligned}$$

Для приведения ее к стандартной форме будем использовать **избыточные переменные** e_i . Данная переменная показывает, на сколько единиц i -е ограничение перевыполняется. Также как и S_i , переменные e_i должны быть неотрицательными.

Таким образом,

$$\begin{aligned}e_1 &= 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 - 500, \\ e_2 &= 30x_1 + 20x_2 - 60, \\ e_3 &= 20x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 40x_4 - 100, \\ e_4 &= 20x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 50x_4 - 80\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 - e_1 &= 500, \\ 30x_1 + 20x_2 - e_2 &= 60, \\ 20x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 40x_4 - e_3 &= 100, \\ 20x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 50x_4 - e_4 &= 80.\end{aligned}$$

Точка (x_1, x_2, x_3, x_4) только тогда будет удовлетворять ограничениям, когда $e_i \geq 0$.

Например, точка $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = 0$ удовлетворяет всем ограничениям, так как $e_1 = 900, e_2 = 0, e_3 = 100, e_4 = 0$. С другой стороны, точка $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = 0$ лежит вне области допустимых значений: $e_1 = 0, e_2 = -10, e_3 = -60, e_4 = -20$.

Итак, чтобы привести ограничения типа « $\geq$ » к стандартной форме, необходимо из каждого i -го ограничения вычесть переменную e_i и добавить в модель ограничение на знак переменной $e_i \geq 0$.

После произведенных преобразований модель принимает вид:

$$\begin{aligned}\min Z &= 150x_1 + 60x_2 + 90x_3 + 240x_4 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4, \\ 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 - e_1 &= 500, \\ 30x_1 + 20x_2 - e_2 &= 60,\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 20x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 40x_4 & -e_3 & = 100, \\ 20x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 50x_4 & -e_4 & = 80, \\ x_j \geq 0 \ (j=\overline{1,4}), \ e_i \geq 0 \ (i=\overline{1,4}). \end{array}$$

2.2. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Предположим, мы преобразовали задачу линейного программирования к стандартной форме

$$\begin{array}{rcccccccl} \max(\min) \mathcal{Z} & = & c_1 x_1 & + & c_2 x_2 & + \dots + & c_n x_n, & \\ & & a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + \dots + & a_{1n} x_n & = b_1, \\ & & a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + \dots + & a_{2n} x_n & = b_2, \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + \dots + & a_{mn} x_n & = b_m, \\ & & & & x_j \geq 0, & j = \overline{1, n}. & & \end{array}$$

Если мы выразим через

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ матрицу технологических коэффициентов,}$$

через

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{вектор переменных задачи}$$

и через

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ вектор правых частей ограничений,}$$

то система ограничений модели может быть представлена в виде $Ax = b$. Будем рассматривать систему m уравнений $Ax = b$ с n неизвестными ($n \geq m$).

Определение. *Базисное решение системы $Ax = b$ получается путем приравнивания к нулю $n - m$ переменных и нахождения значений для оставшихся m переменных. Это предполагает, что*

приравнивание к нулю $n - m$ переменных приносит единственное решение оставшимся m переменным. Иначе, столбцы оставшихся переменных являются линейно независимыми.

Таким образом, для нахождения базисного решения необходимо выбрать $n - m$ переменных (**небазисных** или **свободных переменных**) и приравнять каждую из них к нулю. Далее находятся значения оставшихся $n - (n - m) = m$ переменных (**базисных переменных**), которые удовлетворяют системе ограничений $Ax = b$. Таким образом, число базисных переменных равно числу ограничений задачи.

Выбирая разные небазисные переменные, мы получим разные базисные решения.

Пусть имеется система уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3, \\ -x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Начнем с выбора небазисных переменных. Их должно быть $n - m = 3 - 2 = 1$. Итак, пусть небазисной переменной является x_3 ($NBV = \{x_3\}$), тогда базисными переменными будут x_1 и x_2 ($BV = \{x_1, x_2\}$). Приравнявая x_3 к нулю, мы решаем систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3, \\ -x_2 &= -1. \end{aligned}$$

и находим значения базисных переменных: $x_2 = 1, x_1 = 2$. Итак, $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$ – базисное решение системы уравнений.

Если в качестве небазисной переменной взять x_1 , то решением системы уравнений будет: $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2$, и так далее.

Некоторые наборы из m переменных не дают базисного решения. Например:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Пусть ($NBV = \{x_3\}$), тогда ($BV = \{x_1, x_2\}$). Соответствующее базисное решение должно быть получено из решения системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 3. \end{aligned}$$

Эта система уравнений решений не имеет, следовательно, не существует базисного решения, соответствующего набору базисных переменных ($BV = \{x_1, x_2\}$).

Определение. Любое базисное решение системы уравнений $Ax = b$, у которого все переменные неотрицательны, является **базисным допустимым решением**.

Для рассмотренной системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3, \\ -x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

базисным допустимым решением будет, например, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, а недопустимым $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

Теорема 2.1. Область допустимых значений любой задачи линейного программирования – выпуклое множество точек. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то в области допустимых значений должна находиться экстремальная (угловая) точка, которая является оптимальной. Если оптимальное решение достигается более чем в одной угловой точке, то оно достигается в любой точке, которая представляет собой линейную комбинацию этих точек.

Данная теорема говорит о том, что, если мы ищем оптимальное решение задачи с ограничениями $Ax = b$, то нам необходимо принимать в учет только экстремальные (угловые) точки.

Теорема 2.2. Для любой задачи линейного программирования существует единственная экстремальная (угловая) точка в области допустимых значений, которая соответствует базисному допустимому решению. Каждой экстремальной точке соответствует, по крайней мере, одно допустимое решение.

Для иллюстрации теоремы 2.2 вернемся к задаче о кожаной упряжи. Напомним, что математическая модель выглядела следующим образом:

$$\begin{aligned} \max Z &= 4x_1 + 3x_2, \\ x_1 + x_2 &\leq 40, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 60, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Приведем задачу к стандартной форме. Для этого используем две дополняющие переменные: S_1 и S_2 , которые введем в первое и второе ограничения, соответственно

$$\begin{aligned} \max Z &= 4x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2, \\ x_1 + x_2 + S_1 &= 40, \\ 2x_1 + x_2 + S_2 &= 60, \\ x_1, x_2, S_1, S_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решим задачу графическим методом и затем рассмотрим соответствие угловых точек области допустимых значений базисным решениям. Область допустимых значений задачи представляет собой выпуклый четырехугольник $FBEС$ (на рис. 2.1 выделен более жирными линиями). Точки F , B , E и C являются экстремальными. Согласно вышеприведенной теореме 2.2, каждой из этих точек соответствует допустимое базисное решение.

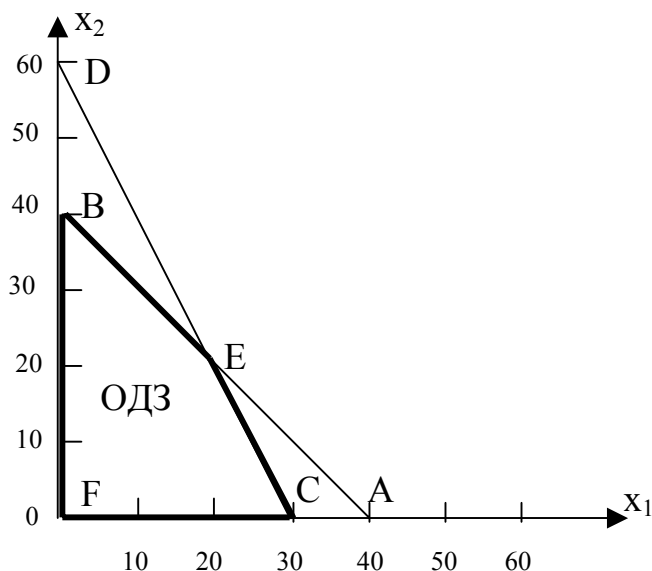


Рис. 2.1. Область допустимых значений задачи о кожаной упряжи

Рассмотрим таблицу соответствия угловых (экстремальных) точек базисным допустимым решениям задачи линейного программирования.

Базисные переменные	Небазисные переменные	Базисное решение	Соответствие угловой точке	Статус
x_1, x_2	S_1, S_2	$S_1 = S_2 = 0$, $x_1 = x_2 = 20$	E	Допустимый базис
x_1, S_1	x_2, S_2	$x_2 = S_2 = 0$, $x_1 = 30, S_1 = 10$	C	Допустимый базис
x_1, S_2	x_2, S_1	$x_2 = S_1 = 0$, $x_1 = 40, S_2 = -20$	A	Недопустимый базис
x_2, S_1	x_1, S_2	$x_1 = S_2 = 0$, $x_2 = 60, S_1 = -20$	D	Недопустимый базис
x_2, S_2	x_1, S_1	$x_1 = S_1 = 0$, $x_2 = 40, S_2 = 20$	B	Допустимый базис
S_1, S_2	x_1, x_2	$x_1 = x_2 = 0$, $S_1 = 40, S_2 = 60$	F	Допустимый базис

Таблица показывает, что два сочетания переменных (соответствуют точкам A и D) не дают базисных допустимых решений.

На основе рассмотренного материала можно сделать вывод о том, что, если мы ищем оптимальное решение задачи линейного программирования, то необходимо выбрать наилучшее базисное допустимое решение (с наибольшим Z

для задачи на максимум и наименьшим Z для задачи на минимум), удовлетворяющее $Ax = b$.

Определение. Для любой задачи линейного программирования два базисных допустимых решения являются **смежными**, если у них $m - 1$ базисная переменная являются общими.

В нашем примере базисные допустимые решения, соответствующие точкам C и E , являются смежными, а точкам E и F – несмежными.

Число базисных решений задачи линейного программирования определяется числом сочетаний из n по m : $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$. Так, для задачи с 20 переменными и 10 ограничениями число базисных допустимых решений равно $C_{20}^{10} = \frac{20!}{10!10!} = 184756$.

Опыт работы с симплекс методом показывает, что оптимальное решение находится после сопоставления не более чем $3m$ базисных допустимых решений.

2.3. АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС МЕТОДА

Рассмотрим алгоритм основного метода решения задач линейного программирования – симплекс метода. В общем виде процедура решения распадается на 5 шагов:

Шаг 1. Избавление от отрицательных правых частей ограничений (если таковые имеются). Приведение задачи линейного программирования к стандартной форме.

Шаг 2. Выделение базисного допустимого решения (если возможно) из стандартной формы.

Шаг 3. Определение, является ли полученное решение оптимальным. Если да, то процесс решения окончен, если нет, то переходят к шагу 4.

Шаг 4. Определение переменной, которая войдет в базис, и переменной, которая выйдет из базиса таким образом, чтобы новое допустимое базисное решение было лучше предыдущего (по значению целевой функции).

Шаг 5. Использование эквивалентных преобразований Жордана-Гаусса для нахождения нового допустимого базисного решения. Переход к шагу 3.

При выполнении шагов симплекс метода целевая функция

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

с целью однородности представления данных (с одной стороны, ограничения – переменные, с другой – константы) записывается в виде

$$Z - c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n = 0.$$

Пример.

Мебельная фабрика может производить письменные столы, кухонные столы и стулья. При изготовлении мебели используются древесина и труд рабочих на столярном и отделочном участках. Необходимое количество ресурсов для выпуска столов и стульев приведено в таблице

Ресурс	Письменный стол	Кухонный стол	Стул
Древесина	8 м ²	6 м ²	1 м ²
Отделочные работы	4 часа	2 часа	1.5 часа
Столярные работы	2 часа	1.5 часа	0.5 часа

В распоряжении фабрики имеется 48 м² древесины, 20 часов времени на участке отделки и 8 часов на столярном участке. Известно также, что потребность в письменных столах и стульях не ограничена. Однако не более пяти кухонных столов может быть продано ежедневно. Цены

реализации продукции следующие: письменный стол – 60 грн., кухонный стол – 30 грн., стул – 20 грн.

Учитывая, что все ресурсы уже куплены, мебельная фабрика хотела бы использовать их наилучшим образом, приносящим наивысший доход.

Решение.

Определим переменные.

Пусть

x_1 – количество производимых ежедневно письменных столов;

x_2 – количество производимых ежедневно кухонных столов;

x_3 – количество производимых ежедневно стульев.

Математическая модель имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \max Z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 &\leq 48, \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 &\leq 20, \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 &\leq 8, \\ x_2 &\leq 5, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Преобразуем модель к стандартной форме, дополнив ее ограничениями на знак переменных $S_i \geq 0, i = \overline{1,4}$.

$$\begin{aligned} \max Z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + S_1 &= 48, \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + S_2 &= 20, \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + S_3 &= 8, \\ x_2 + S_4 &= 5, \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3, S_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Запишем целевую функцию в виде

$$Z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0.$$

Представим модель после преобразований следующим образом:

	Базисные переменные
$8x_1 + 6x_2 + x_3 + S_1 = 48$	$S_1 = 48$
$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + S_2 = 20$	$S_2 = 20$
$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + S_3 = 8$	$S_3 = 8$
$x_2 + S_4 = 5$	$S_4 = 5$
$Z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$	$Z = 0$

Анализируя таблицу, видим, что, если мы примем x_1 , x_2 и x_3 , равными нулю, то есть возьмем их в качестве небазисных переменных (число небазисных переменных должно быть равно $n - m = 7 - 4 = 3$), то в качестве базисных могут выступить S_1, S_2, S_3 и S_4 (столбцы с этими переменными линейно независимы). Итак, $NBV = \{x_1, x_2, x_3\}$, $BV = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$.

В нашем случае исходное базисное допустимое решение $S_1 = 48$, $S_2 = 20$, $S_3 = 8$ и $S_4 = 5$. Данное решение приносит значение целевой функции, равное нулю ($Z=0$), так как базисные переменные незримо присутствуют в целевой функции с нулевыми коэффициентами.

Важно заметить, что выделенное базисное допустимое решение имеет такую особенность, что коэффициенты при этих переменных равны единице, и они присутствуют только в одном уравнении каждая, не пересекаясь друг с другом. Такой допустимый базис называется **единичным**.

Как видно из данного примера, дополняющая переменная может быть принята в качестве базисной только тогда, когда правая часть ограничения неотрицательна. В противном случае необходимо предварительное преобразование тех ограничений, которые в исходной форме имели отрицательную правую часть (путем умножения всего ограничения на -1).

Определим, является ли текущее допустимое базисное решение оптимальным?

После выделения исходного допустимого базисного решения важно убедиться в том, что полученное решение оптимально. Если нет, то необходимо найти новое сочетание базисных переменных, при котором значение целевой функции лучше ранее достигнутого.

В нашем примере

$$Z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 = 0,$$

так как ни одна из базисных переменных S_1, S_2, S_3 и S_4 не присутствует в целевой функции.

Используем выражение целевой функции для определения того, какая из небазисных переменных, в случае введения ее в разряд базисных, принесет наибольший эффект. Будем по очереди давать приращение, равное единице, каждой из переменных.

Так, если переменная x_1 примет значение 1, то

$$Z = 60 \times 1 + 30 \times 0 + 20 \times 0 = 60.$$

Если x_2 примет значение 1, то

$$Z = 60 \times 0 + 30 \times 1 + 20 \times 0 = 30.$$

И наконец, если $x_3 = 1$, то

$$Z = 60 \times 0 + 30 \times 0 + 20 \times 1 = 20.$$

Приведенные результаты позволяют сделать вывод о том, что ранее полученное допустимое базисное решение не является оптимальным и его можно улучшить за счет любой из небазисных переменных. Из трех переменных выбираем x_1 , так как введение ее в базис дает наибольший прирост целевой функции. Если рассмотреть приведенную выше таблицу, то можно заметить, что мы выбрали переменную с наибольшим по модулю коэффициентом среди отрицательных (-60).

После определения переменной, входящей в базис, необходимо решить, с каким значением она будет присутствовать в базисе и какая из переменных покинет базис?

Эти два вопроса взаимосвязаны между собой.

Значение переменной, входящей в базис, должно быть таким, чтобы переменная, выходящая из базиса, приняла значение, равное нулю и, с другой стороны, ни одна из оставшихся переменных не стала отрицательной.

Для того чтобы ответить на поставленные вопросы, рассмотрим систему ограничений с учетом того, что переменная x_1 входит в базис, то есть она становится отличной от нуля, а переменные x_2 и x_3 по-прежнему остаются свободными. Таким образом, в ограничениях присутствуют только прежние базисные переменные S_1, S_2, S_3 и S_4 , одна из которых должна будет покинуть базис, и переменная x_1 , как наиболее подходящий кандидат в базисные переменные

$$\begin{aligned} 8x_1 + S_1 &= 48, \\ 4x_1 + S_2 &= 20, \\ 2x_1 + S_3 &= 8, \\ S_4 &= 5. \end{aligned}$$

Решим уравнения относительно переменных S_1, S_2, S_3 и S_4

$$\begin{aligned} S_1 &= 48 - 8x_1, \\ S_2 &= 20 - 4x_1, \\ S_3 &= 8 - 2x_1, \\ S_4 &= 5. \end{aligned}$$

Нам необходимо найти такое значение x_1 , при котором одна из переменных S_1, S_2, S_3 или S_4 станет равной нулю, а остальные по-прежнему будут неотрицательными.

Из первого ограничения имеем $- 0 = 48 - 8x_1$ или $x_1 = 6$,

из второго ограничения: $- 0 = 20 - 4x_1$ или $x_1 = 5$,

из третьего ограничения: $- 0 = 8 - 2x_1$ или $x_1 = 4$,

из четвертого ограничения: $-$ при любом значении x_1 переменная S_4 останется неотрицательной.

Анализируя полученные результаты, делаем вывод, что $x_1 = 4$. В этом случае S_3 станет равной нулю, а остальные переменные останутся неотрицательными

$$S_1 = 48 - 8 \times 4 = 16,$$

$$S_2 = 20 - 4 \times 4 = 4,$$

$$S_3 = 8 - 2 \times 4 = 0.$$

Никакое другое значение x_1 , превышающее 4, нас не удовлетворит. Например, пусть $x_1 = 5$, тогда

$$S_1 = 48 - 8 \times 5 = 8,$$

$$S_2 = 20 - 4 \times 5 = 0,$$

$$S_3 = 8 - 2 \times 5 = -2 \text{ (недопустимое решение).}$$

Дальнейшее увеличение значения x_1 только ухудшит результат.

Отсюда следует **правило нахождения переменной, выходящей из базиса и определения значения вновь вводимой в базис переменной**.

Для того чтобы определить переменную, покидающую базис, необходимо рассчитать отношения правых частей ограничений к положительным коэффициентам в столбце входящей в базис переменной и выбрать наименьшее из них. Соответствующая минимальному отношению переменная покинет базис. Само минимальное отношение и показывает значение переменной, входящей в базис.

Данное отношение носит название **симплексного**

Симплексное отношение = $\frac{\text{Правая часть ограничения}}{\text{Положительный коэффициент в столбце входящей в базис переменной}}$
--

В данном примере мы воспользовались этим отношением $\min\left\{\frac{48}{8}, \frac{20}{4}, \frac{8}{2}\right\} = 4$, для определения того, что переменная x_1 войдет в базис со значением 4, а покинет его переменная S_3 .

При расчете симплексных отношений мы увидели, что, если переменная не присутствует в ограничении (иначе, она присутствует в нем с коэффициентом, равным нулю), то значение соответствующей базисной переменной не зависит от того, с каким значением войдет в базис новая переменная.

Аналогичный вывод можно сделать и для случая, когда коэффициент при входящей в базис переменной является отрицательным.

Например, пусть имеется ограничение

$$-2x_1 + S_5 = 10,$$

где x_1 – переменная, входящая в базис, а S_5 – базисная переменная. Решим уравнение относительно S_5

$$S_5 = 10 + 2x_1.$$

Так как $x_1 \geq 0$, то никакое положительное ее значение не даст возможность переменной S_5 стать равной нулю. Отсюда вывод: при расчете симплексных отношений учитываются *только положительные коэффициенты* в столбце переменной, входящей в базис.

Столбец переменной, входящей в базис, называется **разрешающим**.

Строка, соответствующая переменной, выходящей из базиса, называется **разрешающей**.

Элемент, находящийся на пересечении разрешающих столбца и строки, также носит название **разрешающего**.

Перейдем к этапу нахождения нового базисного допустимого решения.

Итак, мы определили, что в базис входит переменная x_1 со значением 4, а S_3 покидает базис. Нашей задачей является определение значений остальных переменных. Для выполнения преобразований таблицы будем пользоваться методом Жордана–Гаусса.

В нашу задачу входит:

1. Получение на месте разрешающего элемента единицы (как и раньше, мы должны иметь единичный базис);
2. Получение нулей для всех остальных элементов разрешающего столбца.

Чтобы ответить на первый вопрос, разделим все элементы третьего ограничения (разрешающей строки) на 2. Получим выражение

$$x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5S_3 = 4.$$

Дальнейшие преобразования таблицы будем осуществлять, используя полученный результат. Для получения нулевого коэффициента при переменной x_1 в первом ограничении, умножим преобразованное третье ограничение на 8 и вычтем его из первого уравнения

$$\begin{array}{rcl} 8x_1 + 6x_2 + x_3 + S_1 & = & 48 \\ - & & \\ 8 \times (x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5S_3 = 4) & & \\ \hline 0x_1 + 0x_2 + x_3 + S_1 - 4S_3 & = & 16. \end{array}$$

Для получения нулевого коэффициента при переменной x_1 во втором ограничении, умножим преобразованное третье уравнение на 4 и вычтем его из второго уравнения

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + S_2 & = & 20 \\ - & & \\ 4 \times (x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5S_3 = 4) & & \\ \hline 0x_1 - x_2 + 0.5x_3 + S_2 - 2S_3 & = & 4. \end{array}$$

Для четвертого ограничения преобразований делать не надо, так как в нем не присутствует переменная x_1

$$x_2 + S_4 = 5.$$

Строка целевой функции преобразуется аналогично: умножаем третье ограничение на 60 и складываем его с элементами целевой функции

$$\begin{array}{rcl} Z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 & & = 0 \\ + & & \\ 60 \times (x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5S_3 = 4) & & \\ \hline Z - 0x_1 + 15x_2 - 5x_3 + 30S_3 & & = 240. \end{array}$$

Занесем результаты произведенных преобразований в таблицу:

					Базисные переменные
	$-x_3 + S_1$	$-4S_3$	$= 16$		$S_1 = 16$
	$-x_2 + 0.5x_3$	$+S_2 - 2S_3$	$= 4$		$S_2 = 4$
$x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3$		$+0.5S_3$	$= 4$		$x_1 = 4$
$x_2 +$		$+S_4$	$= 5$		$S_4 = 5$
Z	$+15x_2 - 5x_3$	$+30S_3$	$= 240$		$Z = 240$

Как видно из таблицы, новое базисное допустимое решение существенно улучшило значение целевой функции. Оно стало равно 240. Такой результат следовало предвидеть, так как переменная x_1 вошла в базис со значением 4, а ее коэффициент в целевой функции равен 60, отсюда $60 \times 4 = 240$.

Итак, новое базисное решение состоит из переменных: $BV = \{S_1, S_2, x_1, S_4\}$. Оно является смежным по отношению к исходному, так как у этих двух базисных допустимых решений три из четырех базисных переменных общие. Переход от одного допустимого базисного решения к другому, смежному, носит название **итерации**.

Теперь нам необходимо проверить, является ли оптимальным новое допустимое базисное решение. Иными словами, нужно убедиться – есть или нет среди небазисных переменных $NBV = \{S_3, x_2, x_3\}$ такая, которая сможет улучшить значение целевой функции.

Для того чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к целевой функции

$$Z = 240 - 15x_2 + 5x_3 - 30S_3.$$

Давая приращения переменным x_2 и S_3 , мы не сможем увеличить значение Z , а скорее, наоборот. С другой стороны, приняв значение x_3 , равным единице, мы увеличиваем значение целевой функции на 5 единиц. Отсюда делаем вывод:

полученное допустимое базисное решение не является оптимальным и его можно улучшить за счет введения новой базисной переменной x_3 .

Как и в предыдущем случае, мы выбрали из таблицы ту переменную для ввода в базис, у которой отрицательный коэффициент в строке целевой функции.

Выполняем проделанные ранее эквивалентные преобразования для получения нового допустимого базисного решения:

1. Находим разрешающую строку, используя ранее сформулированное правило;
2. Получаем на месте разрешающего элемента единицу;
3. Получаем нули при переменной x_3 во всех остальных ограничениях.

Рассчитываем симплексные отношения:

Первое ограничение	– не рассчитывается, так как при x_3 – отрицательный коэффициент;
второе	– $4/0.5 = 8$,
третье	– $4/0.25 = 16$,
четвертое	– не рассчитывается, так как при x_3 – отрицательный коэффициент.

Находим $\min\{8, 16\} = 8$.

Следовательно, из базиса выйдет переменная S_2 , а переменная x_3 войдет в него со значением 8.

Делим разрешающую строку на 0.5, чтобы получить единицу при x_3 на месте разрешающего элемента

$$-2x_2 + x_3 + 2S_2 - 4S_3 = 8.$$

Получаем нулевой коэффициент при переменной x_3 в первом ограничении. Для этого складываем его с преобразованным вторым ограничением

$$\begin{array}{rcl} & -x_3 + S_1 & -4S_3 = 16 \\ + & & \\ & -2x_2 + x_3 + 2S_2 - 4S_3 & = 8 \\ \hline & -2x_2 + 0x_3 + S_1 + 2S_2 - 8S_3 & = 24. \end{array}$$

Преобразуем третье ограничение: вычтем из него второе ограничение, умноженное на 0.25

$$\begin{array}{rcl} & x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 & + 0.5S_3 = 4 \\ - & & \\ & 0.25 \times (-2x_2 + x_3 + 2S_2 - 4S_3 = 8) & \\ \hline & x_1 + 1.25x_2 + 0x_3 - 0.5S_2 + 1.5S_3 & = 2. \end{array}$$

Четвертое ограничение по-прежнему не изменяется, так как в нем отсутствует переменная x_3

$$x_2 + S_4 = 5.$$

Пересчитаем целевую функцию: умножим второе преобразованное ограничение на 5 и сложим с целевой функцией

$$\begin{array}{rcl} Z & +15x_2 - 5x_3 & + 30S_3 = 240 \\ + & & \\ & 5 \times (-2x_2 + x_3 + 2S_2 - 4S_3 = 8) & \\ \hline Z & + 5x_2 + 0x_3 + 10S_2 + 10S_3 & = 280. \end{array}$$

Результаты расчетов представлены ниже в таблице

						Базисные переменные
	$-2x_2$	$+ S_1$	$+ 2S_2$	$- 8S_3$	$= 24$	$S_1 = 24$
	$-2x_2 + x_3$	$+ 2S_2$	$- 4S_3$	$= 8$		$x_3 = 8$
	$x_1 + 1.25x_2$	$- 0.5S_2$	$+ 1.5S_3$	$= 2$		$x_1 = 2$
	$x_2 +$			$+ S_4 = 5$		$S_4 = 5$
Z	$+ 5x_2$	$+ 10S_2$	$+ 10S_3$	$= 280$		$Z = 280$

Нами получен новый базис $BV = \{S_1, x_3, x_1, S_4\}$.

Необходимо проверить его на оптимальность. Из строки целевой функции $Z + 5x_2 + 10S_2 + 10S_3 = 280$ видно, что при переменных нет ни одного отрицательного коэффициента. Таким образом, отсутствует переменная, которая могла бы еще улучшить значение целевой функции. Для большей убедительности, перепишем целевую функцию

$$Z = 280 - 5x_2 - 10S_2 - 10S_3.$$

Как видно из данного выражения, приращение ни одной из переменных не дает положительного эффекта. Отсюда делаем вывод, что на последней итерации получено оптимальное решение: $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 8, Z = 280$. Данное решение говорит о том, что мебельной фабрике необходимо производить два письменных стола и восемь стульев. При этом ее доход составит 280 грн.

Анализ полученного решения показывает, что запасы двух видов ресурсов использованы полностью: время отделочного и столярного участков. Об этом говорят значения переменных $S_2 = S_3 = 0$. Оценка ценности данных ресурсов приведена в строке целевой функции: при указанных переменных стоят коэффициенты 10. Эти величины носят название **теневых цен** и показывают степень важности ресурса с точки зрения его вклада в оптимальный результат.

Теневые цены рассчитываются только для тех ресурсов, которые полностью использованы производственной системой. Ограничения по данным видам ресурсов являются связующими.

С другой стороны, 24 м^2 древесины остаются еще неиспользованными ($S_1 = 24$). Ограничение по выпуску кухонных столов также недовыполнено ($S_4 = 5$). В связи с нежестким выполнением данных ограничений теневые цены для них не рассчитываются (о какой дефицитности ресурса или важности продукции можно говорить, если имеется значительный запас ресурса или продукция выпущена не в полном объеме?).

В строке целевой функции коэффициент 5 при свободной переменной x_2 носит название **снижающей оценки** (английский эквивалент – *reduced cost*) или **альтернативной цены** (*opportunity cost*). Данная оценка имеет следующий смысл: если мы решим производить хотя бы один кухонный стол, то это снизит значение целевой функции на 5 единиц.

Результаты последней таблицы позволяют сделать заключение относительно **признака оптимальности** решения задачи линейного программирования на максимум целевой функции: *допустимое базисное решение будет оптимальным решением задачи линейного программирования, если в строке целевой функции все коэффициенты при переменных неотрицательны.*

В практике решения задач симплекс методом используют специальные таблицы, в которых первая колонка соответствует базисным переменным. Во второй колонке содержится информация о коэффициентах при базисных переменных в целевой функции. Третья колонка отведена для правых частей ограничений или, что то же самое, для значений базисных переменных. Далее следуют колонки, соответствующие переменным задачи, расположенным в порядке их появления в модели. Под каждой переменной записывается коэффициент при данной переменной в целевой функции. И, наконец, еще одна колонка используется для расчета симплексного отношения. Общий вид симплексной таблицы представлен ниже

Колонка коэффициентов при базисных переменных в целевой функции			Колонка значений базисных переменных				Строка переменных задачи			
Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	...				Симплексное отношение
$Z - c_j$	–									
Строка целевой функции			Строка коэффициентов при переменных в целевой функции							

Следует отметить, что данный вид симплексной таблицы не единственный. Отличие других симплексных таблиц может касаться расположения отдельных

элементов модели (например, значений базисных переменных – в правой части таблицы перед колонкой "симплексное отношение), способа отражения переменных (например, в форме векторов) и т.п.

Рассмотрим исходную и заключительную таблицы для нашей задачи.

Исходная таблица

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	Симплексное отношение
			60	30	20	0	0	0	0	
S_1	0	48	8	6	1	1	0	0	0	6
S_2	0	20	4	2	1.5	0	1	0	0	5
S_3	0	8	2	1.5	0.5	0	0	1	0	4
S_4	0	5	0	1	0	0	0	0	1	–
$Z-c_j$	–	0	–60	–30	–20	0	0	0	0	

В данной таблице выделены *разрешающие столбец, строка и элемент*.

Приведем таблицу с оптимальным решением (заключительную) без повторения действий симплекс метода, которые были использованы для получения необходимого результата

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4
			60	30	20	0	0	0	0
S_1	0	24	0	–2	0	1	2	–8	0
x_3	20	8	0	–2	1	0	2	–4	0
x_1	60	2	1	1.25	0	0	–0.5	1.5	0
S_4	0	5	0	1	0	0	0	0	1
$Z-c_j$	–	280	0	5	0	0	10	10	0

2.4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА МИНИМУМ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ СИМПЛЕКС МЕТОДОМ

Имеется два подхода к решению задач на минимум целевой функции:

1. Замена критерия $\min Z$ на $\max(-Z)$ путем умножения целевой функции на -1 ;
2. Изменение признака оптимальности.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}\min Z &= 2x_1 - 3x_2, \\ x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_1 - x_2 &\leq 6, \\ x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Используем первый подход.

Оптимальным решением задачи будет точка (x_1, x_2) , которая минимизирует выражение $Z = 2x_1 - 3x_2$ или, что равноценно, максимизирует выражение $-Z = -2x_1 + 3x_2$.

С учетом этого задача будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\max(-Z) &= -2x_1 + 3x_2, \\ x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_1 - x_2 &\leq 6, \\ x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Заменяя $(-Z)$ на W , получим модель

$$\begin{aligned}\max W &= -2x_1 + 3x_2, \\ x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_1 - x_2 &\leq 6, \\ x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Приведем задачу к стандартной форме. Введем в ограничения переменные S_1 и S_2 , и примем их в качестве исходных базисных. Решим задачу с помощью таблиц.

1 итерация

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	S_1	S_2	Симп. отнош.
			-2	3	0	0	
S_1	0	4	1	1	1	0	4
S_2	0	6	1	-1	0	1	—
$W-c_j$	—	0	2	-3	0	0	

В базис вводится переменная x_2 , а переменная S_1 покидает его.

2 итерация

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	S_1	S_2
			-2	3	0	0
x_2	3	4	1	1	1	0
S_2	0	10	2	0	1	1
$W-c_j$	—	12	5	0	3	0

Задача решена. Оптимальным является решение: $W = 12, x_1 = 0, x_2 = 4$. Учитывая, что $W = -Z$, находим: $Z_{\min} = -12$.

Второй подход заключается в том, что признаком оптимальности решения задачи линейного программирования на минимум целевой функции является наличие неположительных элементов в строке целевой функции.

Для иллюстрации подхода решим следующую задачу:

$$\begin{aligned}\min Z &= 4x_1 - x_2, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4,\end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

После приведения задачи к стандартной форме и выделения базиса построим исходную симплексную таблицу

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	S_1	S_2	Симп. отнош.
			4	-1	0	0	
S_1	0	8	2	1	1	0	8
S_2	0	4	-1	2	0	1	2
$Z-c_j$	-	0	-4	1	0	0	

На первой итерации переменная x_2 входит в базис, а переменная S_2 покидает его. После пересчетов получаем новую таблицу, которая содержит оптимальное решение, так как в строке целевой функции нет положительных элементов

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	S_1	S_2
			4	-1	0	0
S_1	0	6	2.5	0	1	-0.5
x_2	-1	2	-0.5	1	0	0.5
$Z-c_j$	-	-2	-3.5	0	0	-0.5

Оптимальное решение $Z_{\min} = -2, x_1 = 0, x_2 = 2$. Значение переменной $S_1 = 6$ свидетельствует о том, что в первом ограничении недоиспользуются восемь единиц потенциальных ресурсов.