

ГЛАВА 3. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Очень часто применение линейного программирования к решению экономических задач требует не только ответа на вопросы: какими будут выпуски продукции в оптимальном решении, каковы при этом затраты ресурсов, как используются производственные мощности объекта, какие качественные характеристики продукции достигаются, каков размер прибыли или затрат, но также и что произойдет, если

- ♦ изменятся (увеличатся или уменьшатся) объемы поставок сырья;
 - ♦ изменится конъюнктура рынка, в результате чего изменится (увеличится или уменьшится) спрос на продукцию;
 - ♦ изменится цена продаваемой продукции или покупаемого ресурса;
 - ♦ изменится технология производства продукции, в результате чего изменятся нормы затрат ресурсов и выхода готовой продукции;
 - ♦ изменятся условия функционирования экономического объекта;
 - ♦ возникнет необходимость во включении в программу выпуска новых видов продукции или, наоборот, сокращении выпуска тех или иных изделий и т.д.
- и как это повлияет на оптимальное решение?

На все эти и многие другие вопросы можно получить ответ без проведения экономического эксперимента (и, следовательно, без дополнительных затрат ресурсов и других нежелательных последствий) с помощью анализа математической модели и оптимального решения. Для этих целей в теории линейного программирования разработан специальный раздел «Анализ чувствительности модели линейного программирования и полученного решения», который базируется на использовании матричной алгебры, теории двойственности и других разделов математики. Рассмотрим отдельные положения анализа чувствительности.

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Анализ чувствительности – изучение влияния изменения параметров модели на полученное решение.

В анализе чувствительности большое значение имеет принадлежность ограничений модели к определенному типу. В зависимости от того, в какой степени ограничения влияют на полученное решение, они могут быть отнесены к одному из трех типов:

- активные (связующие);
- неактивные (несвязующие);
- излишние (ненужные).

Ограничение считается *активным* или *неактивным* по отношению к угловой точке области допустимых значений.

Активное ограничение прямо «контролирует» оптимальное значение целевой функции, то есть оно проходит через угловую точку, в которой получено оптимальное решение.

Неактивное ограничение – это такое ограничение, которое не проходит через оптимальное решение, но определяет область допустимых значений задачи.

Излишнее ограничение – это такое ограничение, удаление которого из модели не изменяет области допустимых значений (данные ограничения обычно находятся вне ОДЗ, но не противоречат ей). Однако делать этого не следует, так как, являясь

излишними для указанного набора данных, они в то же время могут изменить свой статус при изменении некоторых параметров.

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу на производство игрушек (машин и кораблей). Напомним, как выглядит математическая модель:

$$\begin{aligned}\max Z &= 3x_1 + 2x_2, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 100, \\ x_1 + x_2 &\leq 80, \\ x_1 &\leq 40, \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Как видно из графика (рис. 3.1), ограничения по отделочным и столярным работам являются активными, так как они «контролируют» оптимальную (угловую) точку B .

Ограничения по потребности в машинах и на знак переменной являются неактивными, но они определяют область допустимых значений.

Рассматриваемая задача не содержит излишних ограничений. Однако ограничение данного типа легко может быть представлено на том же графике (например, ограничение $1.2x_1 + x_2 \leq 120$).

Активное ограничение всегда выполняется как равенство (независимо от того, каким типом оно было представлено в модели: « $\leq$ », « $=$ » или « $\geq$ »). Если в модели встречаются ограничения типа « $=$ », то они всегда активные.

Ограничения типа « $>$ » или « $<$ » никогда активными не бывают. Неактивные и излишние ограничения всегда выполняются как неравенства.

Для любого типа ограничений используются понятия свободных и избыточных переменных, которые характеризуют недовыполнение (для ограничений типа « $\leq$ ») или перевыполнение (для ограничений типа « $\geq$ ») значения правой части ограничения в результате решения задачи.

Сжатие и ослабление ограничений типа неравенств.

Сжатие ограничения типа неравенства означает усложнение его с точки зрения выполнения. Для ограничений типа « $\leq$ » сжатие означает уменьшение значения его правой части, для ограничений типа « $\geq$ » – увеличение значения его правой части.

Ослабление ограничения типа неравенства означает облегчение условий его выполнения. Для ограничений типа « $\leq$ » это означает увеличение его правой части, для ограничений типа « $\geq$ » – ее уменьшение.

В общем, *сжатие ограничений типа неравенств сокращает область допустимых значений задачи, ослабление – расширяет ее.*

Излишние ограничения – исключение. Их ослабление не оказывает никакого влияния на ОДЗ. Сжатие ограничений данного типа не оказывает влияния на ОДЗ до тех пор, пока они остаются в ранге излишних. Однако, если в результате сжатия они перешли в другую категорию, то дальнейшее их сжатие оказывает влияние на ОДЗ.

Рассмотрим графическую интерпретацию изменений параметров модели.

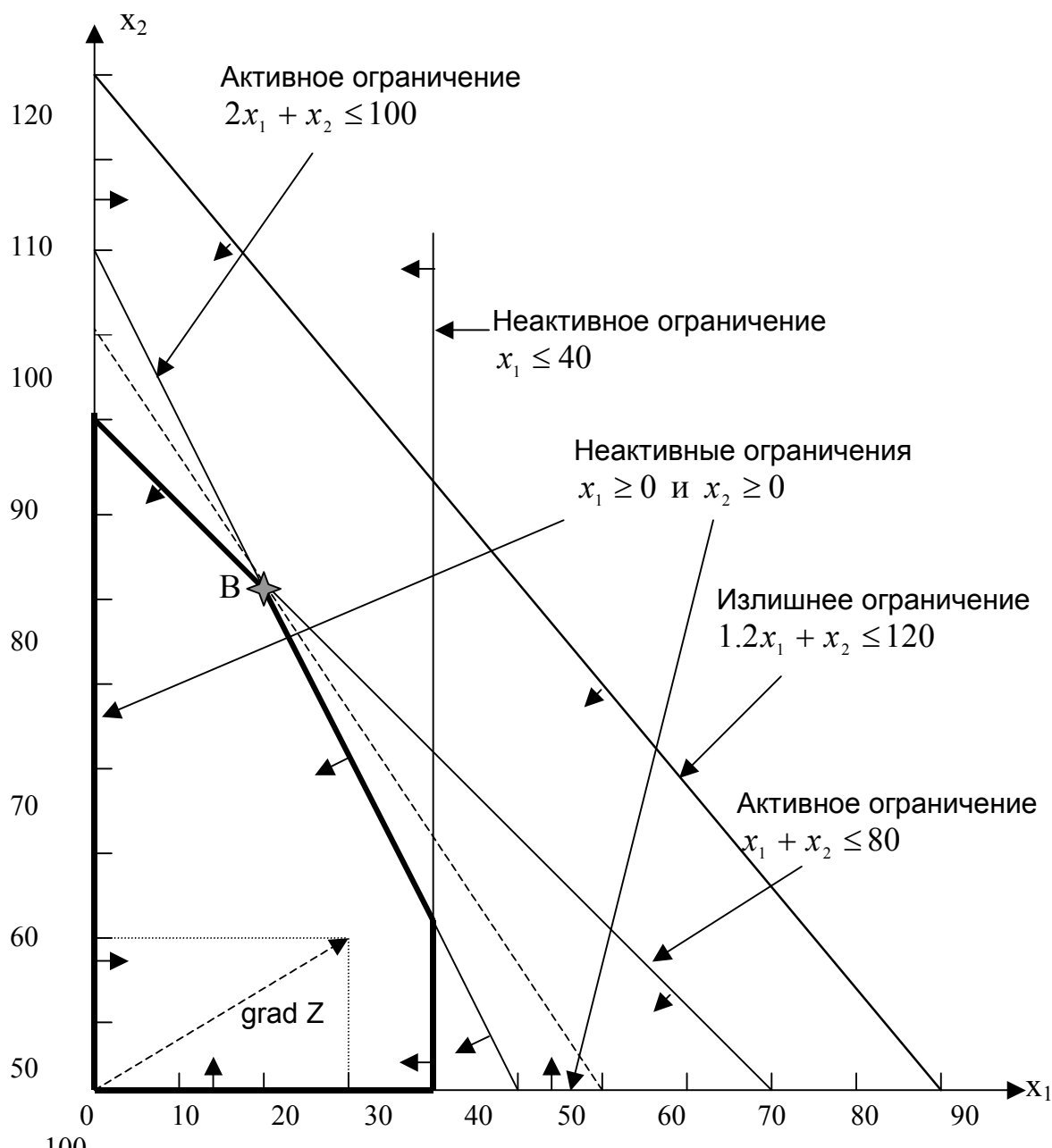


Рис. 3.1. Иллюстрация типов ограничений для задачи игрушечной фабрики

3.1.1. ИЗМЕНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ c_j

Изменение значений c_j не изменяет ОДЗ. Оно только затрагивает изменение направления движения (возрастания или убывания) изоцелей. При существенном изменении направления может произойти изменение угловой точки, в которой достигается оптимум.

Если угловая точка не изменяется, то и значения переменных сохраняются прежними. Изменяется только значение целевой функции.

С точки зрения анализа чувствительности, представляет интерес нахождение пределов изменения коэффициентов c_j , в рамках которых текущий базис остается

неизменным. Для определения этих пределов снова обратимся к графической иллюстрации задачи.

Если вклад в прибыль от продажи машин сильно возрастет, то будет целесообразно производить больше машин. В этом случае переменная S_3 (для третьего неравенства) станет свободной. И, наоборот, если прибыль резко снизится, то станет выгоднее производить больше кораблей. В этом случае переменная x_1 выйдет из базиса и станет свободной. Рассмотрим, как определить значения показателей критерия оптимальности, для которых текущий базис остается неизменным.

Пусть c_1 – вклад в прибыль от реализации машины. В настоящий момент $c_1 = 3$ и каждая изоцель имеет форму

$$3x_1 + 2x_2 = \text{const}$$

или иначе

$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{\text{const}}{2}.$$

Наклон изоцели $k_1 = -1.5$. Из графика (рис 3.2) видно, что, если изменения коэффициента c_1 сделают изоцель спускающейся к оси Ox_1 более полого, чем ограничение по участку отделки, то оптимальное решение изменится. Из точки B оно переместится в точку A .

Если прибыль от реализации машины равна c_1 , то наклон изоцели определяется через $k_1 = -c_1/2$. Так как наклон для ограничения по участку отделки равен -1 ($x_2 = -x_1 + 80$), то для того чтобы наклон изоцели был более пологим, чем у ограничения по участку отделки необходимо выполнение условия

$$-c_1/2 > -1, \text{ или } c_1 < 2.$$

В этом случае текущий базис перестанет быть оптимальным, новое решение будет находиться в точке $A(0,80)$. Значение целевой функции составит $Z = 160$.

Если изоцель будет иметь более крутой наклон, чем ограничение по столярному участку, которое имеет значение $k = -2$, то оптимальная точка переместится в точку $C(40,20)$. Значение Z будет определяться в зависимости от значения коэффициента c_1 . Предельная точка для данного коэффициента находится из соотношения

$$-c_1/2 < -2, \text{ или } c_1 > 4.$$

Таким образом, угловая точка не изменится, пока c_1 находится в пределах:

$$2 \leq c_1 \leq 4.$$

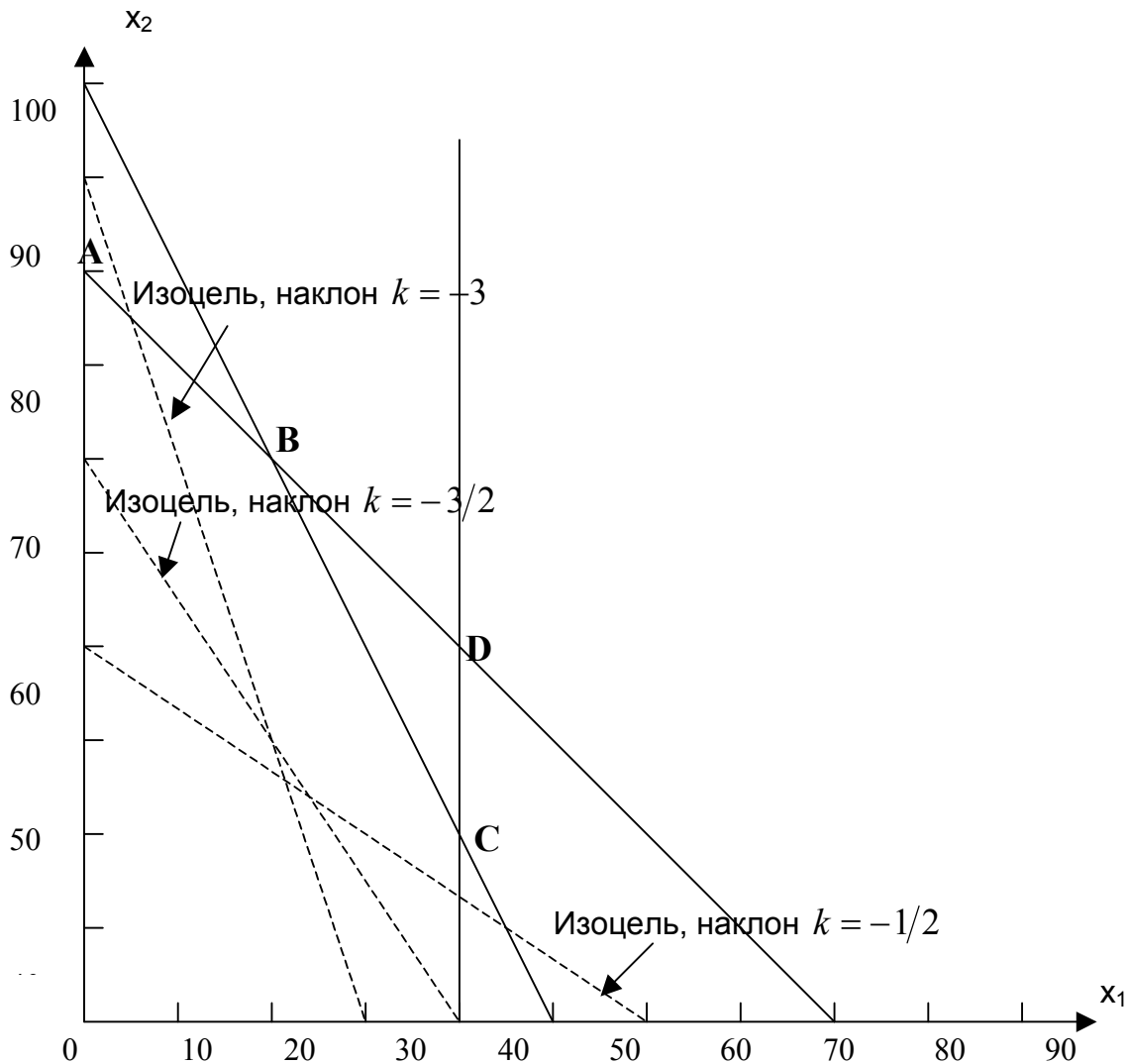


Рис. 3.2. Иллюстрация изменений наклона изоцели

В этом случае фабрика будет выпускать 20 машин и 60 кораблей.
Расчет пределов для c_2 следующий:

$$3x_1 + 2x_2 = \text{const},$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}x_2 + \frac{\text{const}}{3}.$$

Из ограничений имеем

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + 50,$$

$$x_1 = -x_2 + 80,$$

отсюда

$$-c_2/3 > -1/2 \Rightarrow c_2 < 3/2,$$

$$-c_2/3 < -1 \Rightarrow c_2 > 3.$$

Пределы устойчивости базиса для c_2 такие: $3/2 \leq c_2 \leq 3$.

3.1.2. ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТА ИЗМЕНЕНИЯ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Графический анализ может быть также использован для определения влияния изменения правой части ограничения на базис оптимального решения и нахождения таких ее значений, когда наступает изменение базиса (см. рис.3.3).

Пусть b_1 – количество доступного времени по столярному участку. Текущее значение $b_1 = 100$. Рассмотрим, для каких значений b_1 текущий базис остается оптимальным. Изменение b_1 перемещает ограничение (отрезок прямой) параллельно его текущей позиции. В оптимальной точке $B(20,60)$ пересекаются ограничения по участку отделки и столярному участку. Если мы изменяем значение b_1 , то до тех пор, пока точка, в которой вышеупомянутые ограничения являются связующими, остается допустимой (принадлежит ОДЗ), оптимальное решение будет находиться на пересечении этих ограничений.

Так, если $b_1 > 120$, то точка, в которой ограничения по столярному участку и участку отделки являются связующими, будет лежать ниже точки D , то есть когда $x_1 > 40$, что выходит за пределы ОДЗ. Так, для $b_1 > 120$ текущий базис больше не будет оптимальным.

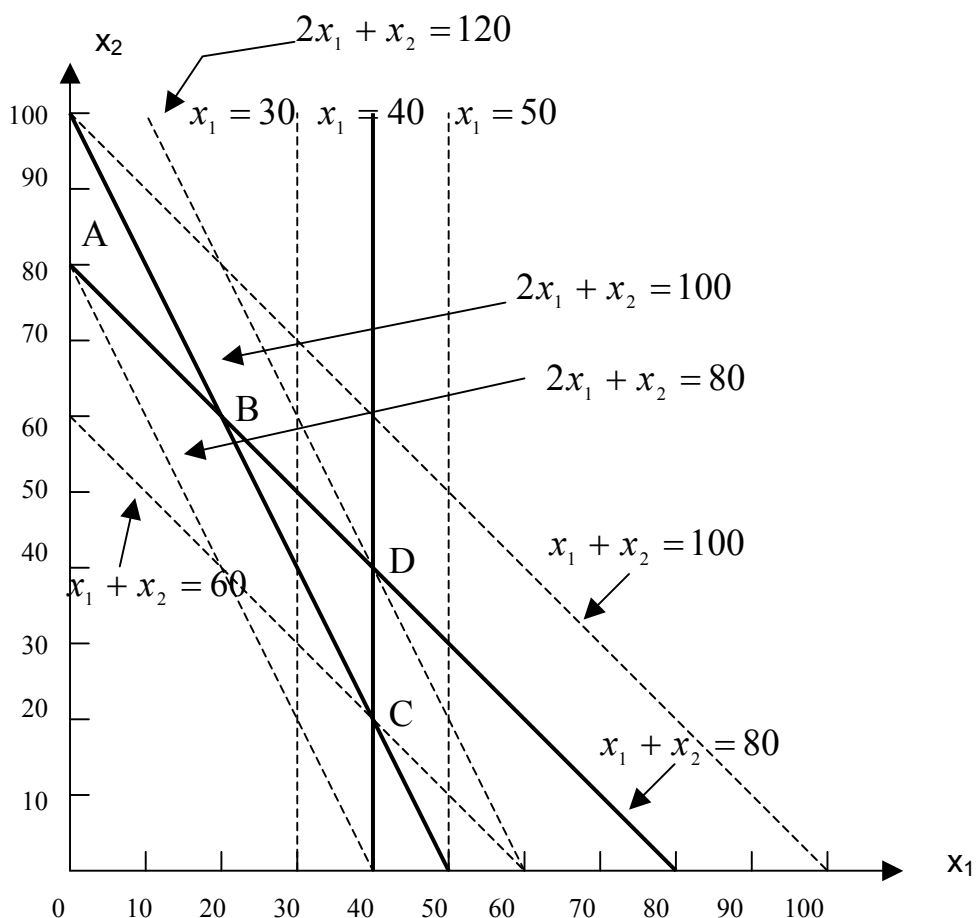


Рис. 3.3. Иллюстрация изменения правых частей ограничений

Аналогично для $b_1 < 80$. В данном случае ограничения по столярному участку и участку отделки будут связующими за пределами ОДЗ, то есть когда $x_1 < 0$.

Таким образом, если все остальные параметры не изменяются, то текущий базис остается оптимальным, пока $80 \leq b_1 \leq 120$. Следует отметить, что хотя при $80 \leq b_1 \leq 120$ текущий базис остается оптимальным, значения переменных и целевой функции изменяются.

Определим теперь, как повлияет изменение правых частей ограничений на значения переменных. Пусть значение b_1 увеличилось на Δ_1 часов, то есть $b_1 = 100 + \Delta_1$. Как видно из графика, пределы изменения правой части данного ограничения составляют $-20 \leq \Delta_1 \leq 20$.

Так как решение находится на пересечении двух отрезков прямых (для участка отделки и столярного участка), то для нахождения новых значений переменных необходимо решить систему следующих уравнений:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 100 + \Delta_1, \\ x_1 + x_2 &= 80. \end{aligned}$$

Это принесет следующие значения переменных: $x_1 = 20 + \Delta_1$; $x_2 = 60 - \Delta_1$. То есть рост количества доступных для использования часов столярного участка увеличит количество выпускаемых машин и уменьшит количество выпускаемых кораблей.

Для значения правой части ограничения по отделочному участку, b_2 пределы изменения аналогичны: $-20 \leq \Delta_2 \leq 20$.

Для определения значений переменных при изменении b_2 на Δ_2 решаем систему уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 100, \\ x_1 + x_2 &= 80 + \Delta_2. \end{aligned}$$

В этом случае $x_1 = 20 - \Delta_2$; $x_2 = 60 + 2\Delta_2$.

Наконец, для третьего ограничения (по количеству производимых машин) пределы изменения текущего базиса определяются только нижней границей, то есть $\Delta_3 = -20$. Увеличение b_3 не принесет изменения текущего базиса, так как решение будет находиться на пересечении прямых, отражающих ограничения по столярному и отделочному участкам, то есть

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 100, \\ x_1 + x_2 &= 80. \end{aligned}$$

Итак, сделаем краткие выводы:

1. Изменение значений правых частей активных (связующих) ограничений приводит к перемещению местонахождения угловой точки. Если изменение незначительное, то базис может остаться прежним. В противном случае возможны изменения базиса.

2. Изменение значений правых частей неактивных ограничений не влияет на базис, если ограничение ослабляется. Если оно сжимается, то это может привести к тому, что ОДЗ сократится и повлечет за собой изменение угловой точки, где наблюдается оптимум (иными словами, оно из неактивных превратится в активное).

3.1.3. ПОНЯТИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ

Как будет видно в дальнейшем, для менеджеров очень часто представляется важным определить, как изменение значения правой части ограничения повлияет на оптимальное значение целевой функции ($Z_{\text{опт.}}$).

Исходя из этого мы определим *двойственную оценку* (или *теневую цену*, или *объективно обусловленную оценку*, что эквивалентно) для i -го ограничения как величину, на которую улучшится значение целевой функции (увеличится для задачи на $\max Z$ и уменьшится для задачи на $\min Z$) при увеличении правой части i -го ограничения на 1. Данное определение применимо только тогда, когда изменение правой части ограничения i не затрагивает изменения текущего оптимального базиса.

Для любой задачи линейного программирования с двумя переменными очень легко определить двойственную оценку для каждого ограничения. Так, например, если мы знаем, что в распоряжении игрушечной фабрики имеется $100 + \Delta_1$ часов на столярных работах (предполагая, что текущий базис остается оптимальным), то решением задачи будет: $x_1 = 20 + \Delta_1$ и $x_2 = 60 - \Delta_1$.

С учетом этого оптимальное значение целевой функции определится так:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 = 3(20 + \Delta_1) + 2(60 - \Delta_1) = 180 + \Delta_1.$$

Отсюда, если текущий базис остается оптимальным, то увеличение числа часов столярного участка на единицу ($\Delta_1 = 1$) принесет увеличение значения целевой функции на 1 грн. Таким образом, теневая цена по первому ограничению равна 1 грн. за один час.

Для второго ограничения рассмотрим случай, когда доступны $80 + \Delta_2$ часов на участке отделки при условии, что базис не изменяется. Тогда, учитывая, что $x_1 = 20 - \Delta_2$ и $x_2 = 60 + 2\Delta_2$, целевая функция будет равна

$$Z = 3x_1 + 2x_2 = 3(20 - \Delta_2) + 2(60 + 2\Delta_2) = 180 + \Delta_2.$$

Таким образом, увеличение числа часов работы отделочного участка на единицу ($\Delta_2 = 1$) принесет увеличение значения целевой функции на 1 грн. Отсюда, теневая цена для второго ограничения также равна 1 грн. за один час.

Найдем теневую цену для третьего ограничения. Если $b_3 = 40 + \Delta_3$, то значения переменных будут оптимальными, пока текущий базис не меняется. Это говорит о том, что теневая цена третьего ограничения равна 0 грн.

Исходя из приведенных рассуждений, можно заметить, что для ограничений, которые в результате решения задачи линейного программирования оказались связующими (т.е. активными), иначе, когда свободные или избыточные переменные

равны 0, двойственные оценки отличны от нуля. Когда же данные переменные положительны, то есть, когда ограничения не являются активными, двойственные оценки равны нулю.

Следует иметь в виду, что теневая цена может принимать любые значения: положительные, отрицательные, а также быть равной нулю.

Если увеличение значения правой части ограничения обеспечивает улучшение значения целевой функции, то соответствующая двойственная оценка будет положительной.

Если увеличение значения правой части ограничения обеспечивает ухудшение значения целевой функции, то соответствующая двойственная оценка будет отрицательной.

Нулевые значения двойственной оценки означают, что изменение значений правой части ограничения (в определенных пределах) не повлияет на значение целевой функции.

Краткое обобщение.

Пусть мы увеличили значение правой части i -го ограничения задачи линейного программирования на Δb_i ($\Delta b_i < 0$ означает уменьшение значения правой части i -го ограничения) и текущий базис остается неизменным. Тогда каждая единица, на которую увеличится значение правой части i -го ограничения, принесет увеличение значения целевой функции (для задачи на $\max Z$) на величину теневой цены данного ограничения (V_i). Отсюда новое значение целевой функции (Z') будет равно

$$Z' = Z + V_i \times \Delta b_i.$$

Для задачи на минимум

$$Z' = Z - V_i \times \Delta b_i.$$

Например, если на отделочном участке будут доступны 95 часов (т.е. $\Delta b_2 = 15$), то это принесет новое значение целевой функции, равное 195

$$Z' = 180 + 1 \times 15 = 195.$$

3.2. МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Допустим, что мы имеем дело с задачей линейного программирования с критерием на $\max Z$, которая уже подготовлена к решению методом искусственного базиса. В задаче m ограничений и n переменных. Среди переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ присутствуют переменные всех типов: основные, дополняющие, избыточные и искусственные.

Пусть модель имеет вид:

$$\begin{aligned}
Z &+ 5x_2 &+ 10S_2 + 10S_3 &= 280, \\
&- 2x_2 &+ S_1 + 2S_2 - 8S_3 &= 24, \\
&- 2x_2 + x_3 &+ 2S_2 - 4S_3 &= 8, \\
x_1 + 1.25x_2 &&- 0.5S_2 + 1.5S_3 &= 2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Для данного оптимального результата имеем

$$BV_1 = S_1, \quad BV_2 = x_3, \quad BV_3 = x_1,$$

тогда
$$X_{BV} = \begin{pmatrix} S_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

$$NBV = \{x_2, S_2, S_3\},$$

отсюда
$$X_{NBV} = \begin{pmatrix} x_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определим C_{BV} как вектор-строку размерностью $1 \times m$ коэффициентов целевой функции при базисных переменных

$$C_{BV} = (C_{BV_1}, C_{BV_2}, \dots, C_{BV_m}).$$

Элементы из C_{BV} – коэффициенты целевой функции при базисных переменных из таблицы с оптимальным решением. Так как в нашем примере $BV = \{S_1, x_3, x_1\}$, то $C_{BV} = (0, 20, 60)$.

Пусть C_{NBV} – вектор-строка размерностью $1 \times (n - m)$ коэффициентов целевой функции при небазисных переменных из таблицы с оптимальным решением

$$C_{NBV} = (C_{NBV_1}, C_{NBV_2}, \dots, C_{NBV_{n-m}}).$$

Так как $NBV = \{x_2, S_2, S_3\}$, то $C_{NBV} = (30, 0, 0)$.

Пусть B – матрица размерностью $m \times m$, чей j -й столбец представляет собой столбец коэффициентов при базисных переменных в основной задаче (3.1). В нашем примере первый столбец матрицы B – это столбец коэффициентов для S_1 из (3.1'), второй – столбец коэффициентов при x_3 из (3.1'), третий – столбец коэффициентов при x_1 из (3.1'):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть a_j – столбец коэффициентов (в ограничениях) для переменной x_j из задачи (3.1). Например, для x_2

$$a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{pmatrix},$$

для S_1 :

$$a_{(S_1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть N – матрица размерностью $m \times (n - m)$, чьи столбцы являются столбцами коэффициентов небазисных переменных задачи (3.1).

Для нашего примера

$$N = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

И наконец, b – вектор размерностью $m \times 1$ правых частей ограничений из (3.1)

$$b = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Используя введенные обозначения, запишем исходную задачу (3.1)

$$\begin{aligned} Z &= C_{BV} X_{BV} + C_{NBV} X_{NBV}, \\ BX_{BV} + NX_{NBV} &= b, \\ X_{BV}, X_{NBV} &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Наша задача с учетом этого запишется так:

$$\max Z = (0 \quad 20 \quad 60) \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + (30 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим ограничения модели (3.3) на B^{-1}

$$B^{-1}BX_{BV} + B^{-1}NX_{NBV} = B^{-1}b$$

или

$$X_{BV} + B^{-1}NX_{NBV} = B^{-1}b. \quad (3.4)$$

Выражение (3.4) есть ни что иное, как система ограничений таблицы с оптимальным решением. Таким образом, колонка коэффициентов при свободной переменной x_j в оптимальном решении определяется через $B^{-1}a_j$, а правая часть ограничений (свободный член) как $B^{-1}b$.

Методом Жордана-Гаусса находим B^{-1} :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1.25 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (3.4')$$

Определим теперь строку целевой функции в терминах основной задачи линейного программирования (3.1) и базисных переменных BV . Для этого умножим ограничения модели (3.3) на $C_{BV}B^{-1}$

$$C_{BV}B^{-1}BX_{BV} + C_{BV}B^{-1}NX_{NBV} = C_{BV}B^{-1}b$$

или

$$C_{BV}X_{BV} + C_{BV}B^{-1}NX_{NBV} = C_{BV}B^{-1}b. \quad (3.5)$$

Запишем целевую функцию в виде

$$Z - C_{BV}X_{BV} - C_{NBV}X_{NBV} = 0. \quad (3.6)$$

Складывая (3.5) и (3.6), получим

$$Z + (C_{BV}B^{-1}N - C_{NBV})X_{NBV} = C_{BV}B^{-1}b. \quad (3.7)$$

Данное выражение есть ни что иное, как выражение целевой функции в оптимальном решении. Для нахождения коэффициента при x_j в таблице с оптимальным решением необходимо вычислить

$$\tilde{c}_j = C_{BV}B^{-1}a_j - c_j. \quad (3.8)$$

Значение целевой функции рассчитывается как

$$Z = C_{BV}B^{-1}b \quad (3.9)$$

Для нашего примера

$$C_{BV} = (0 \quad 20 \quad 60), \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix},$$

тогда $C_{BV}B^{-1} = (0 \quad 10 \quad 10)$.

Из (3.8) получим значения коэффициентов целевой функции при небазисных переменных

$$\begin{aligned} \tilde{c}_2 &= C_{BV}B^{-1}a_2 - c_2 = (0 \quad 10 \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 30 = 5, \\ \tilde{c}_{s_2} &= C_{BV}B^{-1}a_{s_2} - c_{s_2} = (0 \quad 10 \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 10, \\ \tilde{c}_{s_3} &= C_{BV}B^{-1}a_{s_3} - c_{s_3} = (0 \quad 10 \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 10. \end{aligned}$$

Каждый i -й элемент выражения $C_{BV}B^{-1}$ представляет собой коэффициент при соответствующей i -й балансирующей переменной в таблице с оптимальным решением. Так, 0 соответствует коэффициенту при переменной S_1 , 10 – коэффициенту при S_2 , 10 – коэффициенту при S_3 ,

Из (3.9) найдем значение Z

$$C_{BV} B^{-1} b = (0 \ 10 \ 10) \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} = 280.$$

Объединяя, получим

$$Z + 5x_2 + 10S_2 + 10S_3 = 280.$$

Упрощение формулы (3.8) для дополняющих, избыточных и искусственных переменных.

Пусть переменная S_i – есть некоторая дополняющая переменная. Коэффициент при S_i в целевой функции равен нулю. Столбец для S_i в исходной таблице имеет коэффициент 1 в строке i , а в остальных строках – нули. Тогда формула (3.8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{S_i} \text{ в оптимальном решении} &= i\text{-му элементу из } C_{BV} B^{-1} - 0 = \\ &= i\text{-му элементу из } C_{BV} B^{-1}. \end{aligned}$$

$$C_{BV} B^{-1} = (0 \ 10 \ 10), \text{ отсюда } \tilde{c}_{S_2} = 10 - 0 = 10.$$

Аналогично рассуждая, найдем коэффициенты $\tilde{c}_{e_i}$ для избыточных переменных. Пусть e_i – избыточная переменная. В целевой функции коэффициент при данной переменной равен нулю. В исходной таблице в строке i расположена величина -1 , в остальных строках при e_i – нули, тогда

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{e_i} \text{ в оптимальном решении} &= - (i\text{-му элементу из } C_{BV} B^{-1}) - 0 = \\ &= - (i\text{-му элементу из } C_{BV} B^{-1}). \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим, как преобразуется значение коэффициента в целевой функции для искусственной переменной a_i . В исходной таблице в целевой функции коэффициент при a_i равен $-M$ (для задачи на $\max Z$). В ограничениях: в i -й строке -1 , в остальных – нули. Отсюда

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{a_i} \text{ в оптимальном решении} &= i\text{-му элементу из } C_{BV} B^{-1} - (-M) = \\ &= i\text{-му элементу из } C_{BV} B^{-1} + M. \end{aligned}$$

3.3. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Исследуем, как изменения параметров задачи линейного программирования (коэффициентов целевой функции, правых частей ограничений, технологических коэффициентов и т.д.) влияют на полученное решение.

Механика анализа чувствительности базируется на следующем важном наблюдении. Из алгоритма симплекс метода следует, что *набор базисных*

переменных BV оптимален тогда и только тогда, когда каждое ограничение имеет неотрицательную правую часть и каждая переменная имеет неотрицательный коэффициент в строке целевой функции (для задачи на максимум). Это также говорит о том, что, если каждое ограничение имеет неотрицательную правую часть, то базисное решение, состоящее из переменных, входящих в базис BV , является допустимым, и если в строке целевой функции нет ни одного отрицательного коэффициента, то не может быть другого базисного допустимого решения кроме BV , у которого значение целевой функции выше.

Это заключение приводит к тому, что *признак оптимальности проверяется на основе правых частей ограничений и коэффициентов целевой функции*. Отсюда следует, например, что для фрагмента модели линейного программирования

$$\begin{aligned} Z + 2x_2 + x_4 + x_6 &= 6, \\ &= 1, \\ &= 2, \\ &= 3. \end{aligned}$$

абсолютно никакого значения не имеет содержание пропущенной части модели.

Допустим, что задача линейного программирования решена и найден оптимальный базис BV . Можно использовать следующую процедуру для определения того, как любое изменение в задаче линейного программирования будет влиять на базис BV (то есть определить, как долго BV будет оптимальным).

Шаг 1. *Используя матричную форму записи, определяем, как изменения параметров задачи изменяют правую часть ограничений и значения коэффициентов в строке целевой функции (в таблице, имеющей BV как набор базисных переменных).*

Шаг 2. *Если каждая переменная в строке целевой функции имеет неотрицательный коэффициент (после произведенных изменений) и каждое ограничение имеет неотрицательную правую часть, то BV все еще является оптимальным. В противном случае BV не является оптимальным. Если базис BV перестал быть оптимальным, можно найти новое оптимальное решение, используя формулы матричной формы записи для восстановления целой таблицы для базиса BV . Затем необходимо продолжить решать задачу симплекс методом, используя полученную таблицу для BV как начальную.*

Есть две причины, которые могут повлиять на то, что базис BV перестанет быть оптимальным:

1. Переменные в строке целевой функции могут иметь отрицательный знак. В этом случае может быть получено новое значение Z , лучшее, чем предыдущее. Если такой случай встретился, то говорят, что BV является **субоптимальным** (подчиненным) базисным решением.
2. Ограничения могут иметь отрицательные правые части. В этом случае, по крайней мере, одна переменная из BV будет отрицательной и BV не дает базисное допустимое решение. Если это происходит, то BV считают недопустимым базисом.

Механику анализа чувствительности будем рассматривать на примере задачи о мебельной фабрике

$$\begin{aligned}\max Z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + S_1 &= 48, \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + S_2 &= 20, \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + S_3 &= 8, \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 &\geq 0.\end{aligned}$$

Или в виде симплексной таблицы

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
			60	30	20	0	0	0
S_1	0	48	8	6	1	1	0	0
S_2	0	20	4	2	1.5	0	1	0
S_3	0	8	2	1.5	0.5	0	0	1
$Z-c_j$	–	0	–60	–30	–20	0	0	0

Таблица с оптимальным решением выглядит следующим образом

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
			60	30	20	0	0	0
S_1	0	24	0	–2	0	1	2	–8
x_3	20	8	0	–2	1	0	2	–4
x_1	60	2	1	1.25	0	0	–0.5	1.5
$Z-c_j$	–	280	0	5	0	0	10	10

Полученному решению соответствуют следующие наборы переменных:
 $BV = \{S_1, x_3, x_1\}$, $NBV = \{x_2, S_2, S_3\}$.

Оптимальное решение задачи $Z = 280$, $S_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$.

В анализе чувствительности рассматриваются 6 типов изменений задачи линейного программирования:

- Изменение 1.** Изменение коэффициента целевой функции при небазисной переменной;
- Изменение 2.** Изменение коэффициента целевой функции при базисной переменной;
- Изменение 3.** Изменение правой части ограничения;
- Изменение 4.** Изменение колонки коэффициентов при небазисной переменной;
- Изменение 5.** Добавление новой переменной или нового вида деятельности;
- Изменение 6.** Добавление нового ограничения.

Рассмотрим первые 5 (6-е будет рассмотрено позднее в §3.11) и определим, как эти изменения повлияют на оптимальное решение.

3.3.1. ИЗМЕНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ПРИ НЕБАЗИСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В нашей задаче единственной небазисной переменной, которая представляет выпуск продукции, является x_2 (кухонные столы). Текущий коэффициент при x_2 : $c_2 = 30$. Определим, для каких значений коэффициента c_2 базис $BV = \{S_1, x_3, x_1\}$ будет оставаться оптимальным.

Изменим c_2 на Δ единиц с 30 до $30 + \Delta$. Возникает вопрос: для каких значений Δ текущий базис будет оптимальным? Так как B^{-1} и b не изменились, то и правые части таблицы $(B^{-1}b)$ для базиса BV не изменились, и BV – до сих пор допустимый базис. Так как x_2 – свободная переменная, то коэффициенты C_{BV} не изменяются. Из соотношения (3.8)

$$\tilde{c}_j = C_{BV} B^{-1} a_j - c_j$$

видно, что единственная переменная в строке целевой функции, чей коэффициент изменяется, это переменная x_2 . Таким образом, BV будет оставаться оптимальным, если $\tilde{c}_2 \geq 0$, и BV станет субоптимальным, когда $\tilde{c}_2 < 0$. В этом случае значение целевой функции может быть улучшено путем введения в базис переменной x_2 .

В нашем примере

$$a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} \text{ и } c_2 = 30 + \Delta.$$

Ранее также было определено, что

$$C_{BV} B^{-1} = [0 \quad 10 \quad 10],$$

отсюда

$$\tilde{c}_2 = [0 \quad 10 \quad 10] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - (30 + \Delta) = 35 - 30 - \Delta = 5 - \Delta.$$

Таким образом, $\tilde{c}_2$ остается больше нуля и, соответственно, BV остается оптимальным базисом, когда $5 - \Delta \geq 0$, или $\Delta \leq 5$. Аналогично, $\tilde{c}_2 < 0$, когда $\Delta > 5$. Но тогда BV будет неоптимальным базисом. Это означает, что, если цена кухонных столов уменьшится или возрастет не более чем на 5 грн. ($c_2 \leq 30 + 5 = 35$), то базис BV будет оставаться оптимальным.

Так, пусть $\tilde{c}_2 = 40$, тогда

$$\tilde{c}_2 = [0 \quad 10 \quad 10] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 40 = -5 \quad \text{и}$$

окончательная таблица преобразуется к виду

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
			60	40	20	0	0	0
S_1	0	24	0	-2	0	1	2	-8
x_3	20	8	0	-2	1	0	2	-4
x_1	60	2	1	1.25	0	0	-0.5	1.5
$Z-c_j$	—	280	0	-5	0	0	10	10

Налицо признак неоптимальности, поэтому базис BV является субоптимальным. После ввода переменной x_2 в базис, получаем

Базис	c_j	b_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3
			60	40	20	0	0	0
S_1	0	27.2	1.6	0	0	1	1.2	-5.6
x_3	20	11.2	1.6	0	1	0	1.2	-1.6
x_2	40	1.6	0.8	1	0	0	0.4	1.2
$Z-c_j$	—	288	4	0	0	0	8	16

Есть и другой путь, более наглядный, чтобы показать, что текущий базис задачи остается оптимальным, пока цена на кухонные столы снижается или повышается, но не более чем на 5 грн.

Из строки целевой функции в оптимальном решении мы видим, что, если $c_2 = 30$, то

$$Z = 280 - 5x_2 - 10S_2 - 10S_3.$$

Это говорит о том, что каждый стол, который фабрика задумает произвести, снизит доход фабрики на 5 грн. (другими словами, снижающая оценка для столов составляет 5 грн.). Если мы увеличим цену столов более чем на 5 грн., то выпуск столов будет приносить доход. Так, если $c_2 = 36$, то каждый стол будет приносить доход в $6 - 5 = 1$ грн. и фабрике столы выгодно производить.

Таким образом, как и раньше, мы видим, что при $\Delta > 5$ текущий базис перестает быть оптимальным.

Проведенный анализ дает основание сформулировать следующее **определение**:

Снижающая оценка (reduced cost) для небазисной (свободной) переменной (в задаче на максимум) показывает максимальное значение, на которое должен быть увеличен соответствующий коэффициент, чтобы текущий базис перестал быть оптимальным и стал субоптимальным, и свободной переменной представилось выгодным войти в базис.

Другая интерпретация снижающей оценки: *она показывает, на сколько ухудшится значение целевой функции, если соответствующая переменная будет введена в базис со значением, равным единице.*

Снижающая оценка – это ни что иное, как **альтернативная цена (opportunity cost)**. Она представляет собой наибольший убыток, который будет получен от возможного предпринимаемого решения в отличие от оптимального. Иначе, снижающая оценка – это плата за неоптимальное решение. Понятие альтернативной цены является одним из ключевых в экономической теории, которое используется на стадии принятия решений в экономических системах.

В общем, если $\tilde{c}_j \geq 0$, то BV остается оптимальным. Если $\tilde{c}_j < 0$, то BV перестает быть оптимальным и x_j входит в базис.

Снижающая оценка (reduced cost) для небазисной (свободной) переменной (в задаче на максимум) показывает максимальное значение, на которое должен быть увеличен соответствующий коэффициент, чтобы текущий базис перестал быть оптимальным и стал субоптимальным, и свободной переменной представилось выгодным войти в базис.

Другая интерпретация снижающей оценки: *она показывает, на сколько ухудшится значение целевой функции, если соответствующая переменная будет введена в базис со значением, равным единице.*

Снижающая оценка – это ни что иное, как **альтернативная цена (opportunity cost)**. Она представляет собой наибольший убыток, который будет получен от возможного предпринимаемого решения в отличие от оптимального. Иначе, снижающая оценка – это плата за неоптимальное решение. Понятие альтернативной цены является одним из ключевых в экономической теории, которое используется на стадии принятия решений в экономических системах.

В общем, если $\tilde{c}_j \geq 0$, то BV остается оптимальным. Если $\tilde{c}_j < 0$, то BV перестает быть оптимальным и x_j входит в базис.