

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Программа, контрольные задания и методические указания
(для студентов экономических специальностей заочной формы обучения)

ЧАСТЬ 1 **(Высшая математика)**

У т в е р ж д е н о
на заседании кафедры математики и
математических методов в экономике
Протокол № 1 от 31.08.2006 г.

Донецк 2007

ББК 22.1

УДК 516+517(076.1)

Математика для экономистов. Программа, контрольные задания и методические указания. Часть 1/Сост. Н.В. Румянцев, М.И. Медведева. – Донецк: ДонНУ, 2007. – 84с.

Контрольные задания составлены в соответствии с программой курса “Математика для экономистов”, изучаемой студентами всех экономических специальностей заочной формы обучения. Они также могут быть использованы преподавателями при подготовке и проведении практических занятий и самостоятельной работы со студентами дневной формы обучения.

Составители	Н.В. Румянцев, проф., д.э.н. М.И. Медведева, доц., к.ф.–м.н.
-------------	---

Ответственный за выпуск: Полшков Ю.Н., доц. к.ф.–м.н.

© Донецкий национальный университет, 2007

Рабочая программа курса «Математика для экономистов»

Раздел I

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Раздел 1. Аналитическая геометрия

1.1. *Простейшие задачи аналитической геометрии.* Числовая ось. Система прямоугольных координат на плоскости и в пространстве. Координаты точки. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. Преобразование координат.

1.2. *Прямая линия на плоскости.* Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через одну с заданным угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых. Общее уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой. Задание полуплоскости с помощью линейных неравенств.

1.3. *Кривые второго порядка.* Общее уравнение линии второго порядка. Окружность. Уравнения окружности. Каноническое уравнение эллипса. Каноническое уравнение гиперболы. Асимптоты гиперболы. Каноническое уравнение параболы. Эксцентриситет. Экономические примеры.

Раздел 2. Линейная алгебра

2.1. *Матрицы.* Понятие матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами.

2.2. *Определители.* Определители второго и третьего порядков. Их свойства. Понятие определителя n -го порядка. Минор. Алгебраическое дополнение. Разложение определителя по элементам строки и столбца. Вычисление определителей n -го порядка.

2.3. *Вычисление обратной матрицы.*

2.4. *Ранг матрицы.*

2.5. *Системы линейных уравнений.* Основные определения. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Метод Крамера решения систем линейных уравнений. Метод обратной матрицы. Исследование совместности сис-

тем. Теорема Кронекера – Капелле. Метод Гаусса. Метод Жордана – Гаусса решения систем n – линейных уравнений с m – переменными. Базисные решения.

2.6. *Линейные векторные пространства.* Связь между векторной и линейной алгеброй.

2.7. *Экономические примеры.*

Раздел 3. Дифференциальное исчисление

3.1 *Функции. Область определения. Элементарные функции.* Понятие множества. Операции над множествами. Счетность, эквивалентность множеств. Несчетные множества. Ограниченные множества. Определение функции. Область определения. Способы задания функции. Основные элементарные функции, которые используются в экономических исследованиях. Свойства функций: четность, нечетность; периодичность; монотонность; ограниченность.

3.2. *Теория пределов.* Определение предела функции и числовой последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые величины. Связь между ними. Свойства бесконечно малых величин. Основные теоремы о пределах. Односторонние пределы. Раскрытие неопределенностей. Первый и второй замечательный пределы.

3.3. *Непрерывность функции.* Понятие непрерывности функции в точке и на отрезке. Основные теоремы о непрерывных функциях. Точки разрыва функции и их классификация. Асимптоты.

3.4. *Производная функции.* Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной. Ее геометрический, физический и экономический смысл. Уравнение касательной. Основные правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные высших порядков. Производная неявной функции.

3.5. *Дифференциал функции.* Понятие дифференциала функции. Правила вычисления дифференциалов. Основные теоремы о дифференцируемых функциях. Правила Лопиталя.

3.6. *Исследование поведения функции и построение графиков.* Монотонные функции. Необходимое и достаточное условия монотонности функции. Экстремум Функции. Необходимое и достаточное условия экстремума функции. Выпуклость, вогнутость функции. Точки перегиба. Построение графиков функций.

3.7. *Экономическое приложение производной.* Эластичность функции.

Раздел 4. Функции нескольких переменных

4.1. *Открытые и замкнутые множества.* Граничные и внутренние точки множеств.

4.2. *Определение функции многих переменных.* Область определения. Линии уровня.

4.3. *Предел и непрерывность функции многих переменных.*

4.4. *Частные производные и полный дифференциал функции.* Частные производные высших порядков. Производная по направлению. Градиент функции. Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции двух переменных. Условный экстремум.

4.5. *Метод наименьших квадратов.*

4.6. *Экономические примеры.*

Раздел 5. Интегральное исчисление

5.1. *Неопределенный интеграл.* Первообразная функции и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов.

5.2. *Основные методы интегрирования.* Непосредственное интегрирование. Интегрирование методом замены переменной. Интегрирование по частям. Некоторые классы интегрируемых функций.

5.3. *Определенный интеграл.* Задача, приводящая к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла. Основные свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница. Метод подстановки и метод интегрирования по частям в определенном интеграле.

5.4. *Приложения определенного интеграла.* Вычисление площади плоской фигуры. Экономические примеры.

5.5. *Несобственные интегралы.* Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

5.6. *Двойной интеграл по прямоугольной области.* Понятие двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному.

Раздел 6. Ряды

6.1. *Числовые ряды.* Основные понятия. Сходимость ряда. Необходимое условие сходимости ряда. Свойства сходящихся рядов. Гармонический ряд.

6.2. *Знакоположительные ряды.* Достаточные признака сходимости знакоположительных рядов. Признак сравнения. Признак Д'Аламбера. Интегральный признак Коши.

6.3. *Знакопередающиеся ряды.* Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимости.

6.4. *Степенные ряды.* Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Радиус сходимости и область сходимости степенного ряда. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых элементарных функций в ряд. Свойства степенных рядов. Применение рядов к приближенным вычислениям.

Раздел 7. Дифференциальные уравнения

7.1. *Основные определения.* Задача Коши. Общее и частное решение.

7.2. *Дифференциальные уравнения с разделяющимися и разделенными переменными.*

7.3. *Линейные и однородные уравнения первого порядка.*

7.4. *Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.*

7.6. *Экономические примеры.*

Рекомендации по выполнению и оформлению контрольных работ

Основной целью контрольной работы по курсу «Математика для экономистов» является закрепление и проверка знаний, полученных студентами в процессе аудиторной работы и самостоятельного изучения соответствующей учебной литературы.

При выполнении заданий, включенных в контрольную работу, студенты должны продемонстрировать знание основных теоретических вопросов и умение применить их при решении практических задач.

При выполнении и оформлении контрольных работ необходимо следовать данным ниже рекомендациям. Работы, выполненные без соблюдения этих рекомендаций, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

- Контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку. При оформлении необходимо оставлять поля шириной 4,5 см для замечаний рецензента.
- На обложке тетради должны быть четко написаны название дисциплины, фамилия и инициалы студента, шифр группы. Здесь же указывается название учебного заведения и адрес студента. В конце работы ставится дата ее выполнения и личная подпись студента.
- В работу должны быть включены все задачи контрольной работы по соответствующему варианту. Контрольная работа, содержащая не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, рецензентом не рассматривается и возвращается студенту.
- На первой странице контрольной работы необходимо указать вариант, выполняемой работы, а так же расположить таблицу с указанием номера соответствующего задания.
- Решения задач следует располагать по порядку, в котором они входят в задание, сохраняя номера задач. Решения излагать подробно, объясняя и мотивируя все действия.

- Перед решением каждой задачи необходимо полностью выписать ее условие.
- После получения прорецензированной работы, студент должен исправить все указанные рецензентом ошибки. Все необходимые дополнения и исправления необходимо располагать в конце тетради.
- Внесенные в решения задач исправления или дополнения необходимо сдать для повторной проверки. Если работа не зачтена и отсутствует указание рецензента на то, что можно ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, то вся работа должна быть выполнена заново.
- При выполнении контрольной работы рекомендуется оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений.

Студент выполняет контрольную работу только по своему варианту. Номера задач соответствующих заданий определяются преподавателем во время установочной сессии.

Задание №1

ТЕМА: АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Задача 1.1

Построить прямые l_1 и l_2 , найти точку их пересечения и угол между ними:

№	l_1	l_2	№	l_1	l_2
1.	$y = 2x + 3$	$y = 3x + 2$	16.	$y = -5x + 3$	$y = 6x - 2$
2.	$y = -2x - 3$	$y = -3x - 2$	17.	$y = -8x - 4$	$y = -9x + 2$
3.	$y = 5x - 2$	$y = -x + 4$	18.	$y = -x - 8$	$y = -2x + 7$
4.	$y = 7x - 12$	$y = 4x - 11$	19.	$y = 7x + 6$	$y = 6x + 7$
5.	$y = 4x - 1$	$y = 5x + 1$	20.	$y = 20x + 9$	$y = 19x + 3$
6.	$y = -4x + 2$	$y = -5x + 7$	21.	$y = -9x + 5$	$y = -10x + 7$
7.	$y = 11x - 6$	$y = 12x + 3$	22.	$y = 7x + 1$	$y = 8x - 1$
8.	$y = 8x - 6$	$y = 7x + 5$	23.	$y = 2x + 9$	$y = x + 5$
9.	$y = -9x - 2$	$y = -7x + 5$	24.	$y = 3x - 6$	$y = 2x - 7$
10.	$y = 3x - 7$	$y = 4x + 5$	25.	$y = -8x + 4$	$y = -7x + 3$
11.	$y = 13x + 12$	$y = 12x + 11$	26.	$y = -15x + 5$	$y = -14x + 8$
12.	$y = 4x - 8$	$y = 5x + 3$	27.	$y = -7x - 7$	$y = -8x - 8$
13.	$y = 15x + 13$	$y = 14x - 1$	28.	$y = 7x + 9$	$y = 8x + 11$
14.	$y = -7x + 3$	$y = -6x + 7$	29.	$y = 3x - 4$	$y = 4x - 9$
15.	$y = x + 7$	$y = 2x + 12$	30.	$y = -11x + 2$	$y = -10x + 7$

Задача 1.2

Построить область, заданную системой неравенств, найти координаты угловых точек:

$$1. \quad \begin{cases} -4x + 2y + 6 \leq 0 \\ x - 6y + 5 \geq 0 \\ -7x - 4y + 57 \leq 0 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} -2x + 8y - 6 \geq 0 \\ 6x - y - 5 \leq 0 \\ 4x + 7y - 57 \leq 0 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} 10x - 4y - 6 \geq 0 \\ -3x + 8y - 5 \leq 0 \\ 7x + 4y + 57 \geq 0 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} 4x - 2y + 6 \geq 0 \\ -x + 6y + 5 \leq 0 \\ 7x + 4y + 57 \geq 0 \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} 4x + 2y - 20 \geq 0 \\ 2x - 5y + 26 \leq 0 \\ 6x - 3y - 18 \geq 0 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} -4x - 2y - 20 \leq 0 \\ -2x + 5y + 26 \geq 0 \\ -6x + 3y - 18 \leq 0 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} 4x - 2y + 20 \geq 0 \\ 2x + 5y - 26 \leq 0 \\ 6x + 3y + 18 \geq 0 \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} -4x + 2y + 20 \leq 0 \\ -2x - 5y - 26 \geq 0 \\ -6x - 3y + 18 \leq 0 \end{cases}$$

$$16. \quad \begin{cases} x - y - 1 \leq 0 \\ x + y - 5 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$17. \quad \begin{cases} x + 2y - 7 \leq 0 \\ x - 3y + 13 \geq 0 \\ 2x - y + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$18. \quad \begin{cases} -2x + 3y - 8 \leq 0 \\ x - y + 3 \geq 0 \\ -x + 2y - 6 \leq 0 \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} -2x - y + 3 \leq 0 \\ 3x - 2y - 8 \geq 0 \\ x - 3y + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$20. \quad \begin{cases} x - 5y + 11 \leq 0 \\ -2x + y + 5 \geq 0 \\ -x - 4y + 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$21. \quad \begin{cases} -2x + 4y - 16 \leq 0 \\ -2x - y - 1 \geq 0 \\ -4x + 3y - 7 \leq 0 \end{cases}$$

$$22. \quad \begin{cases} x - 3y + 10 \geq 0 \\ -5x - 3y + 22 \geq 0 \\ -4x - 6y + 14 \leq 0 \end{cases}$$

$$23. \quad \begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ -4x + y + 5 \geq 0 \\ -x - 2y - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} 7x - 3y - 1 \geq 0 \\ -3x + 4y - 24 \leq 0 \\ 4x + y - 6 \geq 0 \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} -5x - 5y + 20 \geq 0 \\ 7x + 3y - 28 \leq 0 \\ 2x - 2y + 12 \leq 0 \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} -13x + y + 45 \geq 0 \\ 13x + 2y - 27 \geq 0 \\ y - 7 \leq 0 \end{cases}$$

$$12. \quad \begin{cases} -7x - 4y + 13 \geq 0 \\ 10x + y - 28 \leq 0 \\ 3x - 3y + 18 \leq 0 \end{cases}$$

$$13. \quad \begin{cases} -11x + 5y - 1 \geq 0 \\ -2x - 2y - 16 \geq 0 \\ -13x - 2y + 70 \leq 0 \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} 6x - 4y + 2 \geq 0 \\ -12x - y + 68 \leq 0 \\ -6x - 5y + 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} -3x + 5y - 26 \leq 0 \\ -8x + 3y - 4 \geq 0 \\ -4x + 2y + 19 \leq 0 \end{cases}$$

$$24. \quad \begin{cases} 5x + y - 7 \geq 0 \\ -3x + y + 1 \leq 0 \\ x + y + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$25. \quad \begin{cases} 2x - 3y + 10 \geq 0 \\ -3x - y + 17 \leq 0 \\ -x - 4y + 13 \leq 0 \end{cases}$$

$$26. \quad \begin{cases} x + y - 5 \geq 0 \\ x - y + 3 \leq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$27. \quad \begin{cases} -4x - 3y - 1 \geq 0 \\ 6x + y - 9 \geq 0 \\ x - y + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$28. \quad \begin{cases} x - 3y + 1 \leq 0 \\ -x + y - 1 \geq 0 \\ x - y + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$29. \quad \begin{cases} 2x - 3 - 1 \geq 0 \\ 2x - y - 1 \geq 0 \\ 4x - 2y - 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$30. \quad \begin{cases} 4x + y - 3 \leq 0 \\ x - 3y + 9 \geq 0 \\ 5x - 2y - 7 \leq 0 \end{cases}$$

Задача 1.3

Дана точка A . Найти:

- 1) уравнения прямых, проходящих через точку A (уравнение “пучка прямых”);
- 2) уравнение прямой, принадлежащей “пучку прямых”, и проходящей через точку C ;
- 3) уравнение прямой принадлежащей “пучку прямых”, если ее угловой коэффициент равен k .

Сделать рисунок.

№	A	k	C	№	A	k	C
1.	$(-5;9)$	1	$(-2;3)$	16.	$(2;1)$	-4	$(12;-4)$
2.	$(2;-1)$	2	$(7;0)$	17.	$(5;4)$	-5	$(9;5)$
3.	$(-5;9)$	3	$(3;-5)$	18.	$(3;-1)$	-6	$(5;7)$
4.	$(12;9)$	$\frac{1}{2}$	$(-3;8)$	19.	$(2;-8)$	$\frac{1}{6}$	$(4;8)$
5.	$(4;-8)$	$\frac{1}{3}$	$(0;13)$	20.	$(9;4)$	$\frac{2}{3}$	$(13;10)$
6.	$(2;11)$	-1	$(-8;9)$	21.	$(9;-1)$	7	$(9;4)$
7.	$(6;-5)$	-2	$(5;10)$	22.	$(4;-3)$	8	$(-1;13)$
8.	$(3;-8)$	-3	$(2;-11)$	23.	$(2;11)$	9	$(6;8)$
9.	$(9;-3)$	$-\frac{1}{2}$	$(-4;-6)$	24.	$(11;0)$	$\frac{3}{4}$	$(-5;10)$
10.	$(-7;8)$	$-\frac{1}{3}$	$(9;-7)$	25.	$(9;-4)$	$\frac{2}{5}$	$(-1;6)$
11.	$(8;-3)$	4	$(1;-9)$	26.	$(4;8)$	-7	$(9;-3)$
12.	$(3;-11)$	5	$(-5;12)$	27.	$(8;3)$	-8	$(-5;16)$
13.	$(9;-6)$	6	$(5;12)$	28.	$(4;9)$	-9	$(9;-12)$
14.	$(7;11)$	$\frac{1}{4}$	$(7;-1)$	29.	$(-5;6)$	$-\frac{3}{4}$	$(4;-11)$
15.	$(13;7)$	$\frac{1}{5}$	$(8;-4)$	30.	$(1;9)$	$-\frac{2}{5}$	$(9;-7)$

Задача 1.4

Даны две точки A и B . Найти:

- 1) *уравнение прямой, проходящей через эти точки;*
- 2) *уравнение прямой l_1 , проходящей через точку $C(1,1)$, параллельно прямой AB .*

3) уравнение прямой l_2 , проходящей через точку A , перпендикулярно прямой AB .

Сделать рисунок.

№	A	B	№	A	B
1.	(2;1)	(-2;3)	16.	(-5;9)	(4;8)
2.	(5;4)	(-4;-6)	17.	(2;-1)	(-1;6)
3.	(3;-1)	(7;0)	18.	(-5;9)	(6;8)
4.	(2;-8)	(9;-7)	19.	(12;9)	(-1;13)
5.	(9;4)	(3;-5)	20.	(4;-8)	(-5;16)
6.	(9;-1)	(1;-9)	21.	(2;11)	(-1;13)
7.	(4;-3)	(-3;8)	22.	(6;-5)	(9;4)
8.	(2;11)	(-5;12)	23.	(3;-8)	(13;10)
9.	(11;0)	(0;13)	24.	(9;-3)	(4;-11)
10.	(9;-4)	(5;12)	25.	(-7;8)	(9;-3)
11.	(4;8)	(-8;9)	26.	(8;-3)	(5;7)
12.	(8;3)	(7;-1)	27.	(3;-11)	(9;-12)
13.	(4;9)	(5;10)	28.	(9;-6)	(9;5)
14.	(-5;6)	(8;-4)	29.	(7;11)	(-5;10)
15.	(1;9)	(2;-11)	30.	(13;7)	(12;-4)

Задача 1.5

Среди прямых l_1, l_2, l_3, l_4 найти пары параллельных и перпендикулярных прямых (если такие есть):

1. $l_1: 2x + 4y - 4 = 0$, $l_2: y = 4x + 5$, $l_3: x + 4y - 3 = 0$, $l_4: y = -0,5x + 7$.
2. $l_1: x + 4y - 16 = 0$, $l_2: y = -0,25x + 7$, $l_3: x + 5y + 4 = 0$, $l_4: y = 5x + 11$.
3. $l_1: 7x - 2y + 5 = 0$, $l_2: y = 7x - 9$, $l_3: 14x + 2y - 3 = 0$, $l_4: y = 3,5x + 3$.
4. $l_1: 2x + 8y + 5 = 0$, $l_2: y = -0,25x - 3$, $l_3: 2x + y + 4 = 0$, $l_4: y = 0,5x + 11$.

5. $l_1: 6x + 2y + 5 = 0$, $l_2: y = 2x + 6$, $l_3: 6x + 2y - 9 = 0$, $l_4: y = -0,5x + 13$.
6. $l_1: x + 2y - 7 = 0$, $l_2: y = 2x + 9$, $l_3: 7x + 7y - 11 = 0$, $l_4: y = -x - 11$.
7. $l_1: 3x + 9y - 13 = 0$, $l_2: y = 3x - 13$, $l_3: 2x - y - 8 = 0$, $l_4: y = 2x - 17$.
8. $l_1: 3x + 6y + 25 = 0$, $l_2: y = 3x + 17$, $l_3: x - 3y + 7 = 0$, $l_4: y = -0,5x + 11$.
9. $l_1: 8x + 16y - 9 = 0$, $l_2: y = 2x + 15$, $l_3: 16x + 8y - 9 = 0$, $l_4: y = -2x + 21$.
10. $l_1: x + 7y + 9 = 0$, $l_2: y = 21x - 9$, $l_3: 7x - y + 8 = 0$, $l_4: y = 10,5x - 1$.
11. $l_1: 3x + y + 15 = 0$, $l_2: y = -3x - 26$, $l_3: 2x + 8y - 11 = 0$, $l_4: y = 4x - 7$.
12. $l_1: 2x + 8y + 3 = 0$, $l_2: y = -x - 9$, $l_3: 5x + 5y + 19 = 0$, $l_4: y = 4x + 12$.
13. $l_1: 13x - 14y + 15 = 0$, $l_2: y = 4x + 5$, $l_3: 14x + 13y - 12 = 0$, $l_4: y = 4x - 12$.
14. $l_1: 7x + 21y - 5 = 0$, $l_2: y = -3x + 15$, $l_3: 21x + 7y - 6 = 0$, $l_4: y = 3x + 1$.
15. $l_1: 6x - 12y - 5 = 0$, $l_2: y = 2x - 5$, $l_3: 12x - 6y - 6 = 0$, $l_4: y = -2x + 12$.
16. $l_1: 9x + 18y - 13 = 0$, $l_2: y = -7x + 5$, $l_3: 18x - 8y - 4 = 0$, $l_4: y = -x - 1$.
17. $l_1: 2x + 5y - 20 = 0$, $l_2: y = x - 14$, $l_3: 10x + 25y + 1 = 0$, $l_4: y = -x + 19$.
18. $l_1: 8x + y - 6 = 0$, $l_2: y = -8x - 17$, $l_3: 4x + 28y + 1 = 0$, $l_4: y = 7x + 17$.
19. $l_1: 5x + 2y + 21 = 0$, $l_2: y = -2,5x - 21$, $l_3: 4x - 8y - 13 = 0$, $l_4: y = -2x + 9$.
20. $l_1: x + y - 23 = 0$, $l_2: y = x - 6$, $l_3: x + y + 18 = 0$, $l_4: y = -x - 9$.
21. $l_1: 5x + 10y - 12 = 0$, $l_2: y = 7x + 2$, $l_3: 10x - 5y + 13 = 0$, $l_4: y = 7x - 6$.
22. $l_1: 12x + 4y + 11 = 0$, $l_2: y = -3x + 7$, $l_3: x + 8y - 15 = 0$, $l_4: y = -8x + 15$.
23. $l_1: 10x - 2y - 4 = 0$, $l_2: y = -5x + 14$, $l_3: 5x - y + 15 = 0$, $l_4: y = 5x + 19$.
24. $l_1: 9x + 3y - 13 = 0$, $l_2: y = 3x - 5$, $l_3: 3x + 9y + 13 = 0$, $l_4: y = -x + 18$.
25. $l_1: x + 7y - 5 = 0$, $l_2: y = -7x + 5$, $l_3: 40x + 5y + 7 = 0$, $l_4: y = -8x + 18$.
26. $l_1: x + 9y - 4 = 0$, $l_2: y = 9x + 7$, $l_3: 9x + y + 1 = 0$, $l_4: y = -9x - 8$.
27. $l_1: 15x - 3y + 7 = 0$, $l_2: y = 4x + 9$, $l_3: 4x + 16y - 9 = 0$, $l_4: y = 5x - 9$.
28. $l_1: x + 2y + 13 = 0$, $l_2: y = -0,5x + 41$, $l_3: 2x - 8y + 11 = 0$, $l_4: y = -4x + 37$.
29. $l_1: 6x + 24y + 17 = 0$, $l_2: y = 4x + 3$, $l_3: 4x + y + 1 = 0$, $l_4: y = -4x + 5$.
30. $l_1: 21x - 3y + 5 = 0$, $l_2: y = 7x + 3$, $l_3: x - 19y + 15 = 0$, $l_4: y = -19x - 4$.

Задание №2

ТЕМА: МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Задача 2.1

Даны две матрицы A и B . Определить какие из нижеприведенных операций выполнимы и выполнить их:

1) $A + B$; $A' + B$; $A + B'$; $A' + B'$;

2) $A \cdot B$; $A' \cdot B$; $A \cdot B'$; $A' \cdot B'$.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 13 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 14 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 2 & 7 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

17. $A = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 30 & 40 \\ -10 & 30 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

18. $A = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 20 & -20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 11 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 2 & 13 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -9 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 9 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

20. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 20 & 6 \\ -2 & 5 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 9 & -3 \\ 0 & 4 & -22 \end{pmatrix}$

21. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 6 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 12 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 2.2

Даны две матрицы A и B и число k . Найти матрицу $C = A^2 + A^{-1}B + kB$ и вычислить ее определитель:

№	A	B	k	№	A	B	k
1.	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	1	16.	$\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$	- 7
2.	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$	2	17.	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$	8
3.	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	3	18.	$\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	- 9
4.	$\begin{pmatrix} -2 & 13 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$	4	19.	$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	2
5.	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$	5	20.	$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$	- 1
6.	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$	6	21.	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	2
7.	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	7	22.	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	3
8.	$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	8	23.	$\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$	- 4
9.	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	9	24.	$\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	5
10.	$\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	- 1	25.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	6
11.	$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$	- 2	26.	$\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$	- 1
12.	$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	- 3	27.	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	2
13.	$\begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	- 4	28.	$\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	3

7. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 5 \\ 9 & 10 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$
9. $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 11 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$
10. $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & 0 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
11. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 12 & 8 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$
12. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 13 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 12 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
13. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$
14. $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 2 & -4 \\ 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$
15. $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 11 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 5 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
22. $A = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ -20 & -70 \\ 10 & 40 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$
23. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 2 & 10 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -15 \\ -6 & -3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$
24. $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 6 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 30 & 25 \\ 10 & 50 & 15 \end{pmatrix}$
25. $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -7 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$
26. $A = \begin{pmatrix} -10 & 80 \\ 20 & 60 \\ 50 & -30 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$
27. $A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & -3 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$
28. $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 3 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 12 & -8 & -4 \end{pmatrix}$
29. $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & -8 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 10 & 3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$
30. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$

14.	$\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	- 5	29.	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$	- 4
15.	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$	6	30.	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$	5

Задача 2.3

Исследовать на линейную независимость систему векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$:

№	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$
1.	(1;2;-1;2)	(2;3;-1;5)	(4;-1;6;5)	(5;-1;0;4)
2.	(-1;3;0;-1)	(1;-3;4;7)	(3;2;-1;-4)	(3;2;-1;2)
3.	(-1;3;4;-1)	(3;-1;9;7)	(-3;2;9;1)	(4;-2;3;-1)
4.	(1;3;2;1)	(3;2;0;4)	(2;-3;6;1)	(6;2;8;6)
5.	(3;-2;1;-2)	(1;5;6;1)	(-1;2;-3;4)	(2;2;1;-1)
6.	(1;0;4;3)	(4;-2;1;3)	(-2;1;3;-1)	(3;-1;8;5)
7.	(-3;1;4;1)	(1;2;1;-3)	(2;4;-1;2)	(3;9;1;-1)
8.	(-2;1;3;1)	(1;-3;4;-1)	(5;2;1;-2)	(3;4;1;-2)
9.	(1;7;8;3)	(2;-3;4;1)	(10;12;14;5)	(7;8;2;1)
10.	(-1;5;3;4)	(2;1;6;7)	(3;2;-1;4)	(2;3;-1;2)
11.	(5;-1;-1;5)	(2;-3;1;1)	(1;4;-3;2)	(2;3;5;-3)
12.	(1;-1;3;5)	(1;2;-3;4)	(3;-1;5;2)	(3;2;-1;1)
13.	(-2;9;-7;1)	(2;4;-1;3)	(1;3;-1;4)	(2;4;-1;8)
14.	(3;-1;5;1)	(3;2;4;-2)	(1;4;2;-3)	(2;-1;3;-2)
15.	(1;4;4;-1)	(2;3;1;1)	(8;3;6;-3)	(5;-4;2;-3)
16.	(1;-2;4;-3)	(2;1;-1;9)	(-1;7;3;-5)	(4;2;-1;3)
17.	(1;-1;4;1)	(2;5;-1;3)	(1;-3;-2;7)	(2;6;8;3)
18.	(3;1;4;-1)	(7;-2;1;-1)	(-9;6;-1;2)	(1;5;4;0)
19.	(1;7;-4;-1)	(4;-1;2;3)	(2;-1;9;-1)	(-1;2;-1;2)
20.	(4;1;4;-1)	(2;-2;1;-1)	(1;-3;1;2)	(1;-2;5;-6)

21.	(3; 7; -5; -1)	(12; 9; -8; -8)	(5; -3; -2; 1)	(4; 5; -1; -8)
22.	(2; 4; -1; 3)	(1; -1; 2; 3)	(1; -1; 9; 2)	(2; 5; -7; 4)
23.	(2; 3; 7; -8)	(-1; 4; -1; 7)	(3; -4; 9; 1)	(5; 6; -3; 1)
24.	(6; 2; -1; 9)	(3; -1; -7; 3)	(-1; 5; -6; 1)	(8; 6; -14; 13)
25.	(1; -3; 5; -7)	(3; 2; -1; -4)	(3; -4; 7; -1)	(2; -3; 1; -2)
26.	(-1; 9; 3; -4)	(5; 2; 1; 4)	(-2; -3; 1; 4)	(3; -1; 2; -1)
27.	(2; 3; -5; 3)	(-1; -3; -5; -3)	(6; -7; 3; -2)	(-9; 1; -3; -4)
28.	(-5; 4; 3; -1)	(5; -2; 1; 3)	(-5; 2; 3; -7)	(10; 4; -1; 10)
29.	(1; 6; 7; -1)	(2; 3; -5; -7)	(-2; 2; -2; 2)	(3; 1; 4; -5)
30.	(3; 0; 4; -8)	(-2; 1; 4; -3)	(-2; 8; 3; -3)	(-7; 9; 3; 2)

Задача 2.4

Решить систему уравнений матричным способом (методом обратной матрицы):

$$1. \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 = -3. \end{cases}$$

$$16. \quad \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 10, \\ 6x_1 + 9x_2 - 4x_3 = -7, \\ -3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -15. \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4, \\ x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 13. \end{cases}$$

$$17. \quad \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 = 20, \\ 5x_1 - 7x_2 - x_3 = -15. \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

$$18. \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 22, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12, \\ -x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -10, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = -1. \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 8x_3 = 4, \\ -x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -6, \\ x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 6. \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

$$20. \quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -7. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 13, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7, \\ 5x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -13, \\ x_1 + 6x_2 - 6x_3 = -2. \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 9x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 27. \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 13x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 14, \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 = -6. \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} 3x_1 - 10x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 - 9x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ 2x_1 - 9x_2 + 10x_3 = 11, \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -13. \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -6, \\ -5x_1 - 6x_2 + x_3 = 10, \\ 7x_1 + 6x_2 - 8x_3 = -5. \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} 6x_1 + 12x_2 - 5x_3 = 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + 7x_3 = 9, \\ x_1 + 9x_2 - 8x_3 = -7. \end{cases}$$
14.
$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + x_3 = 17, \\ x_1 - 13x_2 + 4x_3 = 13, \\ -x_1 + 15x_2 + 7x_3 = 9. \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 12, \\ 7x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -8, \\ x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 1. \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 - 6x_3 = -3, \\ -8x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1, \\ 9x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$
23.
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 7x_3 = 2, \\ -x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -20, \\ 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 15. \end{cases}$$
24.
$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + x_3 = -4, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -6x_1 + x_2 = -10. \end{cases}$$
25.
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_3 = 3, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$
26.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 15, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -5, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$
27.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 16, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -12, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$
28.
$$\begin{cases} -8x_1 + x_2 + 7x_3 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 9, \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 3. \end{cases}$$
29.
$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 10, \\ -3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$
30.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Задача 2.5

Решить систему уравнений, используя формулы Крамера:

1.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 9x_3 = -7, \\ -5x_1 + 4x_2 - x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 = -6. \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = -2, \\ 5x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 9, \\ 6x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} 9x_1 + 13x_2 + 4x_3 = 5, \\ 7x_1 - 14x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 9, \\ -4x_1 - 8x_2 + x_3 = -5, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ -3x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 8, \\ -2x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 7, \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 1. \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} 6x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 2, \\ 3x_1 - 9x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 17x_2 - 4x_3 = 8. \end{cases}$$
16.
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -1, \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$$
17.
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 4x_3 = 11, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -5, \\ 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} x_1 - 12x_2 - 2x_3 = 3, \\ -5x_1 + 7x_2 + 6x_3 = -11, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 2, \\ -3x_1 + 12x_2 - 7x_3 = 4, \\ x_1 - 9x_2 - 7x_3 = 8. \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} -6x_1 + 8x_2 - 5x_3 = -1, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -4, \\ 3x_1 - 11x_2 + 6x_3 = -3. \end{cases}$$
23.
$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 - 5x_3 = 8, \\ -4x_1 + 8x_2 + x_3 = -5, \\ 7x_1 - 12x_2 - 5x_3 = 12. \end{cases}$$
24.
$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = -8, \\ 7x_1 - 12x_2 - 3x_3 = 10, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$
25.
$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 6x_2 - 8x_3 = -7, \\ 6x_1 - x_3 = 7. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7, \\ -2x_1 - 9x_2 + 2x_3 = -4, \\ 3x_1 \quad \quad - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 = -5, \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 1, \\ -4x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 3. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 4x_1 + 12x_2 - 5x_3 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 = -5, \\ -3x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 3. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} -4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -7, \\ 2x_1 - 11x_2 + 4x_3 = -2, \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -2. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} -8x_1 + 5x_2 - 9x_3 = 1, \\ 7x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 - 7x_3 = 10, \\ -4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} -3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = -8, \\ 7x_1 + 12x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} -7x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -2, \\ 6x_1 + 7x_2 - x_3 = 7, \\ 5x_1 + 9x_2 - 5x_3 = 10. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} -5x_1 + 7x_2 - 4x_3 = -1, \\ 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 = -5, \\ 7x_1 + 6x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -5, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7, \\ -3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$$

Задача 2.6

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$1. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 6, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 25, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 6, \\ 4x_1 + 2x_2 - 10x_3 - 2x_4 = 18, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -6, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -9, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -6, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -7, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 5. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -2, \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ -x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 11, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 = -4, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 4. \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 7, \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -4. \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 11x_4 = -10, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 11x_4 = -2, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 - 7x_2 - 4x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 13. \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -6 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -5 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -3, \\ 4x_1 - 10x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 11, \\ 5x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = -4, \\ 5x_1 - 15x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 9, \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 1, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 4x_4 = -14, \\ 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -6, \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 10, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -7, \\ 4x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + 4x_4 = 9. \end{cases}$$
23.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -7, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = -8. \end{cases}$$
24.
$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 2, \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$
25.
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$
26.
$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 11, \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -9, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 10. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -3, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -9, \\ -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 = -6, \\ 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 11, \\ 2x_1 - 3x_3 - 7x_4 = 3, \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -5. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ -x_1 + 7x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 4, \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 3, \\ 8x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 6, \\ -9x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 9x_4 = -11, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 4. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 1, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -9, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 6, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 7x_4 = -2, \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 10, \\ 4x_1 - 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 8x_3 - x_4 = 3, \\ -4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -9, \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 4. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 11, \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 11x_3 + x_4 = 12. \end{cases}$$

Задача 2.7

Найти все базисные решения системы уравнений. Найти частное решение при $x_1 = 1$:

$$1. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3 = -4. \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 6. \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3, \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 8, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 9x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5, \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = -8, \\ 5x_1 + 11x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 7, \\ 4x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 9, \\ -x_1 - 9x_2 + 8x_3 = -2. \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 14x_2 - 7x_3 = 11. \end{cases}$$
14.
$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -3, \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1, \\ -5x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -3. \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$
23.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 9, \\ 2x_1 - 7x_2 - 6x_3 = -11. \end{cases}$$
24.
$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4, \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$
25.
$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 0, \\ 6x_1 - 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$
26.
$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 - x_2 - 9x_3 = -7, \\ -4x_1 + x_2 - 13x_3 = -16. \end{cases}$$
27.
$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$
28.
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -5, \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7, \\ 2x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 2. \end{cases}$$
29.
$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 13, \\ -8x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -14. \end{cases}$$
30.
$$\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -3, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ -x_1 - 9x_2 + 7x_3 = -3. \end{cases}$$

Задание №3

ТЕМА: ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Задача 3.1

Найти предел функции:

- | | | | | | |
|----|---|----|---|----|---|
| 1. | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x - 1}$ | 11 | $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 3x + 5}$ | 21 | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 7x + 6}$ |
| 2. | $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - 2x^2}{3x^2 + x - 4}$ | 12 | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - x}{x^2 - 5}$ | 22 | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + x^2}{5x^2 - 2x + 8}$ |
| 3 | $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x + 5}$ | 13 | $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x - 6}$ | 23 | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - x^2}{4x^2 - 5x + 4}$ |
| 4 | $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2}$ | 14 | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + x}{7x^2 - 2x + 6}$ | 24 | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 4x^2}{x^3 + x^2 - 1}$ |
| 5 | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 6x - 9}{6x^2 + 2}$ | 15 | $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 7x + 1}$ | 25 | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6}{x^3 - 6x + 3}$ |
| 6 | $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5 - 2x}{4 - x - 5x^2}$ | 16 | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 - x^3}{x^2 + 3x - 4}$ | 26 | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - x^2}{3x^3 - 2x^2 - 7}$ |
| 7 | $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - x^3}{6x^2 + 3x - 4}$ | 17 | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + 3}$ | 27 | $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{5x^2 + 4x - 4}$ |
| 8 | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 27}{x^2 - 9x + 9}$ | 18 | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3}{3x^3 + 4x - 5}$ | 28 | $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - x^3}{x^2 - 5x + 7}$ |
| 9 | $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 1}{x^3 + 2x - 1}$ | 19 | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 1}{x^2 + 6x - 5}$ | 29 | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x - 2x^2}{x^2 - 7x + 7}$ |
| 10 | $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - x + 3}$ | 20 | $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x - 1}{2 - x^2}$ | 30 | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - x^2}{4x^2 - 5x + 4}$ |

Задача 3.2

Найти предел функции:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+4)^2}{x^2 + 2x + 3}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 7}{x + 6}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 + 2x}{x^3 - x^2}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x - 2}{2x^3 - 7}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^2}{x^4 + 5x^3 - 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sqrt{9x}}{7 - x\sqrt{x}}$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^4 + 5x^2 - 2}$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 3x + 1}$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 3x - 1}{6x^3 + 1}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^2 + x - 2}$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^3}{3x^2 + 2x - 1}$

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 5)^2}{2x^3 - 7x^2 + 1}$

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - x^2}{x^3 + 27x - 1}$

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 12x + 1}{7 - 5x^2}$

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x(x-2)}{x^2 - 2}$

16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 4}{x^5 + 6x^3 + 4}$

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 8}{x^3 - 8}$

19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 9}{3x^2 + x - 1}$

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^3}{x^2 + 1}$

21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x} + x^2}{3x - 2}$

22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{1 - 2x^2}$

23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 5}{x + 6}$

24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x - 1}{2 - x^2}$

25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^3}{2x^3 - 6}$

26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{4x^2 - 2x + 7}$

27. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 1)^4}{x^3 - 6x^2 + 3}$

28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 - x^2}{x^3 + 4x^2 - 6}$

29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 21x + 15}{10x - 5x^3}$

30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x(x+3)}{x^3 - 27}$

Задача 3.3

Найти предел функции:

1. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 36}$

2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{\sqrt{x} - 2}$

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{2x^2 + 3x - 5}$

12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{\sqrt{2x+5} - 3}$

21. $\lim_{x \rightarrow 11} \frac{4 - \sqrt{x+5}}{x^2 - 121}$

22. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{\sqrt{x-1} - 2}$

- | | | |
|--|--|--|
| 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{2 - \sqrt{5 - x}}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{\sqrt{x + 5} - 2}$ | 23. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{3x^2 - 4x - 4}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x + 9} - 3}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6} - 3}{x^2 - 3x}$ | 24. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x + 12} - 4}{x^2 - 3x - 4}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x - 2} - 2}{6x - x^2 - 9}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{x + 16}}{x^2 - 5x}$ | 25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 7x}{\sqrt{9 + 3x} - 3}$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2 - x} - 1}{x^2 - 1}$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x + 5} - 3}{x^2 + 3x - 28}$ | 26. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{2x + 3}}{x^2 - 7x + 12}$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - \sqrt{6 + x}}{x^2 + 4x + 4}$ | 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x + 9}}{x^3 + x}$ | 27. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x + 5} - 2}{5x^2 + 2x - 3}$ |
| 8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x^2 - 6x + 8}$ | 18. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x + 2} - 3}{x^2 - 6x - 7}$ | 28. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{\sqrt{2x + 20} - 4}$ |
| 9. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + \sqrt{x + 2}}$ | 19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x^2 + 7x - 8}$ | 29. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 12x + 32}{\sqrt{x + 8} - 4}$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - \sqrt{3x + 10}}{x^2 - 25}$ | 20. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x + 3} - 3}{x^2 - 6x}$ | 30. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{28 + x} - 5}{2x^2 + 3x - 9}$ |

Задача 3.4

Найти предел функции:

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 2}{x} \right)^{2+3x}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x-1}$ | 21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 8}{5 + x} \right)^{\frac{x-3}{3}}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 2}{3x} \right)^{2x}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 8}{x - 4} \right)^{2-3x}$ | 22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5}{x^2} \right)^{\frac{x+1}{10}}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x} \right)^{5x}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 2}{3x - 5} \right)^{x+5}$ | 23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x + 5}{7x - 1} \right)^{6x+12}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 2}{3x + 1} \right)^{3x}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 6}{2x + 1} \right)^{x-3}$ | 24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 7}{x + 5} \right)^{5x-7}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x)^{\frac{2-x}{x}}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{5} \right)^{\frac{2}{5x}}$ | 25. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{7x}{8} \right)^{\frac{1+x}{8x}}$ |

- | | | | | | |
|-----|--|-----|--|-----|---|
| 6. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{\frac{x}{2}}$ | 16. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{3+x}$ | 26. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-3}{2x^2} \right)^{2(x-1)}$ |
| 7. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{x} \right)^{x-1}$ | 17. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x} \right)^{-2+x}$ | 27. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+7} \right)^{4+7x}$ |
| 8. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-1} \right)^{5x}$ | 18. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{2+x} \right)^{2x-3}$ | 28. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x-1} \right)^{x+5}$ |
| 9. | $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2} \right)^{\frac{3+x}{x}}$ | 19. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-4}{x^2} \right)^{\frac{x+1}{4}}$ | 29. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x-4}{9x+4} \right)^{x+4}$ |
| 10. | $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2x}{3} \right)^{\frac{4+x}{2x}}$ | 20. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-9}{x^2} \right)^{\frac{x-1}{9}}$ | 30. | $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{6} \right)^{\frac{6+x}{x}}$ |

Задача 3.5

С помощью принципа замены эквивалентных величин вычислить предел:

- | | | | | | |
|----|--|-----|--|-----|--|
| 1. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2}$ | 11. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{tg} x}$ | 21. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{x \arcsin x}$ |
| 2. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x}$ | 12. | $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin 3x}{2x} - 1 \right)$ | 22. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\cos x - 1}$ |
| 3. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x \cos x}$ | 13. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{2x^2}$ | 23. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{\cos 2x - 1}$ |
| 4. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x}$ | 14. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{2x}$ | 24. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 3x}{\cos 3x - 1}$ |
| 5. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x - 1)}{x^2}$ | 15. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{2x^2}$ | 25. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3}{2 \sin^2 4x}$ |
| 6. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos 4x}{\sin^2 x}$ | 16. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{2 \operatorname{tg} x}$ | 26. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x(1 - \cos 3x)}{\sin^2 x}$ |
| 7. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1-x)}$ | 17. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x \sin 3x}$ | 27. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 4x}{4x}$ |
| 8. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x(2-x)}$ | 18. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{2 - 2 \cos x}$ | 28. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3 \cos 3x}{6x \operatorname{tg} 3x}$ |

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\arcsin x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{(2-x)\operatorname{tg} 4x}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{(5-x)x^2}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{4x(4-x)}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{3x}$$

Задача 3.6

Исследовать на непрерывность функцию. Определить характер точек разрыва функции:

$$1. y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

$$2. y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-9}$$

$$3. y = \frac{\sqrt[3]{2x+1}}{2x-1}$$

$$4. y = \frac{x^2+1}{x-3}$$

$$5. y = \frac{2-x}{x-5}$$

$$6. y = \frac{\sqrt[3]{3x-9}}{7x-7}$$

$$7. y = \frac{3x^2+1}{7-x}$$

$$8. y = \frac{x+4}{x-4}$$

$$9. y = \frac{\sqrt{2x+5}}{x-5}$$

$$10. y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-16}$$

$$11. y = \frac{\sqrt{x-5}}{2x-13}$$

$$12. y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-25}$$

$$13. y = \frac{\sqrt[3]{1-3x}}{x+5}$$

$$14. y = \frac{x^2-6}{3x+5}$$

$$15. y = \frac{1-3x}{x+4}$$

$$16. y = \frac{\sqrt{5-2x}}{x^2-9}$$

$$17. y = \frac{\sqrt[3]{1+x}}{2x-7}$$

$$18. y = \frac{x^2+5}{4x+1}$$

$$19. y = \frac{\sqrt{2-x}}{x-1}$$

$$20. y = \frac{\sqrt{2-3x}}{x^2-1}$$

$$21. y = \frac{\sqrt[3]{x+27}}{x+5}$$

$$22. y = \frac{x^2+4}{2x-5}$$

$$23. y = \frac{3x+6}{x+2}$$

$$24. y = \frac{\sqrt{x+4}}{3x-9}$$

$$25. y = \frac{\sqrt{2x+3}}{x^2-4}$$

$$26. y = \frac{\sqrt[3]{1-4x}}{2x+5}$$

$$27. y = \frac{3x^2-5}{4x+3}$$

$$28. y = \frac{2+7x}{7x-1}$$

$$29. y = \frac{\sqrt[3]{x^2-16}}{x+5}$$

$$30. y = \frac{1-8x^2}{4-8x}$$

Задание № 4

ТЕМА: ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задача 4.1

Найти первую производную функции:

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $y = (3^{2x} + 5)\sqrt{4 - x}$ | $y = \frac{\ln x + 5x}{1 + x^2}$ | $y = \log_2(x - \cos x)$ |
| 2. $y = 5e^{4x}(x + 7^x)$ | $y = \frac{\cos x + \sqrt{x}}{x^6 - 1}$ | $y = \arcsin \sqrt{x + 2}$ |
| 3. $y = 5^{3x} \sin(4x + 1)$ | $y = \frac{x^2 + 2}{\ln 2x}$ | $y = \frac{1}{3} \sin^3(2x^2 + 7)$ |
| 4. $y = (x^2 + 5x) \log_2(x + 1)$ | $y = \frac{x^2 - 1}{\operatorname{tg} x}$ | $y = \ln \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$ |
| 5. $y = 2^x(x + \cos 3x)$ | $y = \frac{e^{-x} - e^x}{2x}$ | $y = e^{\arcsin \frac{1}{x}}$ |
| 6. $y = (\sqrt{x + 2} - 1) \operatorname{tg} 4x$ | $y = \frac{2x^4 + 5x}{\operatorname{tg} 4x}$ | $y = \ln \cos(2x + 1)$ |
| 7. $y = (2x^3 - 5) \operatorname{ctg}(3x + 1)$ | $y = \frac{x + 6^x}{\log_2 x}$ | $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 2}$ |
| 8. $y = 5^{x+1} \sqrt[4]{x - 2}$ | $y = \frac{\lg x + 1}{x^2 + 1}$ | $y = \sqrt{1 + \ln(x + 3)}$ |
| 9. $y = 2e^{3x}(\arcsin x - 1)$ | $y = \frac{3x^2 - \sin x}{e^x}$ | $y = \log_2(1 + \cos x)$ |
| 10. $y = (\sqrt[3]{x^2} + 2x) \sin 5x$ | $y = \frac{\cos x + 2x}{x^2 - 1}$ | $y = \operatorname{tg}^2(1 + 5^x)$ |
| 11. $y = \sqrt{2x - 1} \arccos 5x$ | $y = \frac{5^x + x^5}{\sin x}$ | $y = \ln(1 + \cos^2 x)$ |
| 12. $y = x \log_3(2x - 1)$ | $y = \frac{\sqrt{x + 4} + 5}{x^3}$ | $y = \sqrt{\sin 5x - 4x}$ |
| 13. $y = e^{3x} \cos 4x$ | $y = \frac{\operatorname{tg} x + 5x}{\sqrt{x}}$ | $y = \arcsin(3^{4x} + 2x)$ |
| 14. $\sqrt[3]{x - 8} \operatorname{arctg} 2x$ | $y = \frac{2^{3x} - 3x}{\ln x}$ | $y = \sqrt{1 + 5^{3x} - \sin x^2}$ |
| 15. $y = 3^{2x} \cos(5x - 2)$ | $y = \frac{\ln x - 4x}{3^{2x}}$ | $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + e^x - 1}$ |

- | | | | |
|-----|--|---|---|
| 16. | $y = (x^5 + e^x) \operatorname{ctg} 2x$ | $y = \frac{2\sqrt{x} - 4x}{e^x + 1}$ | $y = \arcsin \ln(x + 1)$ |
| 17. | $y = 5^{2x} \operatorname{arctg} 2x$ | $y = \frac{7x + \cos 5x}{1 - 6x^2}$ | $y = \log_2(6^{\sin x} + 1)$ |
| 18. | $y = e^{3x+1} \ln(x - 1)$ | $y = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ | $y = \sqrt{x^4 + 4^{\operatorname{tg} 2x}}$ |
| 19. | $y = (\sqrt{x} - 5x) \operatorname{ctg} 2x$ | $y = \frac{\log_5 x - x}{\operatorname{tg} x + 1}$ | $y = 5 \cos^3(x + 2^{x+1})$ |
| 20. | $y = \sqrt[3]{x^2} \cos(5x - 4)$ | $y = \frac{4x^7 + 2^x}{\ln 3x}$ | $y = \sqrt[4]{e^{4x-5} + 2 \operatorname{tg} 4x}$ |
| 21. | $y = \sqrt{2x - 3} \ln(2x + 5)$ | $y = \frac{\sin 2x}{1 + 2^x}$ | $y = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg} x^2$ |
| 22. | $y = 4^{2x} \sqrt[3]{3 - x}$ | $y = \frac{3x^8 + 2x}{\sin(x + 1)}$ | $y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg}(\ln 5x - x^5)$ |
| 23. | $y = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \sin 3x$ | $y = \frac{\lg 6x + 3x^{-2}}{\sqrt{x} - 4}$ | $y = e^{\arccos \sqrt{x}}$ |
| 24. | $y = 3^x \ln(3x + 1)$ | $y = \frac{2x^2 - 2x}{e^{4x} - 5}$ | $y = 5^{\operatorname{tg} 3x} + \sin^2 x$ |
| 25. | $y = \sqrt[4]{x - 1} \operatorname{ctg} x$ | $y = \frac{3x^4 + 4^{2x}}{\ln(x + 1)}$ | $y = \sqrt{x^2 - 1} + 6^{\operatorname{ctg}(x+1)}$ |
| 26. | $y = (x^2 + 1) \log_5 4x$ | $y = \frac{\cos 6x + \frac{3}{\sqrt{x}}}{e^x + 1}$ | $y = \ln \arccos(x + 2)$ |
| 27. | $y = \left(e^{2x} + \frac{2}{x}\right) \operatorname{tg} 5x$ | $y = \frac{7^{2x} - 4}{\operatorname{ctg} x}$ | $y = \log_3 \sin \sqrt[4]{x}$ |
| 28. | $y = (3x^{-2} + 1) \operatorname{arcc} \operatorname{tg} 3x$ | $y = \frac{\sin(5x + 1) - 2}{e^{2x}}$ | $y = \sqrt[3]{\ln^2 x + 5^x}$ |
| 29. | $y = (5^{-2x} + x) \ln x$ | $y = \frac{x^6 - 5x}{\cos(2x - 1)}$ | $y = \sqrt{1 - (\arccos x)^2}$ |
| 30. | $y = 3^x \left(\cos 2x + \frac{1}{x^2}\right)$ | $y = \frac{2 \ln 4x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{3x^4 - x^3}$ | $y = e^{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x}}$ |

Задача 4.2

Найти производную второго порядка:

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1. $y = \cos 2x + x^2$ | 16. $y = \log_2(4x + 5) + 3$ |
| 2. $y = \sin 5x - 4x^3$ | 17. $y = x \cos 2x$ |
| 3. $y = e^{2x} + \cos(x + 1)$ | 18. $y = x \ln x$ |
| 4. $y = 5x^3 - 5^x$ | 19. $y = e^{x-2} + 7x^{-2}$ |
| 5. $y = \ln(x + 1) - 2x$ | 20. $y = e^x \sin 3x$ |
| 6. $y = 7^{5x} - \sin 2x$ | 21. $y = \ln^2(x + 1)$ |
| 7. $y = \frac{4}{x} + e^{4x}$ | 22. $y = \ln(1 - x) + 6^x$ |
| 8. $y = \lg(x - 1) + 4x^3$ | 23. $y = x^2 e^{2x}$ |
| 9. $y = 8^{3x} + \ln x$ | 24. $y = 7^{2x} + \cos 2x$ |
| 10. $y = 2x^4 - \cos(x - 1)$ | 25. $y = \frac{2}{x} + e^x$ |
| 11. $y = \log_3(x + 5) + e^{4x}$ | 26. $y = \operatorname{tg} 4x + 5x$ |
| 12. $y = xe^{2x}$ | 27. $y = \operatorname{ctg} 5x + e^{2x}$ |
| 13. $y = \ln(5x + 1) + 4x$ | 28. $y = \ln(2x - 4) + 2x^{-3}$ |
| 14. $y = \frac{2}{x} + \cos 2x$ | 29. $y = 2 \arccos x + 6$ |
| 15. $y = 5^{2x} + x^5$ | 30. $y = \ln \cos 4x$ |

Задача 4.3

Вычислить предел функции, используя правило Лопиталя:

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\cos x - 1}$ | 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\cos x - 1}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\operatorname{tg} x}$ | 22. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2 \cos x}{1 - \sin x}$ |

- | | | |
|--|--|--|
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x^2}$ | 23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}$ | 24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sin x}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x}{e^{3x} - 1}$ | 25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1-x)}$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2x - \pi}{1 - \sin x}$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$ | 26. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\cos \pi x}{1 - 2x}$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \sin(x-2)}{x-2}$ | 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ | 27. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{4x}}$ |
| 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ | 18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{\sin x}$ | 28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}$ |
| 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{arcsin} x}$ | 19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$ | 29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(1-x)}$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{arcsin} x}$ | 20. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{2x - \pi}$ | 30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$ |

Задача 4.4

Найти интервалы монотонности функции и ее экстремумы:

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 1. $y = \frac{4x^2 + 1}{x}$ | 11. $y = \frac{16x^2 + 9}{x}$ | 21. $y = \frac{x^2 + 36}{x}$ |
| 2. $y = \frac{x^2 + 4}{x}$ | 12. $y = \frac{25x^2 + 1}{x}$ | 22. $y = \frac{4x^2 + 36}{x}$ |
| 3. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ | 13. $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ | 23. $y = \frac{36x^2 + 4}{x}$ |
| 4. $y = \frac{9x^2 + 1}{x}$ | 14. $y = \frac{4x^2 + 25}{x}$ | 24. $y = \frac{25x^2 + 36}{x}$ |
| 5. $y = \frac{x^2 + 9}{x}$ | 15. $y = \frac{25x^2 + 4}{x}$ | 25. $y = \frac{36x^2 + 25}{x}$ |
| 6. $y = \frac{4x^2 + 9}{x}$ | 16. $y = \frac{25x^2 + 9}{x}$ | 26. $y = \frac{64x^2 + 1}{x}$ |

- | | | | | | |
|-----|---------------------------|-----|----------------------------|-----|----------------------------|
| 7. | $y = \frac{9x^2 + 4}{x}$ | 17. | $y = \frac{9x^2 + 25}{x}$ | 27. | $y = \frac{x^2 + 64}{x}$ |
| 8. | $y = \frac{16x^2 + 1}{x}$ | 18. | $y = \frac{16x^2 + 25}{x}$ | 28. | $y = \frac{64x^2 + 9}{x}$ |
| 9. | $y = \frac{x^2 + 16}{x}$ | 19. | $y = \frac{25x^2 + 16}{x}$ | 29. | $y = \frac{64x^2 + 9}{x}$ |
| 10. | $y = \frac{9x^2 + 16}{x}$ | 20. | $y = \frac{36x^2 + 1}{x}$ | 30. | $y = \frac{64x^2 + 25}{x}$ |

Задача 4.5

Найти наибольшее и наименьшее значение функции на указанном отрезке:

- | | | | |
|-----|--|-----|--|
| 1. | $y = 5 + x + \frac{4}{x}, \quad x \in [1; 3]$ | 16. | $y = 3 - 2x - \frac{1}{2x}, \quad x \in [-1; -0,1]$ |
| 2. | $y = 1 + 2x + \frac{8}{x}, \quad x \in [1; 3]$ | 17. | $y = 14 + 3x + \frac{3}{4x}, \quad x \in [-2; -0,1]$ |
| 3. | $y = 8 + 3x + \frac{12}{x}, \quad x \in [1; 3]$ | 18. | $y = 7 - 3x - \frac{1}{3x}, \quad x \in [-1; -0,1]$ |
| 4. | $y = -2 - x - \frac{9}{x}, \quad x \in [1; 4]$ | 19. | $y = 9 - 6x - \frac{2}{3x}, \quad x \in [-1; -0,1]$ |
| 5. | $y = 7 + 2x + \frac{18}{x}, \quad x \in [1; 4]$ | 20. | $y = 1 + 5x + \frac{1}{5x}, \quad x \in [-1; -0,1]$ |
| 6. | $y = 7 - 3x - \frac{27}{x}, \quad x \in [1; 4]$ | 21. | $y = 13 + 5x + \frac{4}{5x}, \quad x \in [-1; -0,1]$ |
| 7. | $y = 5 + 2x + \frac{1}{2x}, \quad x \in [0,1; 2]$ | 22. | $y = 6 - 3x - \frac{4}{3x}, \quad x \in [-2; -0,1]$ |
| 8. | $y = -2 - 3x - \frac{3}{4x}, \quad x \in [0,1; 1]$ | 23. | $y = 31 + 4x + \frac{9}{4x}, \quad x \in [-3; -0,1]$ |
| 9. | $y = 5 + 3x + \frac{1}{3x}, \quad x \in [0,1; 2]$ | 24. | $y = 10 - 5x - \frac{9}{5x}, \quad x \in [-3; -0,1]$ |
| 10. | $y = -3 + 6x + \frac{2}{3x}, \quad x \in [0,1; 1]$ | 25. | $y = 7 - x - \frac{4}{x}, \quad x \in [-3; -1]$ |

- | | | | |
|-----|--|-----|--|
| 11. | $y = 3 - 5x - \frac{1}{5x}, \quad x \in [0, 1; 2]$ | 26. | $y = 3 - 2x - \frac{8}{x}, \quad x \in [-3; -1]$ |
| 12. | $y = 7 - 5x - \frac{4}{5x}, \quad x \in [0, 1; 1]$ | 27. | $y = 11 - 3x - \frac{12}{x}, \quad x \in [-3; -1]$ |
| 13. | $y = 1 + 3x + \frac{4}{3x}, \quad x \in [0, 1; 1]$ | 28. | $y = 5 + x + \frac{9}{x}, \quad x \in [-4; -1]$ |
| 14. | $y = 7 - 4x - \frac{9}{4x}, \quad x \in [0, 1; 1]$ | 29. | $y = 5 - 2x - \frac{18}{x}, \quad x \in [-4; -1]$ |
| 15. | $y = 5 + 5x + \frac{9}{5x}, \quad x \in [0, 1; 1]$ | 30. | $y = 1 + 3x + \frac{27}{x}, \quad x \in [-4; -1]$ |

Задание № 5

ТЕМА: ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задача 5.1

Используя метод непосредственного интегрирования, вычислить интеграл:

- | | | | |
|----|---|-----|---|
| 1. | $\int \left(x^5 + \cos 2x + \frac{4}{\sin^2(3x-1)} \right) dx$ | 16. | $\int \left(7^x - 2\sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x^2+1} \right) dx$ |
| 2. | $\int \left(5^x + \sin(x+1) + \frac{1}{x} \right) dx$ | 17. | $\int \left(\frac{1}{x} - (x-1)^2 + \frac{9}{\sqrt{4-9x^2}} \right) dx$ |
| 3. | $\int \left(\frac{4}{x^4} + e^x + 4x \right) dx$ | 18. | $\int \left(\frac{4}{\sqrt[5]{x}} - 2\cos^{-2}(x-1) - 5 \right) dx$ |
| 4. | $\int \left(\frac{2}{1+4x^2} + 2^x + \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx$ | 19. | $\int \left(\frac{5}{\sqrt{16-x^2}} - \frac{x^3}{4} + \frac{4}{3x} \right) dx$ |
| 5. | $\int \left(\frac{1}{4-x^2} + x^{-3} + \frac{4}{\sin^2 3x} \right) dx$ | 20. | $\int \left(\frac{1}{x^2} + 6^{3x} - \frac{3}{\cos^2(x+1)} \right) dx$ |
| 6. | $\int \left(\cos(3x-1) + e^{2x} + \frac{5}{x} \right) dx$ | 21. | $\int \left(\frac{\cos(x-3)}{3} - e^{x+1} + \frac{9}{x^2-9} \right) dx$ |

7. $\int \left(\frac{7}{\sqrt{1-x^2}} + 4 \cdot 4^{4x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$
8. $\int \left(\frac{5}{\cos^2(5x+1)} - 6x^5 - \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} \right) dx$
9. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x^2-1}} + e^{6x} - \frac{7}{\sin^2(7x-5)} \right) dx$
10. $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x^2+4}} - 5x^4 + \frac{8}{x-4} \right) dx$
11. $\int \left(\frac{5}{\sqrt{9-x^2}} - 7e^{7x} + \frac{3}{7x+4} \right) dx$
12. $\int \left(\frac{4}{x^2-16} + \cos(3x+1) + \frac{3}{x^5} \right) dx$
13. $\int \left(\frac{4}{9x^2+4} + 3\sin(x-10) + 10 \right) dx$
14. $\int \left(\frac{9}{\cos^2(3x)} + \frac{\sqrt[5]{x^4}}{5} - \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} \right) dx$
15. $\int \left(\frac{6}{(x+1)^2} - 5\sin(3x+1) - \frac{3}{x-1} \right) dx$
22. $\int \left(\frac{3}{x^4} + \frac{4}{\sin^2 4x} - 2 \right) dx$
23. $\int \left(\frac{1}{9+x^2} - \sin^{-2} x + \frac{4}{3(x-2)} \right) dx$
24. $\int \left(\frac{2}{3-x} + 3^{x-2} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$
25. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+9}} + 4x^3 + \frac{9}{3+x} \right) dx$
26. $\int \left(\frac{1}{4-x^2} + x^{-3} + \frac{4}{\sin^2 3x} \right) dx$
27. $\int \left(\sin 3x + e^{x-3} + \frac{4}{3(x-2)^5} \right) dx$
28. $\int \left(\cos(3-x) + 5x + \frac{4}{x^2+4} \right) dx$
29. $\int \left(\frac{1}{2x} - 2\sqrt{x} + \frac{3}{\cos^2(3-x)} \right) dx$
30. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}} - 2\sqrt{x} + 4 \right) dx$

Задача 5.2

Используя метод подстановки (замены переменной интегрирования), вычислить интеграл:

1. $\int 5^x \cos 5^x dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x \cos^2 x}}$
3. $\int \frac{\sqrt[4]{\ln^3 x} dx}{x}$
11. $\int 7^x (7^x + 2)^2 dx$
12. $\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 1}$
13. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$
21. $\int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx$
22. $\int x \sqrt[5]{5-x^2} dx$
23. $\int \frac{e^x}{e^x + 5} dx$

- | | | |
|---|---|--|
| 4. $\int x e^{x^{-2}} dx$ | 14. $\int 5^{\sin x} \cos x dx$ | 24. $\int \frac{6x}{3x^2 - 2x} dx$ |
| 5. $\int \frac{x^3 dx}{\sin^2 x^4}$ | 15. $\int \frac{x^2 dx}{x^3 - 2}$ | 25. $\int \frac{3x}{\sqrt{5x^2 + 1}} dx$ |
| 6. $\int \frac{dx}{x(9 - \ln^2 x)}$ | 16. $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$ | 26. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$ |
| 7. $\int \frac{6^x dx}{\sqrt{36^x + 1}}$ | 17. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ | 27. $\int \frac{dx}{\arccos x \sqrt{1 - x^2}}$ |
| 8. $\int 3x \cdot 3^{x^2} dx$ | 18. $\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx$ | 28. $\int \frac{\cos \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$ |
| 9. $\int \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)}$ | 19. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x^2}$ | 29. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x^2}$ |
| 10. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{2 \cos x + 1}}$ | 20. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$ | 30. $\int \frac{(\arctg x)^2 dx}{1 + x^2}$ |

Задача 5.3

Используя метод интегрирования по частям, вычислить интеграл:

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 1. $\int x \cos 5x dx$ | 16. $\int x \arctg x dx$ |
| 2. $\int x \sin 4x dx$ | 17. $\int (2x - 3) \cos x dx$ |
| 3. $\int x \arctg x dx$ | 18. $\int (1 - 4x) \sin 2x dx$ |
| 4. $\int x e^{3x} dx$ | 19. $\int (x - 1) \ln x dx$ |
| 5. $\int (x + 1) e^{-x} dx$ | 20. $\int x \cdot 2^{-x} dx$ |
| 6. $\int 3 \arcsin 2x dx$ | 21. $\int (3x - 2) \cos 4x dx$ |
| 7. $\int (3x - 1) \cos 2x dx$ | 22. $\int 5x \arctg 5x dx$ |
| 8. $\int x^2 \ln x dx$ | 23. $\int \frac{x}{e^x} dx$ |
| 9. $\int \arccos x dx$ | 24. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ |
| 10. $\int \arcsin 3x dx$ | 25. $\int x \sin(x - 1) dx$ |
| 11. $\int \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \cos 2x dx$ | 26. $\int (3x + 5) e^{5x} dx$ |
| 12. $\int x \cdot 10^x dx$ | 27. $\int (x + 2) 4^{-2x} dx$ |

$$13. \int x \sin \frac{x}{3} dx$$

$$14. \int \sqrt[4]{x} \ln x dx$$

$$15. \int x \cos \frac{x}{2} dx$$

$$28. \int (5x+1) \ln x dx$$

$$29. \int 3x \log_3 x dx$$

$$30. \int \sqrt[3]{x} \ln x dx$$

Задача 5.4

Вычислить определенный интеграл:

$$1. \int_0^4 \frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$11. \int_0^1 \left(x - \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$21. \int_0^{1/4} \left(\frac{1}{\cos^2 \pi x} - e^{-x} \right) dx$$

$$2. \int_2^{29} \left(1 + (x-2)^{2/3} \right) dx$$

$$12. \int_0^{\pi} (2 \cos x - \sin 2x) dx$$

$$22. \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sin \pi x \right) dx$$

$$3. \int_0^1 (2e^x - 3) dx$$

$$13. \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4}$$

$$23. \int_0^{1/2} \left(x^3 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$4. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{3+2 \cos x}$$

$$14. \int_0^{\pi} (\cos 5x + 2x) dx$$

$$24. \int_{-2}^5 (\sqrt[3]{5x+2} - 5^x) dx$$

$$5. \int_1^e \left(5 - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$15. \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 5 \right) dx$$

$$25. \int_0^2 \left(\frac{3}{1+x^2} - e^{5x} \right) dx$$

$$6. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx$$

$$16. \int_1^2 \left(\sin \pi x - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$26. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$7. \int_1^5 \frac{(x^2+3) dx}{x}$$

$$17. \int_1^9 \frac{1+x^2}{x^3} dx$$

$$27. \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$$

$$8. \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\cos x + 2x) dx$$

$$18. \int_{\pi/6}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 12 \right) dx$$

$$28. \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(\pi-x) + x) dx$$

$$9. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$19. \int_0^3 (x - 3e^{3x}) dx$$

$$29. \int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 3^x \right) dx$$

$$10. \int_0^1 (1 + e^{2x}) dx$$

$$20. \int_1^e \left(2\sqrt{x} + \frac{5}{x} \right) dx$$

$$30. \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{1+x^2} + x^3 \right) dx$$

Задача 5.5

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

2. $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+5}}$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+5}$

5. $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$

6. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

7. $\int_0^{+\infty} 3^{-x} dx$

8. $\int_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{(x+6)^2}$

9. $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(2x-7)^2}$

10. $\int_{-\infty}^1 e^x dx$

11. $\int_2^{+\infty} e^{2x} dx$

12. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+1}$

13. $\int_1^{+\infty} 5^{2x} dx$

14. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^3}$

15. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{3dx}{x^2}$

16. $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$

17. $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$

18. $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{2x-3}$

19. $\int_{-\infty}^2 e^{x+3} dx$

20. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+9}$

21. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{2x+5}}$

22. $\int_{-\infty}^{-8} \frac{dx}{x^3\sqrt{x}}$

23. $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{3x-1}$

24. $\int_1^{+\infty} e^{-(x-1)} dx$

25. $\int_0^{+\infty} \sqrt{3x+1} dx$

26. $\int_0^{+\infty} 7^{-2x+1} dx$

27. $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)^3}$

28. $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$

29. $\int_{-\infty}^1 \sqrt[3]{x-2} dx$

30. $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}$

Задание № 6

ТЕМА: ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задача 6.1

Найти частные производные первого порядка функции:

1. $u = (x^3 + y^2 - z^3)^2$

2. $u = x^3 + z \ln(y - z)$

3. $u = \sqrt{2x + yz} - z^2$

4. $u = \cos(x + y) - zx^3$

5. $u = \sqrt[3]{xyz} + y \sin x$

6. $u = e^{x+y} - 2\sqrt{xz}$

7. $u = 5^{x+y} - \frac{2}{\sqrt{x-z}}$

8. $u = \operatorname{arctg}(x + 3y) - 2 \ln xz$

9. $u = \frac{x+y}{y} - x \log_3(y^2 + z)$

10. $u = \frac{x}{\sqrt{y}} - 2 \operatorname{tg}(2x + 3z^2)$

11. $u = \frac{1}{\sqrt{2x-y}} - 3^{z+x} \cdot z$

12. $u = \frac{\sqrt{x}}{y} - 2 \log_2(x - y + z)$

13. $u = \frac{\operatorname{arctg} x}{z} - 5yx^2z$

14. $u = z \sin(xy) - yx^2$

15. $u = xy - \frac{xz}{y^2}$

16. $u = 3^{\frac{x}{y}} - z \sin xy$

17. $u = x^{-3}(4 + y) + \log_5(xz^2 - 5)$

18. $u = x \cos y - z \sin x$

19. $u = \operatorname{ctg}(xy - z) - \frac{z}{x^3}$

20. $u = 5^{x+2z} - 3\sqrt[3]{xy}$

21. $u = \frac{5y}{\sqrt{x-z}} - \cos(yz)$

22. $u = \sqrt[3]{xy} + z \cos(x - 2y)$

23. $u = \frac{y}{\sqrt[3]{x+5z}} + 4^z$

24. $u = \operatorname{arctg}(x - z) - 2y^2$

25. $u = e^{\sqrt{x+y^2-z}} + xyz$

26. $u = \operatorname{arcctg} \frac{x+y}{z} - 2x \ln z$

27. $u = \frac{1}{\sqrt{x-4y}} + x \ln z$

28. $u = \arcsin(x^2 + 3) - 2y\sqrt{z}$

29. $u = 2\sqrt{x-y} + x^z$

30. $u = \sin^2(x + y) + 2z \cos y$

Задача 6.2

Дана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Найти

a) градиент функции в точке A ;

b) производную этой функции в точке A в направлении вектора $\overline{AB}$:

1.	$z = x + y^2$	$A(1; 5)$	$B(5; 2)$
2.	$z = -\frac{x^2}{2} - y^2$	$A(3; 2)$	$B(6; -2)$
3.	$z = y + \frac{x^2}{y}$	$A(1; 1)$	$B(-3; -4)$
4.	$z = \arccos(x + y)$	$A(-2; 2)$	$B(-1; -2)$
5.	$z = \ln(x + 4y)$	$A(2; 1)$	$B(8; -7)$
6.	$z = 5\arctg(2x - 4y)$	$A(-1; 2)$	$B(2; -2)$
7.	$z = 2x + \frac{y^2}{2x}$	$A(-2; 1)$	$B(-6; 5)$
8.	$z = x - \frac{y^2}{2x}$	$A(-2; 2)$	$B(1; -2)$
9.	$z = \frac{x^2 + y^2}{2y}$	$A(2; -2)$	$B(5; 2)$
10.	$z = \frac{x^2}{y} - y^2$	$A(2; 1)$	$B(-5; 4)$
11.	$z = 2y + \frac{x^2}{y}$	$A(1; 2)$	$B(4; -2)$
12.	$z = y + x^2$	$A(-1; 5)$	$B(3; 2)$
13.	$z = e^{x+y}$	$A(1; -2)$	$B(-3; 2)$
14.	$z = yx^2$	$A(1; 1)$	$B(-3; -3)$
15.	$z = \arccos(2xy)$	$A(0; 1)$	$B(1; 1)$
16.	$z = \log_2(4xy)$	$A(-1; 1)$	$B(-5; 5)$
17.	$z = \arccotg(3xy)$	$A(-1; 2)$	$B(2; -2)$

18.	$z = 3x + xy^2$	$A(-2; 1)$	$B(-8; -7)$
19.	$z = x - 3xy^2$	$A(-2; 2)$	$B(2; -5)$
20.	$z = \frac{x^2 + y^2}{2y}$	$A(2; -2)$	$B(5; 2)$
21.	$z = \frac{x^2}{y} - y^3$	$A(2; 1)$	$B(-5; 3)$
22.	$z = 2y + \frac{x^2}{y}$	$A(1; 2)$	$B(4; -2)$
23.	$z = 2 \cos(x - y)$	$A(1; 1)$	$B(-5; -7)$
24.	$z = \sin\left(y + \frac{\pi}{x}\right)$	$A(2; 0)$	$B(2; 4)$
25.	$z = 5^{x+2y}$	$A(0; -2)$	$B(3; 2)$
26.	$z = y + e^x$	$A(-1; -1)$	$B(3; 3)$
27.	$z = \sqrt{2x + y}$	$A(2; 2)$	$B(-1; -1)$
28.	$z = \log_2(4x - y)$	$A(1; 3)$	$B(-5; -5)$
29.	$z = \sqrt[3]{2x - y}$	$A(0; -2)$	$B(8; 4)$
30.	$z = 3y - x^2y$	$A(2; 1)$	$B(8; -7)$

Задача 6.3

Найти экстремум функции двух переменных:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. $z = x^2 + xy + 2y^2 - 3x + 1$ | 16. $z = 20x^2 - 14xy + 13y^2 + 6y - 16$ |
| 2. $z = -x^2 + 2xy - 9y^2 - 4y + 2$ | 17. $z = -8x^2 + 8xy - 8y^2 + 5y + 17$ |
| 3. $z = 2x^2 + 3xy + y^2 + 3$ | 18. $z = 12x^2 - 13xy + 12y^2 - 18$ |
| 4. $z = -4x^2 + 5xy - 4y^2 - 4x - 4$ | 19. $z = -5x^2 + 4xy - 5y^2 + 7x + 19$ |
| 5. $z = 15x^2 + 11y^2 + 7y - x + 5$ | 20. $z = 3x^2 - 5y^2 + 7y - 7x + 20$ |
| 6. $z = -2x^2 + 2xy - 3y^2 - x + 6$ | 21. $z = -21x^2 - 12xy - 5y^2 - x + 3y + 21$ |
| 7. $z = x^2 + 4xy + 12y^2 - 3y + 7$ | 22. $z = 12x^2 - 3xy + 2y^2 - y + x - 22$ |
| 8. $z = -2x^2 - 5xy - 13y^2 + 5x - 8$ | 23. $z = -13x^2 + 6xy - 2y^2 + 4y - 23$ |

9. $z = 4x^2 - 3xy + 8y^2 - 7y - 9$ 24. $z = 8x^2 + 5xy + 4y^2 - x + 7y + 24$
 10. $z = -3x^2 + 6xy - 15y^2 + 14y - 10$ 25. $z = -15x^2 + xy - 3y^2 + x - 4y - 25$
 11. $z = 5x^2 + 11xy + 15y^2 + 5x - 11$ 26. $z = 15x^2 + 10xy + 13y^2 + 5y - 26$
 12. $z = -12x^2 - 6xy - 2y^2 - 5x + 12$ 27. $z = -2x^2 + 7xy - 13y^2 + 6x + 27$
 13. $z = 7x^2 - 5xy + 13y^2 + 14y - 13$ 28. $z = 18x^2 + 9xy + 2y^2 + 14x - y + 27$
 14. $z = 3x^2 - 9xy + 21y^2 + 5y - 14$ 29. $z = 8x^2 - 8xy + 7y^2 - 4x - 12y + 28$
 15. $z = -15x^2 + 7xy - 5y^2 + 7y + 15$ 30. $z = -21x^2 - 5y^2 + 7x - 21y + 30$

Задача 6.4

Используя метод наименьших квадратов (МНК), найти функцию $y = ax + b$, которая наилучшим образом описывает зависимость между переменными x и y :

1.	x	1	2	3	4	5
	y	2	4	6	9	8

2.	x	1	2	3	4	5
	y	3	6	9	8	11

3.	x	1	2	3	4	5
	y	3	7	9	11	15

4.	x	1	2	3	4	5
	y	5	7	9	13	12

5.	x	1	2	3	4	5
	y	10	13	15	14	18

6.	x	1	2	3	4	5
	y	2	6	11	14	13

7.	x	1	2	3	4	5
	y	10	8	7	6	2

16.	x	1	2	3	4	5
	y	3	8	15	20	21

17.	x	1	2	3	4	5
	y	2	5	9	11	15

18.	x	1	2	3	4	5
	y	5	3	0	-2	-5

19.	x	1	2	3	4	5
	y	-5	-8	-11	-19	-18

20.	x	1	2	3	4	5
	y	9	5	6	4	1

21.	x	1	2	3	4	5
	y	4	8	11	15	19

22.	x	1	2	3	4	5
	y	-6	-8	-13	-17	-20

8.	x	1	2	3	4	5
	y	1	5	10	12	18

9.	x	1	2	3	4	5
	y	5	3	0	-4	-8

10.	x	1	2	3	4	5
	y	8	11	21	25	20

11.	x	1	2	3	4	5
	y	9	7	5	3	2

12.	x	1	2	3	4	5
	y	2	7	9	13	15

13.	x	1	2	3	4	5
	y	11	9	8	5	3

14.	x	1	2	3	4	5
	y	4	7	11	15	13

15.	x	1	2	3	4	5
	y	16	17	12	10	9

23.	x	1	2	3	4	5
	y	5	12	15	17	20

24.	x	1	2	3	4	5
	y	5	9	11	10	12

25.	x	1	2	3	4	5
	y	11	6	4	1	-2

26.	x	1	2	3	4	5
	y	13	9	8	5	3

27.	x	1	2	3	4	5
	y	8	10	11	15	16

28.	x	1	2	3	4	5
	y	7	11	13	16	21

29.	x	1	2	3	4	5
	y	4	7	8	9	13

30.	x	1	2	3	4	5
	y	-7	-5	-2	-2	-1

Задание № 7

ТЕМА: РЯДЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задача 7.1

Найти область сходимости степенного ряда:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n \sqrt[3]{n}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12^n x^n}{\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} x^n$

22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2 + 1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n+1}}$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (5x)^n}{n!}$

- | | | | | | |
|-----|---|-----|---|-----|--|
| 4. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$ | 14. | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n x^n}{(n+1)!}$ | 24. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{13^n \sqrt{n+1}}$ |
| 5. | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n x^n}{3^n (n+3)}$ | 15. | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n n!}{2^n}$ | 25. | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)^{2n}}$ |
| 6. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^2}$ | 16. | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{11^n x^n}{n+1}$ | 26. | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{(n+1)^4}}$ |
| 7. | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$ | 17. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{7^n \sqrt{n}}$ | 27. | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{3n+5}}$ |
| 8. | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n+1)!}$ | 18. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n-1)!}$ | 28. | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n x^n}{(n+1)!}$ |
| 9. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{2n-1}}$ | 19. | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}$ | 29. | $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3x)^n$ |
| 10. | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4^n n!}$ | 20. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n - \sqrt[3]{n}}$ | 30. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[5]{n^2+1}}$ |

Задача 7.2

Найти решение задачи Коши:

- | | | |
|----|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. | $(x^2 + 1)y' + 2xy^2 = 0$ | $y(0) = -1$ |
| 2. | $y' = 6x \cdot \sqrt[3]{y}$ | $y(1) = 0$ |
| 3. | $(x+1)y' + 4y = 0$ | $y(0) = 1$ |
| 4. | $x \cdot y' + \frac{x}{x+1} = 0$ | $y(2) = 1$ |
| 5. | $(x+5)dy - 2(y-1)^2 dx = 0$ | $y(0) = 2$ |
| 6. | $y dx - \cos^2 x dy = 0$ | $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ |
| 7. | $xy' = (x+1)e^{-y}$ | $y(1) = 0$ |
| 8. | $(y+1)dx - x dy = 0$ | $y(1) = 2$ |
| 9. | $\sin xy' = y \cos x$ | $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ |

10. $(1 - y^2) dx - \sqrt{x} dy = 0$ $y(1) = 0$
11. $(x - 3)y' = 2xy$ $y(4) = 1$
12. $y' = (4x - 3) \cdot \sqrt{y - 3}$ $y(4) = 1$
13. $(x^2 - 3)dy - 5xy^2 dx = 0$ $y(2) = 1$
14. $\frac{y'}{x} + \frac{1}{x^2 + 1} = 0$ $y(0) = 1$
15. $(x - 2)^2 dy + (y + 3)^2 dx = 0$ $y(3) = 1$
16. $y^2 dx - \sin^2 x dy = 0$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
17. $e^{2y} y' = 5^x + 6$ $y(0) = 0$
18. $\sqrt{y + 1} dx - \frac{dy}{x} = 0$ $y(2) = 3$
19. $yy' = \cos x$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
20. $(1 + y^2) dx - 2\sqrt[3]{x} dy = 0$ $y(1) = 0$
21. $(1 - x)y' + 5y^3 = 0$ $y(0) = 1$
22. $y' + 5(x - 2) \cdot \sqrt[3]{y - 1} = 0$ $y(2) = 1$
23. $xy' + 3(x^2 - 1)y^2 = 0$ $y(1) = 2$
24. $(x - 1)^2 dy + 3(y - 2)dx = 0$ $y(2) = 3$
25. $x^2 dy - 2e^{-4y} dx = 0$ $y(1) = 0$
26. $\sin x dx - y dy = 0$ $y(0) = 2$
27. $xy' = (x + 1)(y - 1)$ $y(1) = 2$
28. $(y - 6) dx - \frac{dy}{\sqrt{x}} = 0$ $y(1) = 7$
29. $5^x y' = 5^y$ $y(0) = 1$
30. $\sqrt{2 - y} dx - x^2 dy = 0$ $y(1) = 1$

Задача 7.3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 1. $y'' - 6y' + 9y = \cos 3x$ | 16. $y'' + y = x + 1$ |
| 2. $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 1$ | 17. $3y'' - 2y' - 8y = e^{2x}$ |
| 3. $y'' + 6y' + 13y = \sin x + \cos x$ | 18. $y'' - 2y' + y = 2x - 1$ |
| 4. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}$ | 19. $y'' - 2y' - 3y = \cos 2x$ |
| 5. $y'' - 9y = 3x - 1$ | 20. $y'' + 3y' - 4y = e^{2x}$ |
| 6. $2y'' + y' - y = 4e^{3x}$ | 21. $4y'' - 8y' + 5y = 8x^2 + 1$ |
| 7. $y'' - 4y' + 3y = 2x^2 + 6x - 1$ | 22. $4y'' + 4y' + y = \sin 7x$ |
| 8. $y'' - 7y' + 6y = 5e^{2x}$ | 23. $y'' + 3y' + 2y = 4e^x$ |
| 9. $y'' - 6y' + 9y = -7e^x$ | 24. $2y'' + y' - y = x^2 - 3x + 2.$ |
| 10. $y'' - 3y' + 2y = \cos 4x.$ | 25. $y'' + 2y' + 5y = 2x^2 + 5x - 3$ |
| 11. $y'' + 4y' - 5y = 7e^{2x}$ | 26. $y'' + y = \cos x$ |
| 12. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{3x}$ | 27. $2y'' + 5y' = 3x^2 - 2x$ |
| 13. $y'' + y' - 2y = \cos 3x$ | 28. $y'' - y = 2e^{3x}$ |
| 14. $y'' - 3y' = 6x - 1$ | 29. $y'' - 4y = 2x^2 + 1$ |
| 15. $y'' + 3y' - 4y = \cos 2x$ | 30. $y'' - 3y' = x^2 - 2x + 1$ |

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание №1

Задача 1.1

Построить прямые $l_1: y = 4x - 5$ и $l_2: y = 3x + 1$. Найти точку их пересечения и угол между прямыми.

РЕШЕНИЕ. Для построения прямой достаточно найти координаты двух точек, лежащих на этой прямой. Рассмотрим прямую $l_1: y = 4x - 5$. Если $x = 0$, то $y = 4 \cdot 0 - 5 = -5$. Если $x = 2$, то $y = 4 \cdot 2 - 5 = 3$. Получаем две точки $(0; -5)$, $(2; 3)$. Аналогично для прямой l_2 находим точки $(0; 1)$ и $(2; 7)$. Полученные точки наносим на координатную плоскость и попарно соединяем прямой линией (рис. 1).

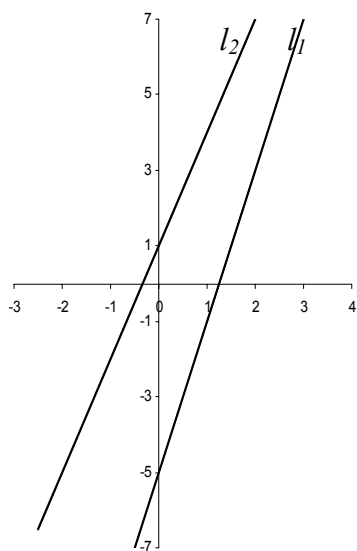


Рис.1

Для того чтобы найти точку пересечения двух прямых, решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 4x - 5, \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$

или $4x - 5 = 3x + 1$, отсюда $4x - 3x = 5 + 1$, $x = 6$. Подставив найденное значение x в уравнение любой прямой, например первой, получаем $y = 4 \cdot 6 - 5 = 19$. Следовательно, точка пересечения прямых имеет координаты $A(6; 19)$.

Угол между прямыми определяем с помощью формулы $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, где

$k_1 = 4$ и $k_2 = 3$ – угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2 соответственно. Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3 - 4}{1 + 3 \cdot 4} = -\frac{1}{13} \text{ или } \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{1}{13}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } A(6; 19), \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{1}{13}.$$

Задача 1.2

Построить область, заданную системой неравенств, найти координаты угловых точек, если

$$\begin{cases} x + 2y - 3 \geq 0, \\ 2x - 3y + 1 \leq 0, \\ x - 5y + 11 \geq 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ: Построим три прямые линии, уравнения которых имеют вид:

$$x + 2y - 3 = 0, \quad 2x - 3y + 1 = 0, \quad x - 5y + 11 = 0.$$

Для построения каждой прямой, найдем две точки ей принадлежащие:

$x + 2y - 3 = 0:$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">x</td> <td style="padding: 5px 10px;">y</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px; text-align: center;">1</td> <td style="padding: 5px 10px; text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px; text-align: center;">3</td> <td style="padding: 5px 10px; text-align: center;">0</td> </tr> </table>	x	y	1	1	3	0	$2x - 3y + 1 = 0:$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">x</td> <td style="padding: 5px 10px;">y</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px; text-align: center;">4</td> <td style="padding: 5px 10px; text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px; text-align: center;">1</td> <td style="padding: 5px 10px; text-align: center;">1</td> </tr> </table>	x	y	4	3	1	1	$x - 5y + 11 = 0:$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">x</td> <td style="padding: 5px 10px;">y</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px; text-align: center;">-1</td> <td style="padding: 5px 10px; text-align: center;">2</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px; text-align: center;">4</td> <td style="padding: 5px 10px; text-align: center;">3</td> </tr> </table>	x	y	-1	2	4	3
x	y																						
1	1																						
3	0																						
x	y																						
4	3																						
1	1																						
x	y																						
-1	2																						
4	3																						

Через полученные пары точек проводим прямые (рис. 2). Каждая прямая делит плоскость на две полуплоскости. Выбираем произвольную точку плоскости, не лежащую на прямых, например, точку с координатами $(0,0)$. Подставляем координаты этой точки в каждое из заданных неравенств и определяем задаваемые ими полуплоскости.

$$\begin{cases} 0 + 2 \cdot 0 - 3 \geq 0, \\ 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 1 \leq 0, \\ 0 - 5 \cdot 0 + 11 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \geq 0, \\ 1 \leq 0, \\ 11 \geq 0. \end{cases}$$

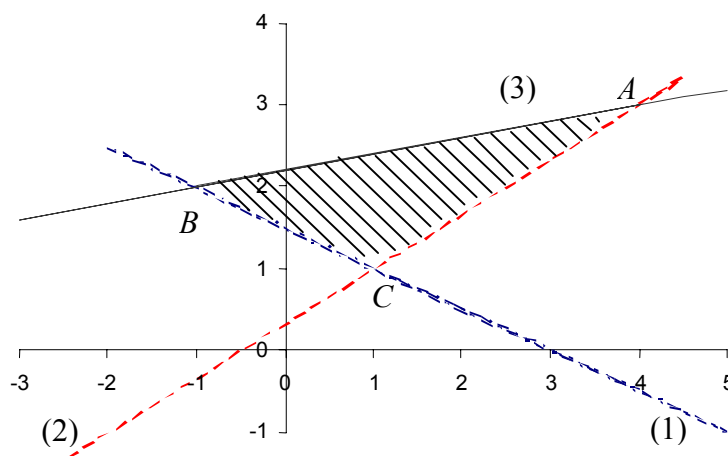


Рис. 2

Так как первое неравенство $-3 \geq 0$ неверно, то полуплоскость, задаваемая неравенством $x + 2y - 3 \geq 0$, не содержит точку $(0,0)$. Штрихуем полуплоскость, лежащую выше прямой $x + 2y - 3 = 0$. Второе неравенство $1 \leq 0$ неверно, следовательно, искомая полуплоскость не содержит точку $(0,0)$. Штрихуем полуплоскость, лежащую выше прямой $2x - 3y + 1 = 0$. Рассуждая аналогично, штрихуем полуплоскость, лежащую ниже прямой $x - 5y + 11 = 0$. Следовательно, исходная система неравенств задает треугольник с вершинами A, B, C .

Координаты угловых точек A, B, C находим как координаты точек пересечения соответствующих прямых (см. задачу 1).

ОТВЕТ: $(1,1), (-1,2), (4,3)$.

Задача 1.3

Дана точка $A(2;3)$ и угловой коэффициент $k = 2$ прямой l . Найти:

4) *уравнения прямых, проходящих через точку A (уравнение “пучка прямых”);*

5) *уравнение прямой принадлежащей “пучку прямых” и проходящей через точку $C(1;-1)$;*

6) *уравнение прямой принадлежащей “пучку прямых”, если ее угловой коэффициент равен k .*

РЕШЕНИЕ: 1) Уравнение “пучка прямых”, проходящих через точку $A(x_1; y_1)$ имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Подставим в это уравнение координаты точки $A(2,3)$: $y - 3 = k(x - 2)$ или $y = k(x - 2) + 3$.

2) Подставим в полученное уравнение “пучка прямых” координаты точки $C(1;-1)$: $-1 = k(1 - 2) + 3$, $k = 4$. Тогда искомое уравнение имеет вид: $y = 4x - 5$.

3) Так как $k = 2$, то из уравнения “пучку прямых” получаем $y = 2x - 1$.

ОТВЕТ: $y = k(x - 2) + 3$, $y = 4x - 5$, $y = 2x - 1$.

Задача 1.4

Даны две точки $A(1;2)$ и $B(3;-1)$. Найти:

4) уравнение прямой, проходящей через эти точки;

5) уравнение прямой l_1 , проходящей через точку $C(-2,-1)$ параллельно прямой AB .

6) уравнение прямой l_2 , проходящей через точку A перпендикулярно прямой AB .

РЕШЕНИЕ. 1) Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ определяем по формуле

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Тогда $\frac{y - 2}{-1 - 2} = \frac{x - 1}{3 - 1}$ или $\frac{y - 2}{-3} = \frac{x - 1}{2}$. Отсюда $2(y - 2) = -3(x - 1)$,

$$2y - 4 = -3x + 3. \text{ Уравнение прямой имеет вид } 3x + 2y - 7 = 0.$$

2) Так как прямые l_1 и AB параллельны, то из условия параллельности прямых, получаем $k_{l_1} = k_{AB}$. Из уравнения прямой AB находим ее угловой коэффициент. Имеем: $2y = -3x + 7$ или $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$. Тогда $k_{AB} = -\frac{3}{2}$, следовательно, $k_{l_1} = -\frac{3}{2}$. Так как прямая l_1 проходит через точку $C(-2, -1)$, то ее уравнение имеет вид: $y - y_C = k_{l_1}(x - x_C)$ или $y + 1 = -\frac{3}{2}(x + 2)$. Отсюда $y = -\frac{3}{2}x - 4$.

3) Для определения уравнения прямой l_2 используем условие перпендикулярности двух прямых, а именно, $k_{l_2} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$. Тогда, используя уравнение “пучку прямых”, находим $y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$ или $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$.

ОТВЕТ: $3x + 2y - 7 = 0$; $l_1: y = -\frac{3}{2}x - 4$; $l_2: y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$.

Задача 1.5

Среди прямых $l_1: 4x - 4y - 1 = 0$, $l_2: y = 5x - 3$, $l_3: x + 5y + 3 = 0$, $l_4: y = x + 5$ найти пары параллельных и перпендикулярных прямых (если такие есть).

РЕШЕНИЕ: Найдем угловые коэффициенты всех прямых. $l_1: y = x - \frac{1}{4}$,
 $l_2: y = 5x - 3$, $l_3: y = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$, $l_4: y = x + 5$, т.е. $k_{l_1} = 1$, $k_{l_2} = 5$, $k_{l_3} = -\frac{1}{5}$, $k_{l_4} = 1$.
Так как $k_{l_1} = k_{l_4}$ и $k_{l_3} = -\frac{1}{k_{l_2}}$, то из условий параллельности и перпендикулярности прямых, получаем, что прямые l_1 и l_4 – параллельны, а прямые l_3 и l_2 – перпендикулярны.
ОТВЕТ: l_1 и l_4 – параллельные прямые, l_3 и l_2 – перпендикулярные прямые.

Задание №2

Задача 2.1

Даны две матрицы A и B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определить какие из нижеприведенных операций выполнимы и выполнить их:

- 1) $A + B$; $A' + B$; $A + B'$; $A' + B'$;
- 2) $A \cdot B$; $A' \cdot B$; $A \cdot B'$; $A' \cdot B'$.

РЕШЕНИЕ: Найдем матрицы A' и B' :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица A имеет три столбца и две строки, то ее размерность равна (3×2) . Размерности остальных матриц - $B: (2 \times 3)$, $A': (2 \times 3)$, $B': (3 \times 2)$.

1) Операция сложения определена только для матриц одной размерности. Следовательно, определены операции $A' + B$ и $A + B'$. Тогда

$$A' + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+3 & 0-5 \\ 2+1 & -4+0 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix},$$

$$A + B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 \\ 3+3 & -4+0 \\ 0-5 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

2) Операция умножения матриц определена, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы, т.е. в нашем случае определены произведения матриц $A \cdot B$ и $A' \cdot B'$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 & 3 \cdot 3 + (-4) \cdot 0 & 3 \cdot (-5) + (-4) \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 5 \cdot 0 & 0 \cdot (-5) + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 9 & -23 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$A' \cdot B' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot (-5) & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 + 5 \cdot (-5) & 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -33 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } A' + B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}, A + B' = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 9 & -23 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

$$A' \cdot B' = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -33 & 12 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.2

Даны две матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ и число $k = 2$. Найти матрицу $C = A^2 + A^{-1}B + kB$ и вычислить ее определитель.

РЕШЕНИЕ: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 & 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 15 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Так как определитель матрицы A : $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1$ не равен нулю, то обратная матрица A^{-1} существует. Вычислим ее:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Найдем произведение

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 3-12 \\ -1-8 & -3+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -9 & 13 \end{pmatrix}.$$

Так как $kB = 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$, то окончательно получаем

$$\begin{aligned} C = A^2 + A^{-1}B + kB &= \begin{pmatrix} 19 & 15 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -9 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19+7+2 & 15-9+6 \\ 5-9-4 & 4+13+8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 28 & 12 \\ -8 & 25 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Определитель полученной матрицы равен

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 28 & 12 \\ -8 & 25 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -8 & 25 \end{vmatrix} = 4(7 \cdot 25 - (-8) \cdot 3) = 796.$$

ОТВЕТ: $C = \begin{pmatrix} 28 & 12 \\ -8 & 25 \end{pmatrix}$, $\det(C) = 796$.

Задача 2.3

Исследовать на линейную независимость систему векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$, если $\bar{a}_1 = (1; 2; 1; 1)$, $\bar{a}_2 = (-1; 2; 3; -1)$, $\bar{a}_3 = (2; 3; -1; -1)$, $\bar{a}_4 = (-2; 1; 4; -1)$.

РЕШЕНИЕ: Для проверки линейной независимости векторов, вычислим определитель, составленный из координат векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Выполним следующие элементарные преобразования, не меняющие значения определителя:

1) ко второй строке прибавим первую строку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix};$$

2) к третьей строке прибавим первую строку, предварительно умножив ее на -2

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix};$$

3) первую строку умножим на 2 и прибавим ее к четвертой строке

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по элементам первого столбца

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Так как все элементы первой строки делятся на 4, то 4 вынесем за знак определителя, аналогично из второй строки выносим -1 .

$$\Delta = -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -4(1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 3 \cdot 6 - 1 \cdot 1 \cdot 1) = 4.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ линейно независимы.

ОТВЕТ: векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ линейно независимы.

Задача 2.4

Решить систему уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ: Вычислим определитель матрицы системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot (-3) = \\ = -25 \neq 0.$$

Так как главный определитель Δ системы не равен нулю, то систему можно решить методом обратной матрицы. Найдем обратную матрицу:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 9) = -10,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 4) = -5,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 3) = 5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 - 2) = 5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{25} \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ -10 & -5 & 5 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы определяем по формуле $X = A^{-1}B$, т.е.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 - 1 + 2 \\ 8 - 1 - 2 \\ 4 + 1 + 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

ОТВЕТ: (1;1;1).

Задача 2.5

Решить систему уравнений, используя формулы Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ: Вычислим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -9 \neq 0.$$

Так как определитель не равен нулю, то решение системы можно определить с помощью следующих формул (формул Крамера)

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель матрицы коэффициентов системы и определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – получены из определителя Δ заменой i – го столбца ($i = 1, 2, 3$) столбцом свободных членов. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -36.$$

По формулам Крамера определяем решение системы уравнений

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{9}{-9} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-18}{-9} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-36}{-9} = 4.$$

Проверка: Найденные значения переменных $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 4$ подставляем в исходную систему уравнений

$$\begin{cases} -1 - 2 + 2 \cdot 4 = 5, \\ 2 \cdot (-1) + 2 + 4 = 4, \\ 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 1. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 4$.

Задача 2.6

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 14. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ: Рассмотрим расширенную матрицу системы уравнений

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \boxed{2} & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -5 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

и с помощью элементарных преобразований приведем ее к треугольной форме.

1) Для упрощения расчетов на главной диагонали в первой строке получим единицу, для этого поменяем местами первую и вторую строки матрицы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -5 & 1 & 14 \end{array} \right);$$

2) умножим первую строку на -2 и прибавим ее ко второй строке

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -5 & 1 & 14 \end{array} \right);$$

3) умножим первую строку на -3 и прибавим ее к третьей строке

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & 2 & 9 \\ 4 & -2 & -5 & 1 & 14 \end{array} \right);$$

4) умножим первую строку на -4 и прибавим ее к четвертой строке

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & 2 & 9 \\ 0 & -10 & -17 & 5 & 22 \end{array} \right);$$

5) поменяем местами второй и четвертый столбцы

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -8 & -5 & 9 \\ 0 & 5 & -17 & -10 & 22 \end{array} \right);$$

6) умножим вторую строку на -2 и прибавим к третьей строке

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & -17 & -10 & 22 \end{array} \right) ; \end{array}$$

7) умножим вторую строку на -5 и прибавим к третьей строке

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 15 & 7 \end{array} \right) ; \end{array}$$

8) умножим третью строку на -4 и прибавим к четвертой строке

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \end{array} \right) . \end{array}$$

Полученной матрице ставим в соответствие систему линейных уравнений, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 - x_4 + 3x_3 + 2x_2 = -2, \\ x_4 - 5x_3 - 5x_2 = 3, \\ 2x_3 + 5x_2 = 3, \\ -5x_2 = -5. \end{cases}$$

Начиная с последнего уравнения, последовательно находим неизвестные переменные:

$$-5x_2 = -5 \Rightarrow x_2 = 1,$$

$$2x_3 + 5x_2 = 3, \quad 2x_3 + 5 \cdot 1 = 3, \Rightarrow x_3 = -1,$$

$$x_4 - 5x_3 - 5x_2 = 3, \quad x_4 - 5 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 = 3, \Rightarrow x_4 = 3,$$

$$x_1 - x_4 + 3x_3 + 2x_2 = -2, \quad x_1 - 3 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = -2, \Rightarrow x_1 = 2.$$

Таким образом, получаем решение исходной системы уравнений:
 $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 3.$

ОТВЕТ: (2;1;-1;3).

Задача 2.7

Найти все базисные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -3. \end{cases}$$

Найти частное решение при $x_1 = 1$.

РЕШЕНИЕ: Выпишем расширенную матрицу коэффициентов системы и преобразуем ее

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & -8 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 3 & 2 & -8 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Так как последняя строка матрицы равна нулю, то любой определитель третьего порядка равен нулю. Кроме того, существует определитель второго порядка

(например, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5$) не равный нулю. Следовательно, в рассматриваемой

системе уравнений число уравнений $m = 2$, число переменных $n = 3$. Тогда

число базисных решений не больше $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$.

Найдем эти решения. После проведенных преобразований над расширенной матрицей, система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ 5x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

1) Пусть x_3 – свободная переменная, тогда из последнего уравнения следует, что

$$5x_2 - 2x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{3 + 2x_3}{5}.$$

Из первого уравнения:

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \quad x_1 - \frac{3+2x_3}{5} - 2x_3 = -2 \Rightarrow x_1 = \frac{-7+12x_3}{5}.$$

Таким образом, решение системы уравнений имеет вид:

$$x_1 = \frac{-7+12x_3}{5}, \quad x_2 = \frac{3+2x_3}{5}, \quad x_3 \in R.$$

2) Пусть теперь x_2 – свободная переменная, тогда из последнего уравнения получаем

$$5x_2 - 2x_3 = 3 \Rightarrow x_3 = \frac{5x_2 - 3}{2}.$$

Из первого уравнения:

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \quad x_1 - x_2 - \frac{2(5x_2 - 3)}{2} = -2 \Rightarrow x_1 = 6x_2 - 5.$$

Таким образом, решение системы уравнений имеет вид:

$$x_1 = 6x_2 - 5, \quad x_2 \in R, \quad x_3 = \frac{5x_2 - 3}{2}.$$

3) Выбираем в качестве свободной переменной переменную x_1 . Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 5 & 0 & -12 & -7 \end{array} \right).$$

Из второго уравнения следует

$$5x_1 - 12x_3 = -7 \Rightarrow x_3 = \frac{5x_1 + 7}{12}.$$

Из первого уравнения:

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \quad x_1 - x_2 - \frac{2(5x_1 + 7)}{12} = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{x_1 + 5}{6}.$$

Таким образом, решение системы уравнений имеет вид:

$$x_2 \in R, \quad x_2 = \frac{x_1 + 5}{6}, \quad x_3 = \frac{5x_1 + 7}{12}.$$

Отсюда при $x_1 = 1$ получаем частное решение $(1; 1; 1)$.

ОТВЕТ: $(1; 1; 1)$.

Задание №3

Задача 3.1

Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + x - 2}$.

РЕШЕНИЕ: Непосредственной подстановкой значения переменной $x = 1$ получаем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + x - 2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{5 \cdot 1 + 1 - 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

ОТВЕТ: $\frac{1}{2}$.

Задача 3.2

Найти пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 2x + 3}; \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 2x + 3}; \quad в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x^3 + 2x + 3}.$$

В приведенных примерах при $x \rightarrow \infty$ функция $f(x)$ представляет собой отношение двух бесконечно больших функций $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$. Для вычисления предела числитель и знаменатель дроби можно разделить на старшую степень переменной x и воспользоваться тем, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

РЕШЕНИЕ:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 3x}{x^2}}{\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1,$$

$$(\text{т.к. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} = 0).$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + 3x}{x^3}}{\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}} = \left(\frac{1}{0} \right) = \infty.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x^3 + 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 3x}{x^3}}{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}} = \left(\frac{0}{1} \right) = 0.$$

Задача 3.3

Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{2x^2 - 7x + 6}$.

РЕШЕНИЕ: Подставив значение переменной $x = 2$ в функцию, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{2x^2 - 7x + 6} = \left\{ \frac{2 - \sqrt{2+2}}{2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 6} \right\} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}.$$

Получили неопределенность вида $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Раскладываем числитель и зна-

менатель дроби на простые множители. Для разложения квадратного трехчлена

$2x^2 - 7x + 6$ на множители воспользуемся равенством

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни соответствующего квадратного

уравнения, найденные по формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (см. приложение). Тогда

$$\text{получаем } x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2}, \quad x_1 = \frac{7+1}{4} = 2, \quad x_2 = \frac{7-1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{и}$$

$$2x^2 - 7x + 6 = 2 \left(x - \frac{3}{2} \right) (x - 2) = (2x - 3)(x - 2).$$

Для того чтобы избавиться от иррациональности в числителе исходной дроби помножим числитель и знаменатель на множитель, сопряженный выражению $2 - \sqrt{x+2}$ и воспользуемся формулой $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{2x^2 - 7x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - \sqrt{x+2})(2 + \sqrt{x+2})}{(2x-3)(x-2)(2 + \sqrt{x+2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^2 - (\sqrt{x+2})^2}{(2x-3)(x-2)(2 + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - (x+2)}{(2x-3)(x-2)(2 + \sqrt{x+2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\cancel{(x-2)}}{(2x-3)\cancel{(x-2)}(2 + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(2x-3)(2 + \sqrt{x+2})} = \\ &= \frac{-1}{(2 \cdot 2 - 3)(2 + \sqrt{2+2})} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $-\frac{1}{4}$.

Задача 3.4

Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{2+3x}$.

РЕШЕНИЕ: Проведем несложные алгебраические преобразования:

$$\left(\frac{x-2}{x} \right)^{2+3x} = \left(1 + \frac{x-2}{x} - 1 \right)^{2+3x} = \left(1 + \frac{x-2-x}{x} \right)^{2+3x} = \left(1 + \frac{-2}{x} \right)^{2+3x} = \left(1 + \frac{-2}{x} \right)^{\left(\frac{x}{-2} \right) \left(\frac{-2}{x} \right) (2+3x)}.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{2+3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{x} \right)^{\left(\frac{x}{-2} \right) \left(\frac{-2}{x} \right) (2+3x)}$. Используем вто-

рой замечательный предел (см. приложение). Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{x} \right)^{\left(\frac{x}{-2} \right)} = e$ и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{2+3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-2(2+3x)}{x}}. \quad \text{Так как} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(2+3x)}{x} = -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} + 3 \right) = -6, \quad \text{то}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{2+3x} = e^{-6}.$$

ОТВЕТ: e^{-6} .

Задача 3.5

С помощью принципа замены эквивалентных величин, вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3 \cos 4x}{\operatorname{tg} 2x}.$$

Напомним, что функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$. Кроме того, если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно

малыми при $x \rightarrow a$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* (обозначают $\alpha(x) \sim \beta(x)$).

РЕШЕНИЕ: Используя таблицу эквивалентных бесконечно малых функций (см. приложение), получаем $1 - \cos 4x \sim \frac{(4x)^2}{2} = 8x^2$ и $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3 \cos 4x}{\operatorname{tg} 2x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\operatorname{tg} 2x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{2x} = 12 \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

ОТВЕТ: 0.

Задача 3.6

Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-25}$. Исследовать характер точек разрыва.

РЕШЕНИЕ: Найдем область допустимых значений (О.Д.З.) исследуемой функции: $\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x^2-25 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x_1 \neq -5, x_2 \neq 5 \end{cases} \Rightarrow x \in [3; 5) \cup (5; +\infty)$. Функция $y(x)$ тер-

пит разрывы только в точках, в которых знаменатель обращается в ноль. С учетом О.Д.З. точкой разрыва функции является точка $x = 5$. Вычислим односторонние пределы функции в точке $x = 5$:

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-25} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-25} = +\infty.$$

Так как односторонние пределы бесконечны, то $x = 5$ – точка разрыва второго рода.

ОТВЕТ: Функция непрерывна для $x \in [3; 5) \cup (5; +\infty)$, $x = 5$ – точка разрыва второго рода.

Задание № 4

Задача 4.1

Найти первую производную функции:

$$1) y = (5^{4x} + 2)\sqrt[3]{x+5}; \quad 2) y = \frac{x^4 - \operatorname{tg} x}{e^{3x}}; \quad 3) y = \arctg \sqrt{\ln x^2 - 5}.$$

РЕШЕНИЕ: Для вычисления производной используем основные правила дифференцирования и таблицу производных основных элементарных функций (см. приложение).

$$\begin{aligned} 1) y' &= \left((5^{4x} + 2)\sqrt[3]{x+5} \right)' = (5^{4x} + 2)' \sqrt[3]{x+5} + (5^{4x} + 2) \left(\sqrt[3]{x+5} \right)' = \\ &= \left((5^{4x})' + (2)' \right) \sqrt[3]{x+5} + (5^{4x} + 2) \left((x+5)^{\frac{1}{3}} \right)' = (4x)' \cdot 5^{4x} \ln 5 \cdot \sqrt[3]{x+5} + \\ &+ (5^{4x} + 2) \left(\frac{1}{3} (x+5)^{\frac{1}{3}-1} \right) = 4\sqrt[3]{x+5} \cdot (5^{4x} \ln 5) + (5^{4x} + 2) \left(\frac{1}{3} (x+5)^{-\frac{2}{3}} \right) = \\ &= 4\sqrt[3]{x+5} \cdot (5^{4x} \ln 5) + \frac{5^{4x} + 2}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad y' &= \frac{(x^4 - \operatorname{tg} x)' \cdot e^{3x} - (x^4 - \operatorname{tg} x)(e^{3x})'}{(e^{3x})^2} = \frac{((x^4)' - (\operatorname{tg} x)') \cdot e^{3x} - 3(x^4 - \operatorname{tg} x)e^{3x}}{e^{6x}} = \\
 &= \frac{\left(4x^3 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot e^{3x} - 3(x^4 - \operatorname{tg} x)e^{3x}}{e^{6x}} = \frac{(4x^3 \cos^2 x - 1) - 3(x^4 - \operatorname{tg} x) \cos^2 x}{e^{3x} \cos^2 x}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad y' &= \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\ln x^2 - 5} \right)' = (\ln x^2 - 5)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x^2 - 5}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\ln x^2 - 5} \right)^2} = \\
 &= \frac{(x^2)'}{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x^2 - 5}} \cdot \frac{1}{\ln x^2 - 4} = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x^2 - 5}} \cdot \frac{1}{\ln x^2 - 4} = \\
 &= \frac{1}{x\sqrt{\ln x^2 - 5}(\ln x^2 - 4)}.
 \end{aligned}$$

Задача 4.2

Найти производную второго порядка функции $y = x \sin 5x + e^{2x} - 4$.

РЕШЕНИЕ: Вычислим первую производную

$$y' = x' \sin 5x + x(\sin 5x)' + (e^{2x})' - (4)' = \sin 5x + 5x \cos 5x + 2e^{2x}.$$

Вторая производная (производная от первой производной) равна

$$\begin{aligned}
 y'' &= (\sin 5x + 5x \cos 5x + 2e^{2x})' = 5 \cos 5x + 5 \cos 5x - 25 \sin 5x + 4e^{2x} = \\
 &= 10 \cos 5x - 25 \sin 5x + 4e^{2x}.
 \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $y'' = 10 \cos 5x - 25 \sin 5x + 4e^{2x}$.

Задача 4.3

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{5x - x^2}$, используя правило Лопиталя.

РЕШЕНИЕ: Согласно правилу Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{5x - x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{4x} - 1)'}{(5x - x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{4x}}{5 - 2x} = \frac{4}{5}.$$

ОТВЕТ: $\frac{4}{5}$.

Задача 4.4

Найти интервалы монотонности функции $y = \frac{x^2 + 81}{x}$ и ее экстремумы.

РЕШЕНИЕ: Данная функция определена для всех $x \neq 0$. Найдем ее производную

$$y' = \frac{(x^2 + 81)'x - (x^2 + 81) \cdot x'}{x^2} = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 81) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 81}{x^2} = \frac{x^2 - 81}{x^2}$$

Производная обращается в ноль, если $x^2 - 81 = 0$ или $x = \pm 9$ и неопределенна в

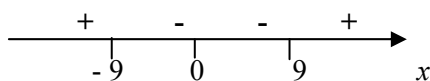


Рис. 3

точке $x = 0$. Найденные точки наносим на числовую ось и определяем знак производной на каждом из полученных интервалов (рис. 3). Так

как $y'(x) > 0$ в интервалах $(-\infty; -9) \cup (9; +\infty)$, то в этих интервалах функция возрастает. В интервалах $(-9; 0) \cup (0; 9)$ производная функции меньше нуля ($y'(x) < 0$), следовательно, функция убывает. Тогда точка $x = -9$ – точка максимума и $x = 9$ – точка минимума.

ОТВЕТ: Функция возрастает в интервалах $(-\infty; -9) \cup (9; +\infty)$, убывает в интервалах $(-9; 0) \cup (0; 9)$, $x = -9$ – точка максимума и $x = 9$ – точка минимума.

Задача 4.5

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 7 + x + \frac{1}{4x}$ на от-

резке $x \in [0, 1; 1]$.

РЕШЕНИЕ: Наибольшее (наименьшее) значение непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ достигается или в критических точках, или на концах отрезка. Функция $y = 7 + x + \frac{1}{4x}$ непрерывна для всех $x \neq 0$. Найдем ее производную:

$$y' = x' + \frac{1}{4}(x^{-1})' = 1 - \frac{1}{4}x^{-2} = 1 - \frac{1}{4x^2} = \frac{4x^2 - 1}{4x^2}.$$

Она равна нулю, если $4x^2 - 1 = 0$ или $4x^2 = 1$, т.е. $x = \pm \frac{1}{2}$. Внутри интервала $[0, 1]$ лежит только точка $x = \frac{1}{2}$. Вычислим значение функции в точке $x = \frac{1}{2}$ и на концах отрезка:

$$y(0,1) = 7 + 0,1 + \frac{1}{4 \cdot 0,1} = 9,6, \quad y(1) = 7 + 1 + \frac{1}{4 \cdot 1} = 8,25, \quad y(0,5) = 7 + 0,5 + \frac{1}{4 \cdot 0,5} = 8.$$

Следовательно, наименьшее значение функции равно $y(0,5) = 8$, наибольшее — $y(0,1) = 9,6$.

ОТВЕТ: $y_{\text{наим.}}(0,5) = 8$, $y_{\text{наиб.}}(0,1) = 9,6$.

Задание № 5

Задача 5.1

Используя метод непосредственного интегрирования, вычислить интеграл $\int (3x^2 + \operatorname{tg}(4x + 1) - 2^x) dx$.

РЕШЕНИЕ: Непосредственное интегрирование — это вычисление интеграла непосредственно с помощью таблицы интегралов (см. приложение) и свойств неопределенного интеграла.

$$\int (3x^2 + \operatorname{tg}(4x + 1) - 2^x) dx = 3 \int x^2 dx + \int \operatorname{tg}(4x + 1) dx - \int 2^x dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos^2(4x+1)} - \frac{2^x}{\ln 2} + C = 3x^3 + \frac{1}{4\cos^2(4x+1)} - \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

ОТВЕТ: $3x^3 + \frac{1}{4\cos^2(4x+1)} - \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

Задача 5.2

Используя метод подстановки (замены переменной интегрирования), вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{2+\ln x}}{x} dx$.

РЕШЕНИЕ: Так как $(2 + \ln x)' = \frac{1}{x}$, то используем метод замены переменной

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{2+\ln x}}{x} dx &= \left\{ 2 + \ln x = t, \quad \frac{dx}{x} = dt \right\} = \int \sqrt[3]{t} dt = \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \\ &= \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} (2 + \ln x)^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $\frac{3}{4} (2 + \ln x)^{\frac{4}{3}} + C.$

Задача 5.3

Используя метод интегрирования по частям, вычислить интеграл $\int x^2 \arctg x dx$.

РЕШЕНИЕ: Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

$$\int x^2 \arctg x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \arctg x, & dv = x^2 dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3} \cdot \arctg x - \int \frac{x^3 dx}{3(1+x^2)}.$$

Вычислим полученный интеграл:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 dx}{3(1+x^2)} &= \frac{1}{3} \int \frac{(x^3 + x) - x}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{x(x^2+1)}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{3} \left(\int x dx - I_1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} - I_1 \right),\end{aligned}$$

где

$$I_1 = \int \frac{x dx}{1+x^2} = \left\{ \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Тогда

$$\int \frac{x^3 dx}{3(1+x^2)} = \frac{1}{6} (x^2 - \ln(1+x^2)) + C.$$

ОТВЕТ: $\frac{1}{6} (x^2 - \ln(1+x^2)) + C.$

Задача 5.4

Вычислить определенный интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}.$

РЕШЕНИЕ: Для вычисления определенного интеграла используют формулу Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$.

Тогда

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \Big|_0^4 = \sqrt{1+2x} \Big|_0^4 = \sqrt{1+2 \cdot 4} - \sqrt{1+2 \cdot 0} = 2.$$

ОТВЕТ: 2.

Задача 5.5

Вычислить несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$ или установить его расходимость.

РЕШЕНИЕ: По определению

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{(x+1)^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x+1} \Big|_2^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b+1} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3},$$

т.к.

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b+1} \right) = 0.$$

ОТВЕТ: $\frac{1}{3}$.

Задание № 6

Задача 6.1

Найти частные производные первого порядка функции

$$u = z \operatorname{arctg}(x + y^2) - xy.$$

РЕШЕНИЕ: 1) Для того, чтобы найти частную производную u'_x функции $u(x, y, z)$ необходимо продифференцировать ее как функцию одной переменной x , предполагая переменные y и z постоянными. Тогда

$$u'_x = z(\operatorname{arctg}(x + y^2))'_x - (x)'_x y = \frac{z}{1 + (x + y^2)^2} - y.$$

2) Предполагая, что x, z – постоянные, получаем

$$u'_y = z(\operatorname{arctg}(x + y^2))'_y - x(y)'_y = \frac{2yz}{1 + (x + y^2)^2} - x.$$

7) Рассуждая, как и выше, находим

$$u'_z = (z)'_z \arctg(x + y^2) = \arctg(x + y^2).$$

$$\text{ОТВЕТ: } u'_x = \frac{z}{1 + (x + y^2)^2} - y, \quad u'_y = \frac{2yz}{1 + (x + y^2)^2} - x, \quad u'_z = \arctg(x + y^2).$$

Задача 6.2

Дана функция двух переменных $z(x, y) = \frac{x}{y} + y \cos \pi x$. Найти

a) градиент функции в точке $A(2; 1)$;

b) производную этой функции в точке A в направлении вектора $\overline{AB}$, где $B(6; 4)$.

РЕШЕНИЕ: а) Градиент функции $z = f(x, y)$ – это вектор с координатами $\text{grad} z = (z'_x, z'_y)$. Находим частные производные функции $z = f(x, y)$:

$$z'_x = \frac{(x)'_x}{y} + y(\cos \pi x)'_x = \frac{1}{y} - y\pi \sin \pi x,$$

$$z'_y = x(y^{-1})'_y + (y)'_y \cos \pi x = -\frac{x}{y^2} + \cos \pi x.$$

Подставим в частные производные координаты точки A :

$$z'_x(2; 1) = 1 - 1 \cdot \pi \sin 2\pi = 1, \quad z'_y(2; 1) = -2 + \cos 2\pi = -2 + 1 = -1.$$

Следовательно, $\text{grad} z = (1, -1)$.

b) Координаты вектора $\overline{AB}$ равны $\overline{AB} = (6 - 2; 4 - 1) = (4; 3)$. Его длина $|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \neq 1$. Соответствующий единичный вектор имеет координаты

$\bar{l} = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) = (0,8; 0,6)$, т.е. направляющие косинусы вектора $\bar{l}$ равны

$\cos \alpha = 0,8$; $\cos \beta = 0,6$. Тогда производная функции $z = f(x, y)$ в направление вектора $\overline{AB}$ имеет вид

$$z'_l = z'_x \cos \alpha + z'_y \cos \beta = 1 \cdot 0,8 - 1 \cdot 0,6 = 0,2.$$

ОТВЕТ: $\text{grad} z = (1, -1)$, $z'_l = 0,2$.

Задача 6.3

Найти экстремум функции двух переменных

$$z = 2x^2 - xy + 3y^2 + 5x - 7y + 10.$$

РЕШЕНИЕ: Частные производные первого порядка имеют вид:

$$z'_x = 4x - y + 5, \quad z'_y = -x + 6y - 7.$$

Стационарные точки находим из системы

$$\begin{cases} 4x - y + 5 = 0; \\ -x + 6y - 7 = 0, \end{cases}$$

решение которой

$$\begin{cases} 4x - y + 5 = 0; \\ -x + 6y - 7 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x + 5; \\ -x + 6(4x + 5) - 7 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x + 5; \\ 23x + 23 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1; \\ x = -1. \end{cases}$$

Следовательно, исследуемая функция имеет одну стационарную точку $M(-1;1)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$A = z''_{xx} = 4, \quad B = z''_{xy} = -1, \quad C = z''_{yy} = 6.$$

Тогда

$$\Delta = AC - B^2 = 24 - 1 = 23 > 0.$$

Так как $\Delta > 0$, то стационарная точка $M(-1;1)$ – точка экстремума. Из условия

$A = z''_{xx} = 4 > 0$, следует, что точка $M(-1;1)$ – точка минимума. Минимальное

значение функции равно

$$z_{\min} = z(-1;1) = 2 \cdot (-1)^2 - (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot (-1) - 7 \cdot 1 + 10 = 4.$$

ОТВЕТ: $z_{\min} = z(-1;1) = 4$.

Задача 6.4

Используя метод наименьших квадратов (МНК), найти функцию $y = ax + b$, которая наилучшим образом описывает зависимость между переменными x и y .

x	2	4	5	6	8
y	4	6	8	10	12

РЕШЕНИЕ: Значение параметров a и b определяем из системы

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases}$$

Расчеты представлены в таблице

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1.	2	4	4	8
2.	4	6	16	24
3.	5	8	25	40
4.	6	10	36	60
5.	8	12	81	96
Сумма	25	40	145	228

Тогда система уравнение имеет вид:

$$\begin{cases} 25a + 5b = 40 \\ 145a + 25b = 228 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 8 - 5a \\ 145a + 25(8 - 5a) = 228 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 8 - 5a \\ 20a = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1,4. \end{cases}$$

Следовательно, искомая функция – $y = 1,4x + 1$.

ОТВЕТ: $y = 1,4x + 1$.

Задание № 7

Задача 7.1

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{9^n \sqrt{2n}}$.

РЕШЕНИЕ: Так как

$$a_n = \frac{(-1)^n}{9^n \sqrt{2n}}, \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{9^{n+1} \sqrt{2(n+1)}}, \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{9^n \sqrt{2n}} \cdot \frac{9^{n+1} \sqrt{2n+2}}{(-1)^{n+1}} = -\frac{9\sqrt{2n+2}}{\sqrt{2n}},$$

то радиус сходимости исследуемого ряда равен

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{9\sqrt{2n+2}}{\sqrt{2n}} \right| = 9 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n+2}{2n}} = 9 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{2n}} = 9.$$

Тогда исследуемый степенной ряд сходится для всех $x \in (-R; R)$, т.е. для всех $x \in (-9; 9)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

1) Пусть $x = -9$. Тогда ряд принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-9)^n}{9^n \sqrt{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n 9^n}{9^n \sqrt{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} 9^n}{9^n \sqrt{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Получили знакоположительный числовой ряд. Известно, что числовой ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}^{1/2}}$

расходится.

2) Пусть $x = 9$. Тогда ряд принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 9^n}{9^n \sqrt{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}.$$

Получили знакочередующийся числовой ряд, для которого $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Для ис-

следования полученного ряда используем признак Лейбница

$$a) \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2} > \frac{1}{\sqrt{6}} > \dots;$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} = 0.$$

Следовательно, ряд сходится условно.

Таким образом, область сходимости исходного степенного ряда – $(-9; 9]$.

ОТВЕТ: $(-9; 9]$.

Задача 7.2

Найти решение задачи Коши

$$y' \cos^2 x + 2\sqrt{y} = 0, \quad y(0) = 4.$$

РЕШЕНИЕ: Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то уравнение принимает вид:

$$\frac{\cos^2 x dy}{dx} + 2\sqrt{y} = 0 \quad \text{или} \quad \cos^2 x dy + 2\sqrt{y} dx = 0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{y} \cos^2 x$:

$$\frac{\cos^2 x dy}{\sqrt{y} \cos^2 x} + \frac{2\sqrt{y} dx}{\sqrt{y} \cos^2 x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} + \frac{2dx}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{2dx}{\cos^2 x}.$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -2 \int \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad 2\sqrt{y} = -2\operatorname{tg} x + C,$$

где C – произвольная переменная.

Используем заданные начальные значения $y(0) = 4$:

$$2\sqrt{4} = -2\operatorname{tg} 0 + C \Rightarrow C = 4.$$

Тогда решение задачи Коши имеет вид:

$$y = (-\operatorname{tg} x + 2)^2.$$

ОТВЕТ: $y = (-\operatorname{tg} x + 2)^2.$

Задача 7.3

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 2e^{5x}.$

РЕШЕНИЕ: Заданное дифференциальное уравнение является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Его общее решение равно сумме

$$y_{o.n} = y_{o.o.} + y_{ч.н.},$$

где $y_{o.n}$ – общее решение неоднородного уравнения;

$y_{o.o.}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения;

$y_{ч.н.}$ – частное решение неоднородного уравнения.

1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0.$ Для этого составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$ Его корни $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.$ Тогда

$$y_{o.o.} = C_1 e^{3x} + C_2 e^x.$$

2) Частное решение неоднородного уравнения определяем с помощью метода неопределенных коэффициентов: $y_{ч.н.} = Ae^{5x},$ где A – неопределенный коэффициент. Вычислим производные:

$$y = Ae^{5x}, \quad y' = 5Ae^{5x}, \quad y'' = 25Ae^{5x}.$$

Полученные значение подставляем в исходное уравнение:

$$25Ae^{5x} - 4 \cdot 5Ae^{5x} + 3 \cdot Ae^{5x} = 2e^{5x}, \quad 8Ae^{5x} = 2e^{5x}, \quad A = 0,25.$$

Отсюда $y_{ч.н.} = 0,25e^{5x}.$ Таким образом, $y_{o.n} = C_1 e^{3x} + C_2 e^x + 0,25e^{5x}.$

ОТВЕТ: $y_{o.n} = C_1 e^{3x} + C_2 e^x + 0,25e^{5x}.$

Формулы сокращенного умножения. Для любых чисел $a, b \in R$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\(a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \\a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2), \\a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2).\end{aligned}$$

Комплексные числа. Число вида

$$z = a + ib, \quad a, b \in R,$$

где $i^2 = -1$ и a, b — действительные числа, называется комплексным числом. Число i называется *мнимой* единицей, причем $i = \sqrt{-1}$.

Квадратное уравнение. Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

называется квадратным уравнением. Величина $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного уравнения.

1) *Корни квадратного уравнения.* Если $D \geq 0$, то уравнение имеет два действительных корня (при $D = 0$ корни совпадают):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D \leq 0$, то уравнение имеет два комплексных корня (действительных корней нет), вычисляемые по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{D}}{2a}.$$

2) Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения, то справедлива *формула разложения квадратного трехчлена на множители*:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

¹ Содержит материал справочного характера

Свойства степени. Пусть $a > 0, b > 0, m, n \in R$. Тогда:

- 1) $a^0 = 1$ (по определению);
- 2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- 3) $a^m : a^n = a^{m-n}$;
- 4) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
- 5) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$;
- 6) $a^m : b^m = (a : b)^m$;
- 7) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;
- 8) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;
- 9) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов

Функция	Углы (α)							
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Таблица производных некоторых функций

1.	$y = C$	$y' = 0$		
2.	$y = x$	$y' = 1$		
3.	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}u'$
4.	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
5.	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \log_a u$	$y' = \frac{1}{u \ln a} u'$
6.	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
7.	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = a^u$	$y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
8.	$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$
9.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
10.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
11.	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} u$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
12.	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = \operatorname{ctg} u$	$y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

13.	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14.	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
15.	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
16.	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arcctg} u$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$

Правила дифференцирования

- 1) $(Cf(x))' = Cf'(x)$, где C – константа;
- 2) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
- 3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
- 4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$;
- 5) если $u = g(x)$, то $(f(g(x)))' = (f(u))'_x = f'_x(u) \cdot u'_x$.

Правила интегрирования

- 1) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;
- 2) $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$;
- 3) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$;
- 4) $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ – формула интегрирования по частям.

Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Таблица простейших интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1);$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1);$
4. $\int e^x dx = e^x + C;$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0);$

6. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0);$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad (a \neq 0);$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C, \quad (a \neq 0);$
17. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0);$
18. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 + x^2} + \ln \left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| \right) + C, \quad (a \neq 0).$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций
 $(\alpha(x) - \text{бесконечно малая при } x \rightarrow 0)$

- | | |
|---|---|
| 1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x);$ | 6. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x);$ |
| 2. $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$ | 7. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a;$ |
| 3. $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2};$ | 8. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$ |
| 4. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x);$ | 9. $(1 + \alpha(x))^n - 1 \sim n\alpha(x);$ |
| 5. $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$ | 10. $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}.$ |

Замечательные пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad (\text{первый замечательный предел});$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \approx 2,71... \quad (\text{второй замечательный предел}).$$