Ходыкин В. Ф.

Лекции по Математическому Программированию

$$Z = x_1 - x_2 - x_3 + 107x_4 \quad max$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \ge 5$$

$$x_1 + x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 - 12x_3 + x_4 \le 10$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_4 \le 0.$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Экономический факультет

В. Ф. Ходыкин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

(Тексты лекций для студентов экономических специальностей)

Утверждено на заседании кафедры
математики и математических
методов в экономике
протокол № 1 от 31.09.2000 г.

Донецк ДонНУ 2000

УДК 517(071)
Ходыкин В. Ф. Математическое программирование: Тексты лекций.. - Донецк: ДонНУ, 2000. -77 с.

Тексты лекций охватывают разделы линейного программирования, динамического программирования и сетевого планирования и управления. Изложение теоретических основ иллюстрируется примерами. К текстам лекций прилагается дискета с обучающе-контролирующей программой «Счастливый случай» для закрепления материала с использованием персонального компьютера.

Тексты лекций предназначены для студентов экономических специальностей университета.

Ил. 21..

Рецензент: доцент кафедры математики и математических методов в экономике В. П. Щербина

Введение.

Для эффективного функционирования экономических объектов необходимо установить оптимальное управление во всех структурных подразделениях, которое позволяет рационально использовать трудовые и производственные ресурсы.

Многие экономические процессы можно записать в математической форме, в виде математических моделей. С использованием математических моделей можно определить такие значения неизвестных параметров экономической системы, при которых некоторая цель принимала бы экстремальные значения.

Например: Необходимо определить суточный план производства продукции различного вида, при котором предприятие получило бы максимальную прибыль.

Математическое программирование – это раздел прикладной математики, который разрабатывает теоретические основы и методы решения экстремальных задач.

Для решения задач математического программирования сложно использовать классические методы нахождения экстремума т. к. в задачах математического программирования целевая функция достигает своего экстремального значения на границе области допустимых значений неизвестных переменных, а производные в граничных точках не существуют. Полный перебор допустимых точек невозможен из-за значительного их количества.

К математическому программированию относятся ряд разделов, основные из которых следующие:

1. *Линейное программирование.* К данному разделу относятся задачи, в которых неизвестные переменные входят в математические соотношения в первой степени.

2. *Нелинейное программирование.* К данному разделу относятся задачи, в которых целевая функция и (или) ограничения могут быть нелинейными.

3. *Динамическое программирование.* К данному разделу относятся задачи, в которых процесс решения можно разбить на отдельные этапы.

4. *Целочисленное программирование.* К данному разделу относятся задачи, в которых неизвестные переменные могут принимать только целочисленные значения.

5. *Стохастическое программирование.* К данному разделу относятся задачи, в которых содержатся случайные величины в целевой функции или ограничениях.

6. *Параметрическое программирование.* К данному разделу относятся задачи, в которых коэффициенты при неизвестных переменных в целевой функции или ограничениях зависят от некоторых параметров.

Тема 1: Математическое моделирование экономических задач.

1.1. Этапы принятия решений.

Для принятия оптимальных управленческих решений необходимо выполнить следующие этапы.

I. Проводится изучение исследуемого экономического объекта.
II. Проводится построения экономической постановки задачи.
III. На основании экономической постановки строится математическая модель задачи.
IV. Выбираются методы решения данной задачи.
V. Выбирается или разрабатывается программное обеспечение для решения данной задачи.
VI. Проводится решение поставленной задачи.
VII. Проводится анализ полученных результатов.

Если полученные результаты удовлетворяют всем требованиям, то они используются в процессе принятия решений. В противном случае выполняется необходимая корректировка экономической постановки задачи, и процесс принятия решений продолжается с третьего этапа.

1.2. Построение математических моделей экономических задач.

Из экономической постановки задачи определяются неизвестные переменные, значения которых необходимо найти в процессе решения задачи.

Неизвестные переменные могут иметь несколько индексов и обозначаются прописными латинскими буквами: x_i, x_{ij}, y_k. *Например:* x_{ij} – объём перевезенной продукции от **i**-го поставщика к **j**-му потребителю.

Математическая модель задачи состоит из:

1. Целевой функции (критерия оптимальности). Данную функцию будем обозначать через Z. Она должна количественно отражать значение цели в зависимости от значений неизвестных переменных. Целевая функция может быть на нахождение максимального значения (прибыль предприятия) или минимального значения (себестоимость, затраты).
2. Ограничений задачи. В реальной экономической системе существуют ограничения, например, на объём используемых ресурсов, которые должны быть учтены при построении математической модели. Ограничения должны быть записаны в виде математических соотношений (в виде уравнений или неравенств).
3. Условий неотрицательности переменных. Неизвестные переменные задачи отражают некоторые реальные параметры экономической системы, которые, как правило, не могут принимать отрицательных значений, поэтому соответствующие неизвестные переменные должны быть положительными или нулевыми.

Если целевая функция и ограничения задачи линейные, то задача называется *задачей линейного программирования (ЗЛП).*

Пример задачи линейного программирования:

$$z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 \longrightarrow \min \qquad (1)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 3x_2 + 4x_4 \leq 8 \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,4} \qquad (3)$$

1.3. Примеры построения моделей экономических задач.

***Модель 1.* Задача нахождения оптимального плана выпуска продукции.**

Экономическая постановка:

Предприятие производит **n** видов продукции с использованием **m** видов сырья. Для производства единицы продукции используется строго определённое количество сырья того или иного вида. Сырьё каждого вида на предприятии ограничено. Предприятие получает определённую прибыль от реализации единицы продукции. Необходимо найти такой план производства продукции, при котором предприятие получит максимальную общую прибыль.

Математическая постановка:

Введём обозначения заданных параметров.

Пусть j – индекс вида продукции $j = \overline{1,n}$;

i– индекс вида ресурсов $i = \overline{1,m}$;

a_{ij} – затраты сырья **i**-го вида на производство единицы продукции **j**-го вида;

A_i – заданное ограничение на имеющийся объём ресурсов i-го вида;

P_j – прибыль, получаемая от реализации единицы продукции j-го вида;

Введём неизвестные переменные:

x_j – объём выпускаемой продукции j-го вида.

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом:

$$z = P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n \longrightarrow \max \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le A_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n} \qquad (3)$$

Модель 2. **Задача составления рациона.**

Экономическая постановка:

В некотором фермерском хозяйстве производится откорм животных. Для откорма используется **n** видов кормов. Известно содержание питательных веществ (кальций, фосфор и др.) в единице корма каждого вида. Для полноценного питания животных необходимо потребление питательных веществ не меньше заданных количеств. Известна стоимость единицы каждого корма. Необходимо определить рацион кормления животных, при котором общие затраты на откорм будут минимальными.

Математическая постановка:

Введём обозначения заданных параметров:

j – индекс вида кормов, $j = \overline{1,n}$;

i – индекс вида питательных веществ, $i = \overline{1,m}$;

a_{ij} - содержание i-го питательного вещества в единице корма j-го вида;

A_i – необходимое суточное потребление питательного вещества i –го вида;

C_j – стоимость единицы кормов j-го вида.

Введём неизвестные переменные:

x_j – суточный объём кормления животных j-м видом корма.

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом:

$$z = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \longrightarrow \min \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge A_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Модель 3. **Транспортная задача.**

Экономическая постановка:

Имеется **m** поставщиков однородной продукции и **n** потребителей этой продукции. Известны удельные затраты на доставку единицы продукции от каждого поставщика каждому потребителю. Запасы продукции у поставщиков ограничены. Известны так же потребности в продукции каждого потребителя. Необходимо определить такой план перевозки продукции от поставщиков к потребителям, при котором общие затраты на перевозку будут минимальными.

Математическая постановка:

Введём обозначения заданных параметров:

j – индекс потребителей, $j = \overline{1,n}$;

i – индекс поставщиков, $i = \overline{1,m}$;

A_i – объём имеющейся продукции у i-го поставщика;

B_j – объём потребность в продукции j-го потребителя;

C_{ij} – удельные затраты на перевозку единицы продукции от i-го поставщика j-му потребителю.

Введём неизвестные переменные:

x_{ij} – объём перевозки продукции от i-го поставщика j-му потребителю.

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом:

$$z = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + \ldots + C_{1n}x_{1n} + C_{21}x_{21} + \ldots + C_{m(n-1)}x_{m(n-1)} + C_{mn}x_{mn} \longrightarrow \min \quad (1)$$

Ограничения задачи.

I. От каждого поставщика можно вывести продукцию не более имеющегося количества:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} \le A_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} \le A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} \le A_m \end{cases} \qquad (2)$$

II. Потребность каждого потребителя в продукции должна быть удовлетворена:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} \ge B_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} \ge B_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} \ge B_n \end{cases} \qquad (3)$$

III. Условие неотрицательности:

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Часто удобно записывать математическую постановку в свёрнутом виде:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \longrightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le A_i \quad , \quad i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge B_j \quad , \ j = \overline{1,n}$$

$$x_{ij} \ge 0 \ , \ i = \overline{1,m \ } , \quad j = \overline{1,n}.$$

Модель 4. Задача о назначениях.

Экономическая постановка:

Имеются **n** видов работ и **n** исполнителей. Каждый из исполнителей может выполнить любую, но только одну работу. Задана себестоимость выполнения каждой работы, каждым исполнителем. Необходимо закрепить исполнителей за работой таким образом, чтобы общая стоимость выполнения работ была минимальной.

Математическая постановка.

Введём обозначения заданных параметров.

i – индекс работ, i = $\overline{1,n}.$;

j – индекс исполнителей, j =$\overline{1,n}.$;

c_{ij}- себестоимость выполнения i-той работы j-тым исполнителем.

Введём неизвестные переменные. В данной задаче неизвестные переменные могут принимать только два значения 0 или 1. Такие переменные называются булевыми.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ - если за i-той работой закреплён j-тый исполнитель;} \\ 0 \text{ - в противном случае.} \end{cases}$$

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом:

$$z = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + \ldots + C_{1n}x_{1n} + C_{21}x_{21} \ldots + C_{(n-1)(n-1)}x_{(n-1)(n-1)} + C_{nn}x_{nn} \longrightarrow \min$$

I группа ограничений.

За каждой работой должен быть закреплён только один исполнитель:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} = 1 \end{cases}$$

II. группа ограничений.

Каждый исполнитель может выполнить только одну работу:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{n2} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{nn} = 1 \end{cases}$$

$$x_{ij} = \{0,1\} \quad i = \overline{1,n}. \; j = \overline{1,n}.$$

Модель 5. Задача оптимального раскроя промышленных материалов.

<u>Экономическая постановка.</u>

На раскрой поступает исходный материал одинакового размера. Его требуется раскроить на заготовки заданного размера в заданном количестве, таким образом, чтобы общие отходы были минимальными.

<u>Математическая постановка.</u>

Введём обозначения:

i – индекс заготовок, $i = \overline{1,m}.$;

A_i – необходимое количество заготовок i-того типа;

j – индекс вариантов раскроя, $j = \overline{1,n}.$;

C_j –размер отходов при раскрое единицы исходного материала по варианту j;

a_{ij} – количество заготовок i-того вида при раскрое единицы исходного материала по варианту j.

Введём обозначения неизвестных переменных.

x_j- количество исходного материала раскроенного по варианту j.

В терминах введённых обозначений данная задача запишется следующим образом:

$$z = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \longrightarrow \min \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = A_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \qquad (3)$$

Применение математических моделей позволяет экономить исходные материалы до 20 %.

Математическая модель раскроя строится в два этапа.

На первом этапе производится построение вариантов раскроя, в результате которого определяются значения количества вариантов n, количества заготовок каждого вида, получаемых при различных вариантах раскроя (a_{ij}), а так же значения отходов (C_j).

Построение вариантов раскроя единицы исходного материала осуществляется в виде следующей таблицы:

№ варианта	Заготовка i_1	Заготовка i_2	…	Заготовка i_m	Отходы

Заготовки располагаются в порядке невозрастания их размеров. Построение вариантов осуществляется методом полного перебора.

Пример: На раскрой поступают металлические прутки размером L= 800 см. Необходимо получить 3 вида заготовок с размерами l_1=150см., l_2=250см., l_3=200 см., в количествах соответственно: A_1=5000 шт., A_2=3500 шт., A_3=7000 шт. Необходимо построить математическую модель раскроя с целью получения минимальных общих отходов.

Выполним первый этап построения модели, т. е. построим варианты раскроя, с помощью метода полного перебора:

№ варианта	l_2 250	l_3 200	l_1 150	Отходы
1.	3	-	-	50
2.	2	1	-	100
3.	2	-	2	0
4.	1	2	1	0
5.	1	1	2	50
6.	1	-	3	100
7.	-	4	-	0
8.	-	3	1	50
9.	-	2	2	100
10.	-	1	4	0
11.	-	-	5	50

Из таблицы нам становится известно, что количество вариантов раскроя в данном случае равно 11, а также значения полученных заготовок каждого вида по каждому варианту раскроя. Теперь мы можем перейти ко второму этапу и записать математическую модель задачи:

$$Z = 50x_1 + 100x_2 + 50x_5 + 100x_6 + 50x_8 + 100x_9 + 50x_{11} \longrightarrow \min$$

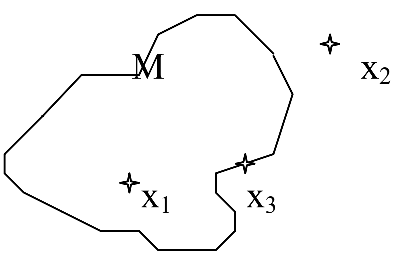
$$\begin{cases} 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_8 + 2x_9 + 4x_{10} + 5x_{11} = 5000 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3500 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + x_{10} = 7000 \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,11}.$

Тема 2: Элементы выпуклых множеств.

Определение 1. Множеством называется совокупность элементов любой природы, для которых задано правило принадлежности к данному множеству.

Определение 2. ε - окрестностью точки X называется множество всех точек, расстояние которых до точки X меньше ε.



Определение 3. Точка x_1 называется внутренней точкой множества М, если существует такая ε - окрестность данной точки, все точки которой принадлежат множеству М.

Определение 4. Точка x_2 называется внешней точкой множества М, если существует такая ε - окрестность данной точки все точки которой не принадлежат множеству М.

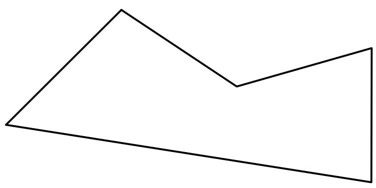
Определение 5. Точка x_3 называется граничной точкой множества М, если в любой её ε - окрестности существуют точки как принадлежащие множеству М, так и не принадлежащие множеству М.

Определение 6. Множество М называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки.

$|x| \prec 2$ -множество не замкнутое

$|x| \leq 2$ -множество замкнутое

О*пределение 7.* Множество М называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками, принадлежащими данному множеству, оно содержит и отрезок их соединяющий.



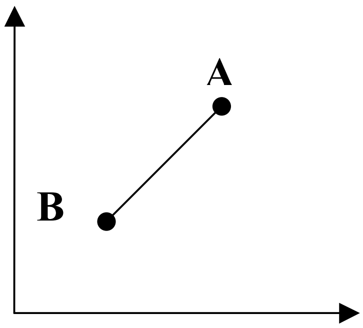
Невыпуклое множество

Выпуклое множество

*Определение 8.*Точка x множества М называется угловой или крайней, если она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего данному множеству.

Теорема 1. Любую точку отрезка можно представить в виде выпуклой комбинации его угловых точек.

$$\begin{aligned} &x = \lambda_1 A + \lambda_2 B \\ &\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ &\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$ - выпуклая комбинация угловых точек А и В.



Теорема 2. Любую точку выпуклого замкнутого множества можно представить в виде выпуклой комбинации его угловых точек.

$$\begin{cases} \overline{x} = \lambda_1 \overline{x_1} + \lambda_2 \overline{x_2} + ... + \lambda_n \overline{x_n} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, ..., \lambda_n \geq 0. \end{cases}$$

Тема 3: Различные формы задач линейного программирования.

Задачи линейного программирования могут находиться в различных эквивалентных формах. Иногда требуется, чтобы задача находилась в какой-то определённой форме. Например, для решения задачи графическим методом требуется, чтобы она находилась в стандартной форме, а для решения симплекс-методом - в канонической форме. Поэтому необходимо знать формы задач и уметь переходить от одной формы к другой.

Задача линейного программирования может быть в следующих формах: общая,

Общая форма ЗЛП имеет вид:

Найти максимум или минимум целевой функции z:

$$z = C_1x_1 + \ldots + C_nx_n \longrightarrow \max (\min) \qquad (1)$$

При выполнении следующих ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots \qquad + a_{1n}x_n \quad R_1 \quad b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots \qquad + a_{2n}x_n \quad R_2 \quad b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \quad R_m \quad b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,k.}, \ k \leq n \qquad (3)$$

В общей форме каждый символ R_1 , R_2 ,…, R_m означает один из знаков: ≥, = или ≤. В общей форме задачи линейного программирования часть переменных может быть подчинена условию неотрицательности ($x_i \geq 0$), часть - условию неположительности ($x_j \leq 0$), а какие-то переменные, возможно, могут принимать любые значения.

Стандартная форма имеет следующий вид.

Найти максимум или минимум целевой функции z:

$$z = C_1x_1 + \ldots + C_nx_n \longrightarrow \max (\min) \qquad (1)$$

При выполнении следующих ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots \qquad + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots \qquad + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,k.},\ k \leq n \qquad (3)$$

Другими словами, задача находится в стандартной форме, если целевая функция на нахождение минимума или максимума и ограничения задачи в виде неравенств.

Каноническая форма имеет вид:

Найти минимум целевой функции z:

$$z = C_1x_1 + \ldots + C_nx_n \longrightarrow \min \qquad (1)$$

При выполнении следующих ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0. \qquad (3)$$

Другими словами, если целевая функция на нахождение минимума, ограничения задачи заданы в виде уравнений и на все переменные накладываются условия неотрицательности, то задача линейного программирования находится в канонической форме. Некоторые авторы придерживаются концепции, что целевая функция задачи линейного программирования в канонической форме, должна быть на максимум. Вопрос о целевой функции не является существенным (в некоторых случаях действительно удобнее решать задачу с целевой функцией на максимум), однако наличие ограничений в виде уравнений и условия неотрицательности переменных является обязательными для канонической формы.

Большинство методов решения ЗЛП требуют, чтобы задача была в канонической форме.

Для перехода от общей или стандартной формы к канонической используют следующие приёмы.

1. Если какая-то переменная x_s неположительна ($x_s \le 0$), то вводят новую переменную $\overline{x_s}$, так что $\overline{x_s} = -x_s$.Очевидно, что $\overline{x_s} \ge 0$. После чего в каждом ограничении и целевой функции переменную x_s заменяют на [$-\overline{x_s}$].

Если какая-то переменная x_t может принимать любые значения, то её заменяют разностью двух переменных x_t' и x_t'', так что каждая из переменных x_t' и x_t'' не отрицательна, т. е. полагают: $x_t = x_t' - x_t''$, где $x_t' \ge 0$ и $x_t'' \ge 0$.

2. Если какое–либо из ограничений имеет вид неравенства, то оно преобразуется в равенство прибавлением (если неравенство имеет тип $\le$) или вычитанием (если неравенство имеет тип $\ge$) из его левой части некоторой дополнительной неотрицательной переменной (такую переменную называют балансовой). Балансовые переменные входят в целевую функцию с коэффициентами 0.

Пример. Неравенство $2x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 4$ приводится к уравнению следующим образом: $2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 4$, где $x_4 \ge 0$, а неравенство $7x_1 + x_2 - 5x_3 + 10x_4 \le 6$ приводится к уравнению так: $7x_1 + x_2 - 5x_3 + 10x_4 + x_5 = 6$, где $x_5 \ge 0$.

3. Преобразование целевой функции. Если задана целевая функция на нахождение максимального значения, то вместо задачи $z \longrightarrow \max$, будем рассматривать задачу $z' = -z \longrightarrow \min$.

Очевидно, что $\max z = -\min z'$.

Пример. Преобразовать следующую задачу линейного программирования к задаче в канонической форме:

$$Z = x_1 - x_2 - x_3 + 107x_4 \to \max$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 5$$
$$x_1 + x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 - 12x_3 + x_4 \leq 10$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_4 \leq 0.$$

Вводим переменные $\overline{x_2} = -x_2$ и $\overline{x_4} = -x_4$. Заменяем переменные x_2 и x_4 соответственно на $-\overline{x_2}$ и $-\overline{x_4}$ в целевой функции и ограничениях задачи. Заменяем переменную x_3, на которую не накладываются ограничения по знаку, разностью неотрицательных переменных $x_3 = x_3' - x_3''$.

Первое и третье из ограничений преобразуем в равенство, вводя балансовые переменные $x_5 \geq 0$ и $x_6 \geq 0$. Получаем такую систему ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + \overline{x_2} + 3(x_3' - x_3'') + \overline{x}_4 - x_5 = 5 \\ x_1 - \overline{x_2} + 6(x_3' - x_3'') + 7\overline{x}_4 = 2 \\ x_1 - 3\overline{x_2} - 12(x_3' - x_3'') - \overline{x}_4 + x_6 = 10, \end{cases}$$

Целевую функцию преобразуем на минимум следующим образом:

$$Z_1 = -Z = -x_1 - \overline{x_2} + (x_3' - x_3'') + 107\overline{x_4} \to \min.$$

Все переменные в преобразованной задаче неотрицательные. Таким образом, мы получили задачу в канонической форме.

Для перехода от канонической формы к стандартной можно каждое из уравнений заменить системой неравенств:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \to \begin{Bmatrix} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \end{Bmatrix} \quad (*)$$

Другой способ состоит в приведении системы уравнений к специальному виду и дальнейшему исключению некоторых переменных.

Пример. Привести к стандартной форме следующую задачу линейного программирования.

$Z = x_1+x_2-x_3-3x_4 \to \max.$

$x_1- \ x_2+2x_3- \ x_4=3$

$x_1-2x_2+3x_3-5x_4=7$ (**)

$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,4}.$

Решение.

С помощью метода Жордана-Гаусса выделяем в каждом уравнении базисную переменную. Такое выделение осуществляется с помощью эквивалентных (элементарных) гаусовских преобразований. К ним относятся:

а) умножение любого уравнения на константу отличную от нуля;

б) прибавление к любому уравнению любого другого уравнения, умноженного на любую константу.

Исходную систему линейных уравнений перед преобразованием удобно записывать в виде матрицы или таблицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} x_1 \quad + x_3 + 3x_4 = -1 \\ \quad x_2 - x_3 + 4x_4 = -4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1 - x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -4 + x_3 - 4x_4 \end{array} \quad (1)$$

Учитывая, что $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ из (1) получаем:

$$\begin{array}{l} -1 - x_3 - 3x_4 \geq 0 \\ -4 + x_3 - 4x_4 \geq 0 \end{array} \quad (2), \quad \text{то есть}$$

$$\begin{array}{l} -x_3 - 3x_4 \geq 1, \\ x_3 - 4x_4 \geq 4 \end{array} \quad (3)$$

Далее подставляем в целевую функцию z выражение x_1 и x_2 из (1), получаем:

$Z = (-1 - x_3 - 3x_4) + (-4 + x_3 - 4x_4) - x_3 - 3x_4 = -5 - x_3 - 10x_4.$

Таким образом, получаем следующую задачу линейного программирования в стандартной форме:

$Z = -x_3 - 10x_4 - 5 \to \max.$

$$\begin{array}{l} -x_3 - 3x_4 \geq 1 \\ x_3 - 4x_4 \geq 4 \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Тема 4: Геометрическая интерпретация ЗЛП. Графический метод решения.

4.1. Геометрическая интерпретация.

Определение 1. Значения неизвестных переменных, удовлетворяющие всем ограничениям задачи линейного программирования, называются допустимыми значениями переменных или планами.

Определение 2. Множество всех планов задачи линейного программирования называется областью допустимых значений переменных (ОДЗ).

Определение 3. План задачи линейного программирования, при котором целевая функция принимает минимальное (или максимальное) значение на ОДЗ называется оптимальным.

Рассмотрим построение ОДЗ на плоскости в двухмерном пространстве. Рассмотрим следующее неравенство.

$$a_1x_1 + a_2x_2 \left\{\begin{matrix} \le \\ \ge \end{matrix}\right\} b_1$$

Геометрическим решением такого неравенства является полуплоскость. Для того, чтобы определить данную полуплоскость необходимо построить прямую, которая разбивает всю плоскость на две полуплоскости. Этой разделяющей прямой соответствует следующее уравнение:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b_1$$

Для построения прямой необходимо знать две точки. Если $b_1 \neq 0$, то такими точками будут точки пересечения с осями координат.

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = b_1/a_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = b_1/a_1; \end{cases}$$

Если $b_1=0$, то искомая прямая проходит через начало координат, и, следовательно, первой точкой является точка (0,0). Необходимо определить вторую точку. Для этого присваивается любое значение любой из переменных и с помощью данного уравнения вычисляется значение другой переменной. Через полученные две точки проводится прямая. Её целесообразно отметить номером соответствующего ограничения.

Теперь необходимо определить, какая из двух полученных полуплоскостей удовлетворяет нашему неравенству. Выбирается любая точка на одной из полуплоскостей. Она не должна принадлежать разделяющей прямой. Координаты данной точки подставляются в неравенство. Если неравенство истинное, то данная полуплоскость и будет геометрическим решением неравенства. В противном случае, геометрическим решением неравенства будет противоположная полуплоскость.

Найденная полуплоскость отмечается штрихами.

Аналогично находятся геометрические решения всех ограничений задачи. Областью допустимых значений будет многоугольник, полученный с помощью пересечения всех полуплоскостей.

Таким образом, геометрически решить ЗЛП означает найти среди всех точек ОДЗ такую точку (точки), при которой (которых) целевая функция принимает своё экстремальное значение.

Рассмотрим целевую функцию.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \begin{Bmatrix} \max \\ \min \end{Bmatrix}$$

Запишем целевую функцию в векторной форме, в виде скалярного произведения векторов.

$$z = (\overline{c}, \overline{x}) \to \min(\max). \quad (*)$$

Где $\overline{c} = (c_1, c_2)$ и $\overline{x} = (x_1, x_2)$

Вектор $\overline{c}$ называется направляющим вектором или градиентом целевой функции.

$$\overline{c} = \text{grad}\,(z)' = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2)$$

Поскольку целевая функция линейная, то частные производные равны коэффициентам целевой функции при соответствующих переменных. Направляющий вектор показывает направление возрастания целевой функции.

Если присвоить целевой функции некоторое значение, то она геометрически будет определять некоторую прямую линию. Присваивая z различные значения, мы будем иметь семейство параллельных прямых, которые называются изоцелями целевой функции.

Рассмотрим взаимное расположение направляющего вектора и изоцелей. Если в (*) положить z =0, то скалярное произведение векторов будет равно нулю, что означает перпендикулярность векторов. Таким образом, все изоцели перпендикулярны направляющему вектору.

Построим произвольную изоцель проходящую через ОДЗ. При решении задачи на нахождение максимального значения целевой функции исходную изоцель необходимо мысленно перемещать в направлении направляющего вектора, пока она не станет опорной. При нахождении минимального значения, изоцель необходимо перемещать в противоположном направлении.

Определение. Прямая называется опорной к множеству М, если она имеет с множеством М хотя бы одну общую точку и все точки множества М расположены по одну сторону от прямой

Аналогичные рассуждения можно провести и для случая трёх переменных. Изоцелями будут плоскости, геометрическим решением неравенств будут полупространства, ОДЗ будет многогранником.

Так как трёхмерное пространство необходимо изображать на плоскости в двухмерном пространстве, то геометрически можно представить и найти решения только наиболее простых задач с тремя переменными.

4.2. Графический метод решения ЗЛП.

Графический метод является наглядным и простым методом решения задач линейного программирования. Однако область его применения ограничена размерностью задачи. Если задача находится в стандартной форме, то количество переменных должно быть не более трёх. Если исходная задача находится в канонической форме, то она должна быть предварительно преобразована к стандартной форме.

Можно оценить возможность решения такой задачи. Пусть задача имеет n-переменных, m-ограничений. Задача может быть решена графическим методом если:

n-m≤ 3, когда все уравнения системы линейно независимы

или в общем случае

n-r ≤ 3, где r – количество линейно независимых уравнений, или ранг матрицы, состоящей из коэффициентов при переменных в уравнениях системы ограничений.

Алгоритм графического метода.

1. Проверяется, находится ли исходная ЗЛП в стандартной форме, если нет, то задачу необходимо преобразовать к стандартной форме.

2. Проверяется количество неизвестных переменных. Если это количество больше трёх, то задача не может быть решена графическим методом (существуют другие эффективные методы решения таких задач).

3. Строится область допустимых значений переменных для ЗЛП.

4. Строится направляющий вектор $\bar{c}$.

5. Через ОДЗ проводится исходная изоцель (перпендикулярно направляющему вектору).

6. Проводится мысленное перемещение исходной изоцели в направлении вектора $\bar{c}$, если определяется максимальное значение целевой функции, или в противоположном направлении, если определяется её минимальное значение, до тех пор, пока изоцель не станет опорной к ОДЗ. Точки пересечения опорной изоцели и ОДЗ и будут оптимальными точками задачи.

7. Для того, чтобы определить координаты оптимальной точки, необходимо решить систему соответствующих линейных уравнений.

8. Для нахождения оптимального значения целевой функции необходимо оптимальные значения переменных подставить в целевую функцию и вычислить её значение.

Пример.

Решить следующую задачу линейного программирования графическим методом:

$Z = x_1 + 3x_2 \to \max (\min)$

$2x_1 - x_2 \leq 9$
$3x_1 - x_2 \geq 0$
$-x_1 + 3x_2 \leq 13$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

Решение.

Задача находится в стандартной форме и имеет две переменные и, следовательно, может быть решена графическим методом.

Строим ОДЗ для переменных задачи:

1. $2x_1 - x_2 = 9$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -9 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 9/2 \\ x_2 = 0. \end{cases}$

По этим двум точкам строим прямую. Определяем, какая из полуплоскостей является решением данного неравенства. Для этого подставляем координаты любой точки, не принадлежащей прямой, в первое неравенство. Для простоты можно взять точку (0,0). Получим $2*0 - 0 \leq 9$. Такое неравенство является истинным, и, следовательно, полуплоскость, на которой расположена точка (0,0), является искомой.

2. $3x_1 - x_2 = 0$ Данная прямая проходит через начало координат, поэтому необходимо взять одну точку (0,0), а вторую любую другую удовлетворяющую данному уравнению. Например, точку (1,3).

3. $-x_1 + 3x_2 = 13$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 13/3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -13 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

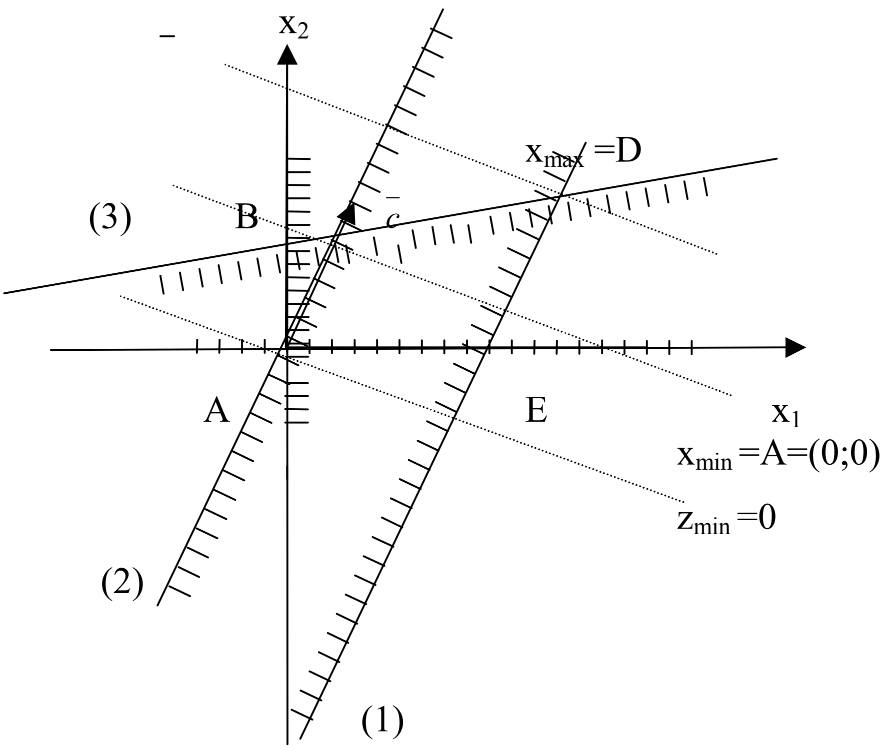
4. $x_1 \geq 0$ – это правая полуплоскость системы координат.

5. $x_2 \geq 0$ – это верхняя полуплоскость системы координат.

Найдём пересечение всех построенных полуплоскостей. Это будет многоугольник ABDE.

Построим направляющий вектор $\bar{c} = (1,3)$ и исходную изоцель. Сначала решаем задачу на нахождения максимального значения целевой функции, для этого мысленно перемещаем изоцель в направлении направляющего вектора. Она станет опорной в точке D. Решая систему из двух соответствующих уравнений, находим оптимальные значения переменных: $D = X_{max} = (8,7)$, $z_{max} = 29$.

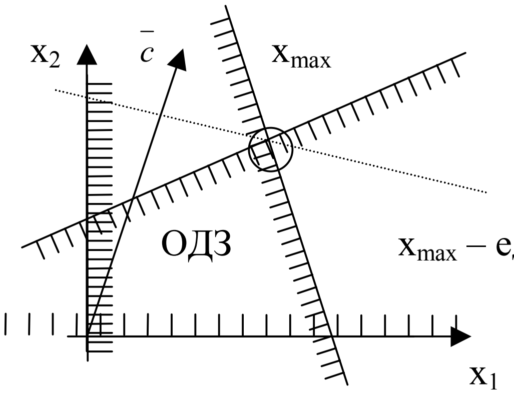
Для решения задачи на нахождение минимального значения целевой функции перемещаем исходную изоцель в противоположном направлении направляющему вектору. Изоцель станет опорной в точке (0,0). Таким образом, $x_{min} = A = (0;0)$, $z_{min} = 0$.



4.3. Типы оптимальных решений задач линейного программирования при решениии графическим методом.

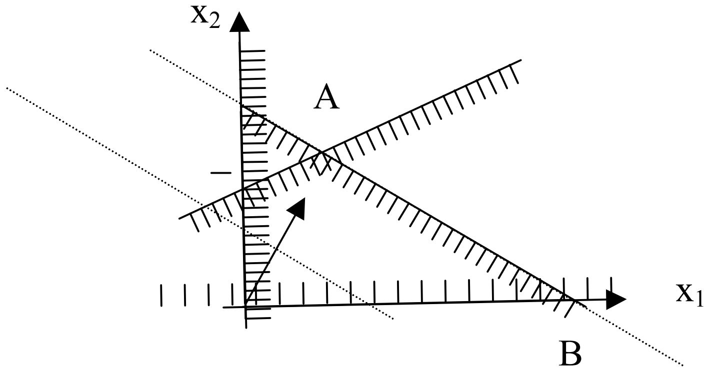
При решении ЗЛП графическим методом возможны следующие случаи:

1. Единственность оптимального решения. В этом случае опорная изоцель имеет с ОДЗ только одну общую точку.



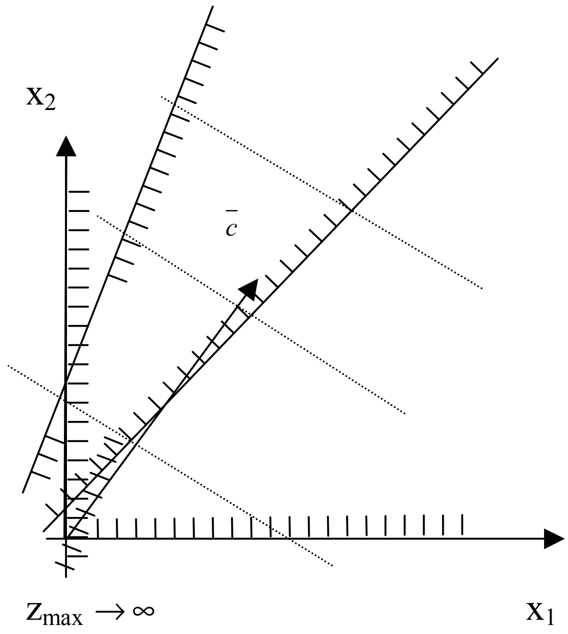
x_{max} – единственная оптимальная точка

2. Альтернативный оптимум (множество оптимальных решений). В этом случае опорная изоцель совпадает с одной из сторон ОДЗ многоугольника в двумерном пространстве, а в трёхмерном пространстве с одной из граней многогранника.

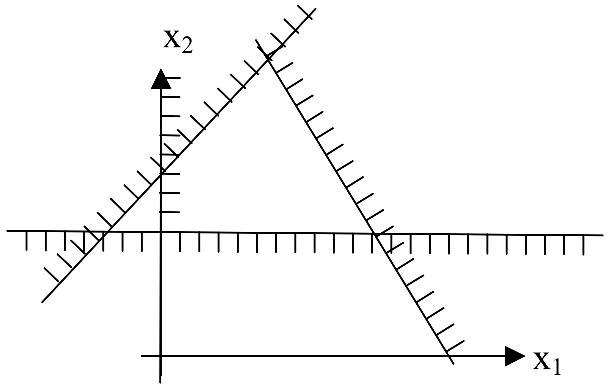


В данном случае целевая функция достигает своего максимального значения в любой точке отрезка [A,B]: $x_{max} \in [A,B]$ и записывается в виде выпуклой комбинации: $x_{max} = \lambda \cdot A + (1-\lambda) \cdot B$, $0 \le \lambda \le 1$

3. Задача линейного программирования не имеет оптимального решения, так как целевая функция неограничена сверху, если требуется найти максимум целевой функции (или снизу, если требуется найти минимум).

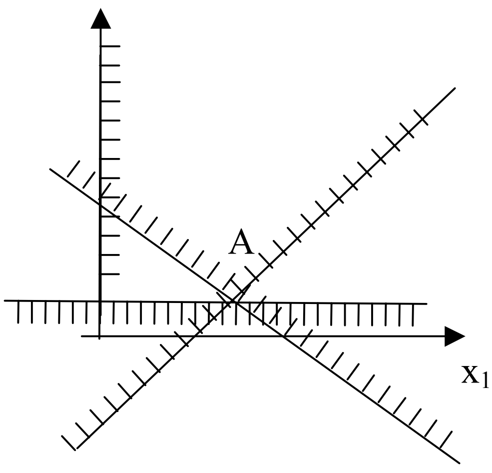


4. Задача линейного программирования не имеет решения, так как система ограничений противоречива, т. е. ОДЗ=$\varnothing$.



ОДЗ=$\varnothing$.

5. Если ОДЗ состоит из одной точки, то в этой точке z принимает своё максимальное и минимальное значение.



$x_{max}=x_{min}=A$

Тема 5: Решение задач линейного программирования симплексным методом.

Если задача линейного программирования имеет значительное количество переменных, то она не может быть решена графическим методом. Для решения таких задач используется различные другие методы в частности метод последовательного «улучшения» решения задачи *–симплексный метод (или симплекс-метод).*

5.1. Свойства решений задач линейного программирования

Симплекс метод основан на ряде следующих теорем.

<u>*Теорема 1.*</u>*О множестве планов ЗЛП.*

Множество всех планов задачи линейного программирования является выпуклым множеством.

Доказательство.

Возьмём два произвольных плана задачи линейного программирования и докажем, что любая точка, являющаяся выпуклой комбинацией данных планов, будет так же планом ЗЛП. Запишем ограничения задачи в матричном виде.

$$A \cdot \overline{x} = \overline{A_0},$$
$$\overline{x} \geq 0, \quad \textit{где}:$$

A- матрица коэффициентов при переменных в ограничениях задачи.

A_0 – вектор правых частей ограничений задачи.

Возьмём два произвольных плана $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$.

$$\overline{x_1} \qquad\qquad \overline{x_2}$$
$$A \cdot \overline{x_1} = \overline{A_0} \qquad\qquad A \cdot \overline{x_2} = \overline{A_0}$$
$$\overline{x_1} \geq 0. \qquad\qquad \overline{x_2} \geq 0.$$

План, являющийся выпуклой комбинацией данных угловых точек, запишется в следующем виде:

$$\overline{x} = \lambda \cdot \overline{x_1} + (1-\lambda) \cdot \overline{x_2}, 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (*)$$

Подставим данную точку в левую часть системы ограничений

$$A \cdot \overline{x} = A \cdot (\lambda \cdot \overline{x_1} + (1-\lambda) \cdot \overline{x_2}) = \lambda \cdot \underbrace{A \cdot \overline{x_1}}_{A_0} + (1-\lambda) \cdot \underbrace{A \cdot \overline{x_2}}_{A_0} = A_0 \cdot (\lambda + 1 - \lambda) = A_0.$$

Полученная точка x удовлетворяет ограничениям задачи. Остаётся доказать неотрицательность координат точки $\overline{x}$.

Рассмотрим (*). Так как $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ - планы задачи по предположению, то их координаты неотрицательны.

Так как скаляры λ и $(1-\lambda)$ неотрицательны (по условию выпуклости), то произведение неотрицательных скаляров на неотрицательные векторы будет неотрицательными векторами. Сумма неотрицательных векторов есть вектор неотрицательный. То есть координаты вектора $\overline{x}$ неотрицательны.

Таким образом, точка $\overline{x}$ удовлетворяет ограничениям задачи и условиям неотрицательности, поэтому является планом задачи и, следовательно, ОДЗ есть множество выпуклое.

Теорема 2. О целевой функции задачи линейного программирования.

Целевая функция ЗЛП принимает своё оптимальное значение в одной из угловых точек области допустимых значений переменных.

Если целевая функция принимает своё оптимальное значение в нескольких угловых точках, то такое же значение она принимает и в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией данных угловых точек.

Теорема 3. Достаточные условия существования угловой точки.

Пусть система векторов $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_k}$ ($k \le n$) в разложении $\overline{A_1}x_1+\overline{A_2}x_2+\ldots+\overline{A_n}x_n = \overline{A_0}$ (**) является линейно независимой и такой, что $\overline{A_1}x_1+\overline{A_2}x_2+\ldots+\overline{A_k}x_k=\overline{A_0}$, где все $x_j \ge 0,\quad j=\overline{1,k},\quad (k \le n)$, то точка $\overline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_k,0,0,\ldots,0)$ является угловой точкой ОДЗ.

Теорема4. Необходимые условия существования угловой точки.

Пусть точка $\overline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является угловой точкой ОДЗ, тогда векторы в разложении (**), соответствующие положительным значениям переменных будут линейно независимыми.

Следствия из теорем.

Определение. План $\overline{x}$, положительным координатам которого соответствуют линейно независимые векторы, называется ***опорным планом ЗЛП***.

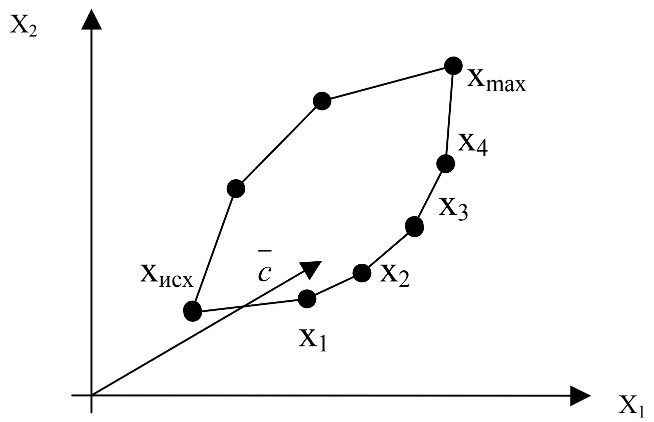
Следствие1. Опорный план имеет не более m положительных координат. Если он имеет ровно m положительных координат, то такой опорный план называется невырожденным, в противном случае вырожденным.

Следствие 2. Каждая угловая точка ОДЗ является опорным планом.

5.2. Идея решения задач линейного программирования симплекс-методом.

Теорема 1 утверждает, что ОДЗ ЗЛП является множеством выпуклым. Теорема 2 утверждает, что целевая функция принимает своё оптимальное значение в одной из угловых точек. Таким образом, можно найти все угловые точки (с помощью метода Жордана-Гаусса, например, найти все неотрицательные базисные решения) и вычислить значение целевой функции в этих точках. Оптимальной будет та точка, в которой целевая функция принимает своё минимальное или максимальное значение. Однако количество угловых точек, в зависимости от размерности задачи, может быть очень значительным: C_n^m . Поэтому найти все угловые точки даже с помощью компьютера бывает невозможно

Симплекс метод является целенаправленным перебором части угловых точек (метод последовательного улучшения опорного плана).



Для решения задачи симплекс методом мы должны ответить на два вопроса:

1. Является ли очередной опорный план оптимальным и если не является, то указать к какому опорному плану необходимо перейти.

2. Как перейти от одного опорного плана к другому.

5.3. Переход от одного опорного плана к другому.

Пусть ЗЛП находится в канонической форме и имеет исходный опорный план. Не теряя общности, предположим, что векторы A_1, $A_2,\ldots,A_m$ являются единичными, то есть базисными.

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots c_mx_m+c_{m+1}x_{m+1}+\ldots+c_nx_n\to\min$$

$$x_1 \qquad +a_{1m+1}x_{m+1}+a_{1m+2}x_{m+2}+\ldots+a_{1n}x_n=a_1$$

$$x_2 \qquad +a_{2m+1}x_{m+1}+a_{2m+2}x_{m+2}+\ldots+a_{2n}x_n=a_2$$

………………………………………………………..

$$x_m+a_{mm+1}x_{m+1}+a_{mm+2}x_{m+2}+\ldots+a_{mn}x_n=a_m$$

$$x_j\geq 0, \qquad j=\overline{1,n}$$

В этом случае вектор правых частей системы уравнений можно разложить по векторам данного базиса следующим образом.

$$x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_mA_m=A_0 \qquad (1)$$

Тогда исходный опорный план будет следующим:

$\overline{x_0}=(x_1=a_1;\ x_2=a_2;\ \ldots;x_m=a_m;0;\ 0;\ldots;0)$

Для того, чтобы перейти к новому опорному плану, необходимо один из свободных векторов $A_{m+1},A_{m+2},\ldots,A_n$ ввести в базис, а какой-то из базисных векторов вывести из базиса. Для введения в базис выберем вектор, имеющий хотя бы одну положительную координату.

Пусть таким вектором будет вектор A_{m+1}. Разложим данный вектор по векторам того же базиса.

$$x_{1\,m+1}A_1+x_{2\,m+1}A_2+\ldots+x_{m\,m+1}A_m=A_{m+1} \qquad (2)$$

Умножим соотношение (2) на некоторую положительную величину $\theta>0$ и вычтем из соотношения (1).

$$(x_1-\theta x_{1\,m+1})A_1+(x_2-\theta x_{2\,m+1})A_2+\ldots+(x_m-\theta x_{m\,m+1})A_m+\theta A_{m+1}=A_0 \qquad (3)$$

Следующий вектор будет решением системы ограничений

$$\overline{x_1}=(x_1-\theta x_{2m+1};\ x_2-\theta x_{2m+1};\ldots;\ x_m-\theta x_{mm+1};\ \theta;0;0;\ldots;0) \qquad (4)$$

если все координаты данного вектора будут неотрицательными. Рассмотрим i-тую координату. $x_i-\theta x_{i\,m+1}\geq 0$

Если $x_{i\,m+1} \le 0$, то, эта координата будет неотрицательной. Пусть $x_{im+1} \succ 0$. Тогда необходимо выбрать значение θ таким, чтобы данная координата не стала отрицательной. Для этого решим неравенство и получим: $\theta = \dfrac{x_i}{x_{im+1}}$. Для того, чтобы были неотрицательными все координаты, у которых $x_{im+1} \succ 0$, необходимо, чтобы

$$\theta \le \min_{x_{im+1} \succ 0} \left\{ \frac{x_i}{x_{im+1}} \right\} \qquad (5).$$

Если выполняется соотношение (5), то все координаты вектора $\overline{x_1}$ в (4) будут неотрицательными и следовательно, $\overline{x_1}$ является планом ЗЛП, так как он содержит m+1 неотрицательных координат.

Для того, чтобы план $\overline{x_1}$ был опорным планом задачи линейного программирования, необходимо, чтобы одна из координат равнялась 0.

Пусть минимум в соотношении (5) был получен при i =1, тогда если взять

$$\theta = \min_{x_{im+1} \succ 0} \left\{ \frac{x_i}{x_{im+1}} \right\} \qquad (6),$$

то первая координата вектора $\overline{x_1}$ станет равной нулю.

Соотношение (6) называется *симплексным отношением*. Таким образом, мы перешли от исходного опорного плана $\overline{x_0}$ (базисные векторы $A_1, A_2, \ldots A_m$) к опорному плану $\overline{x_1}$ (базисные векторы $A_2, A_3, \ldots, A_m, A_{m+1}$).

5.4. Критерий оптимальности ЗЛП.

Теорема1: Если для некоторого вектора A_j опорного плана $\overline{x_0}$ выполняется соотношение $z_j - c_j \succ 0$, то опорный план $\overline{x_0}$ не является оптимальным и можно перейти к опорному плану $\overline{x_1}$, такому что: $z(x_1) < z(x_0)$.

Здесь: $z_j = (\overline{c}, A_j)$ - скалярное произведение векторов, $\overline{c}$ - вектор, состоящий из коэффициентов при базисных переменных целевой функции z, c_j- коэффициент целевой функции z при переменной x_j.

Следствие: Если для всех векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ некоторого опорного плана $\overline{x_0}$ выполняется соотношение $z_j - c_j \le 0$, то опорный план $\overline{x_0}$ является оптимальным. Величины $z_j - c_j$-называются *оценками соответствующих векторов.*

Таким образом, данное следствие теоремы позволяет установить является ли очередной опорный план оптимальным и если не является, то согласно теореме мы можем перейти к другому опорному плану, при котором значение целевой функции будет меньше. Для этого в базис, согласно теореме, необходимо ввести вектор A_j.

Замечание: В теореме и следствии предполагается, что задача находится в канонической форме с целевой функцией на минимум. Однако симплекс-методом можно решать и задачи в канонической форме с целевой функцией на максимум. В этом случае при анализе значений оценок используется их противоположный смысл, т. е. план будет оптимальным, если все оценки положительные и нулевые.

5.5.Описание симплексной таблицы.

Симплекс-метод является табличным методом решения ЗЛП, то есть исходную задачу решаем в виде таблицы и переход к следующему опорному плану (если он не оптимальный) осуществляется с помощью построения новой симплексной таблицы.

Пусть ЗЛП задана в канонической форме и имеется исходный опорный план. Пусть для определённости векторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ являются базисными, тогда:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \ldots + c_nx_n \to \min$$

$$x_1 \qquad + a_{1m+1}x_{m+1} + a_{1m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{1n}x_n = a_1$$

$$x_2 \qquad + a_{2m+1}x_{m+1} + a_{2m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{2n}x_n = a_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + a_{mm+2}x_{m+2} + \ldots + a_{mn}x_n = a_m$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}$$

Для данной задачи построим исходную симплексную таблицу.

Б	$C_б$	A_o	A_1	A_2	…	A_m	A_{m+1}	…	A_n
			c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n
A_1	c_1	a_1	1	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1n}
A_2	c_2	a_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_m	a_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mn}
z_j-c_j		$z(X_{Бo})$	0	0	…	0	z_{m+1}-c_{m+1}	…	z_n-c_n

В заголовке столбцов записываются все векторы системы ограничений, а так же соответствующие коэффициенты при переменных целевой функции. Столбец A_0 состоит из правых частей уравнений. На пересечении 4-го, 5-го,…, n-го столбцов и первых m строк записываются коэффициенты при соответствующих переменных в уравнениях.

Столбец Б (базис) определяет базисные векторы, причём они записываются в той последовательности, в какой выражены базисные переменные в системе ограничений.

Столбец $C_б$ определяет коэффициенты целевой функции при соответствующих базисных переменных.

Последняя строка z_j-c_j называется *индексной* или *оценочной* и определяет оценки соответствующих векторов, за исключением первой и второй клетки. Значения клеток индексной строки при опорном плане $X_{Бo}=(a_1,a_2,…,a_m,0,0,…,0)$ вычисляются следующим образом:

$Z(X_{Бo})=(C_Б;A_o)=c_1a_1+c_2a_2+…+c_ma_m$

$Z_{m+1}-c_{m+1}=(C_Б,A_{m+1})-c_{m+1}$

$Z_n-c_n=(C_Б,A_n)-c_n$

Оценки всех базисных векторов всегда равны нулю.

5.6 Алгоритм симплексного метода

При решении задачи линейного программирования симплексным методом, необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1. Проверяется, находится ли задача линейного программирования в канонической форме. Если нет, то её необходимо преобразовать к канонической форме.

2. Проверяется наличие исходного опорного плана. Если он отсутствует, то задача не может быть решена обычным симплекс-методом. Существуют другие модифицированные методы для решения таких задач.
3. Проводится построение исходной симплексной таблицы.
4. Проверяются значение оценок в индексной строке. Если нет положительных оценок, то выписывается оптимальное решение и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае выполняется пункт 5.
5. В базис вводится вектор, которому соответствует наибольшая положительная оценка. Данный столбец называется разрешающим.
6. Из базиса выводится вектор, которому соответствует наименьшее симплексное отношение (см. параграф 6.3). Данная строка называется разрешающей строкой.
7. Строится новая симплексная таблица. Соответствующим образом изменяются столбцы Б и $C_б$. Остальная часть таблицы заполняется из предыдущей с помощью Гаусовских преобразований, причём индексная строка считается m+1 строкой и также преобразуется с помощью Гаусовских преобразований. Переходим на выполнение пункта 4 алгоритма.

После построения каждой таблицы можно проверить правильность вычислений с использованием формул вычисления оценок приведённых в предыдущем параграфе.

Пример: решить следующую задачу симплекс-методом.

$$\underline{z}=2x_1-x_2+3x_3-2x_4 \to \max$$
$$\begin{aligned} -x_1+x_2+x_3 &= 1 \\ x_1+x_2 &\le 2 \\ x_1-x_2+x_4 &= 1 \end{aligned}$$
$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}$$

1. Задачу необходимо преобразовать к каноническому виду:

$$z'=-2x_1+x_2-3x_3+2x_4 \to \min$$
$$\begin{aligned} -x_1+x_2+x_3 &= 1 \\ x_1+x_2+x_5 &= 2 \\ x_1-x_2+x_4 &= 1 \end{aligned}$$
$$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,5}$$

2. Задача имеет исходный опорный план: $X_{Бо}$=(0,0,1,1,2)

Строим исходную симплексную таблицу:

Б	$C_Б$	A_o	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
			-2	1	-3	2	0	
A_3	-3	1	**-1**	1	1	0	0	1-я табли-ца
A_5	0	2	**1**	1	0	0	1	
A_4	**2**	**1**	**1**	**-1**	**0**	**1**	**0**	
Z'$_j$-c$_j$		-1	**7**	-6	0	0	0	
A_3	-3	2	0	**0**	1	1	0	2-я табли-ца
A_5	**0**	**1**	**0**	**2**	**0**	**-1**	**1**	
A_1	-2	1	1	**-1**	0	1	0	
Z'$_j$-c$_j$		-8	0	**1**	0	-7	0	
A_3	-3	2	0	0	1	1	0	3-я табли-ца
A_2	1	1/2	0	1	0	-1/2	1/2	
A_1	-2	3/2	1	0	0	1/2	1/2	
Z'$_j$-c$_j$		−17/2	0	0	0	−13/2	−1/2	

Рассмотрим первую таблицу. Критерием оптимальности являются неположительные оценки в индексной строке. В таблице имеются положительные оценки, следовательно, данный опорный план не является оптимальным. Наибольшая положительная оценка в индексной строке соответствует вектору A_1. Вводим в базис вектор A_1. Для определения вектора, выводимого из базиса, вычисляется симплексное отношение:

$$\theta = \min\left\{\frac{2}{1}, \frac{1}{1}\right\} = 1$$

Минимум достигается в строке A_4, поэтому выводим из базиса вектор A_4. Переходим ко второй таблице. Вносим соответствующие изменения в столбцы Б и $C_Б$. Делаем пересчет остальных строк таблицы по методу Жордана-Гаусса. Третья строка переписывается без изменения, т. к. разрешающий элемент равен единице. Третья (разрешающая) строка новой (второй) таблицы умножается на 1 и прибавляется к первой строке старой таблице. Результат записывается в качестве первой строки новой таблицы. Затем разрешающая строка умножается на –1 и прибавляется ко второй строке старой таблицы. Результат записывается в качестве второй строки новой таблицы. И, наконец, третья (разрешающая) строка новой таблицы умножается на –7 и прибавляется к индексной строке старой таблице. Результат записывается в качестве индексной строки новой таблицы. Необходимо проверить правильность проведённых преобразований. Для этого получим значения элементов новой индексной строки с помощью формул, приведённых в предыдущем параграфе. Если значения некоторых элементов не совпадают с полученными значениями с помощью метода Жордана-Гаусса, то при проведении преобразований допущена ошибка, которую необходимо устранить.

Рассматриваем индексную строку второй таблицы. Положительная оценка в ней соответствует вектору A_2. Вводим в базис вектор A_2. Симплексное отношение считать не нужно, так как в данном столбце имеется единственное положительное число соответствует вектору A_5. Выводим из базиса вектор A_5. Переходим к третьей таблице. Вносим соответствующие изменения в столбцы Б и $C_Б$. Выполняем пересчет остальных строк таблицы по методу Жордана-Гаусса.

Рассматриваем индексную строку третьей таблицы. Поскольку оценки в индексной строке отрицательные и нулевые, то полученный опорный план является оптимальный, а значение целевой функции Z’ является минимальным. Напомним, что вычислять оптимальное значение целевой функции не нужно, оно находится во второй клетке индексной строки последней симплексной таблицы.

X_{min} =(3/2;1/2;2;0;0) Z_{min} = -17/2. Поскольку исходная задача была преобразована, запишем ответ для исходной задачи:

X_{max} =(3/2;1/2;2;0) z_{max} =17/2

5.7. Различные виды оптимальных решений ЗЛП при решении симплекс-методом.

При решении задач симплекс-методом возможны следующие виды оптимальных решений:

1. Единственность. Если оценки всех свободных векторов строго отрицательные, то полученный опорный план является оптимальным и единственным. (см. пример в предыдущем параграфе).

2. Альтернативный оптимум (множество оптимальных решений). Если среди неположительных оценок свободных векторов имеется хотя бы одна нулевая, то полученный опорный план будет оптимальным, но не единственным. В этом случае можно перейти к другим опорным планам (вводятся в базис векторы, которым соответствуют нулевые оценки) и, затем, общее оптимальное решение записать в виде выпуклой комбинации полученных оптимальных опорных планов.

3. ЗЛП не имеет оптимального решения, так как целевая функция не ограничена снизу. Если в симплекс таблице имеется положительная оценка, а все элементы данного столбца отрицательны и нулевые, то данный вектор можно ввести в базис. Однако никакой из базисных векторов нельзя вывести из базиса. Из этого следует, что дальнейшее уменьшение целевой функции возможно при переходе к неопорному плану.

4. ЗЛП не имеет оптимального решения, так как система ограничений противоречива. Поскольку при решении ЗЛП обычным симплекс-методом должен быть исходный опорный план, то система линейных уравнений заведомо не противоречива. Следовательно, такой случай не может встретиться при решении обычным симплекс методом.

5. Если ОДЗ состоит из одной точки, то решение такой задачи является тривиальным, и может быть получено без использования симплекс-метода.

5.8. Симплекс метод с искусственным базисом.

Если задача линейного программирования находится в канонической форме, но исходный опорный план отсутствует, то такая задача не может быть решена обычным симплекс-методом. Для решения такой задачи может использоваться один из двух следующих способов:

I <u>*способ:*</u> *Выделение исходного опорного плана с помощью метода Жордана –Гаусса.*

Необходимо отдельно выписать систему линейных уравнений задачи и с помощью метода Жордана –Гаусса выделить некоторое неотрицательное базисное решение (опорный план). Для того, чтобы в качестве результата получилось неотрицательное базисное решение, необходимо при выборе разрешающей строки использовать симплексное отношение. Затем, используя преобразованную систему линейных уравнений, решать задачу обычным симплекс методом.

II способ: Симплекс метод с искусственным базисом.

Пусть задача линейного программирования находится в канонической форме, однако, не во всех уравнениях присутствуют базисные переменные, т. е. исходный опорный план отсутствует. В этом случае в те уравнения, в которых нет базисных переменных, необходимо добавить с коэффициентом +1 некоторую неотрицательную переменную. Такая переменная называется *искусственной.* Не следует путать искусственные переменные с балансовыми переменными, которые добавляются в неравенства и входят в целевую функцию с коэффициентами 0.

Пример: Пусть имеется следующее уравнение

$5x_1+x_2=5$; переменные x_1 и x_2 являются свободными. Добавим в это уравнение неотрицательную искусственную переменную x_3.

$5x_1+x_2+x_3=5$

Для того, чтобы решения этих двух уравнений совпадали необходимо, чтобы искусственная переменная x_3 стала равной 0. Для этого такая переменная должна выйти из базиса и стать свободной переменной. А для этого данную искусственную переменную необходимо добавить в целевую функцию с очень большим положительным числом (так как целевая функция на нахождения минимума). Это число обозначается латинской буквой M. Его можно считать равным $+\infty$. В связи с этим иногда метод искусственного базиса называют M-методом. Такое преобразование исходной задачи называется построением расширенной задачи. Если решается задача с целевой функцией на нахождение максимума, то искусственные переменные входят в целевую функцию с коэффициентом –М.

Таким образом, в расширенной задаче мы имеем опорный план (хотя некоторые из базисных переменных и являются искусственными).

Строится исходная симплекс таблица, в которой индексная строка разбивается на две строки, поскольку оценки состоят из двух слагаемых. В верхней строке записывается слагаемое оценки без М, в нижней строке - коэффициенты при М. Знак оценки определяется знаком коэффициента при М, независимо от величины и знака слагаемого без М, так как М очень большое положительное число.

Таким образом, для определения вектора, который вводится в базис необходимо провести анализ нижней индексной строки. Если выводится из базиса искусственный вектор, то соответствующий столбец в последующих симплексных таблицах можно не вычислять, если нет необходимости в получении решения двойственной задачи (см. следующую тему).

После того, как все искусственные векторы будут выведены из базиса, нижняя строка будет иметь все нулевые элементы, за исключением оценок, соответствующих искусственным векторам. Они будут равны –1. Такую строку можно удалить из рассмотрения и дальнейшее решение проводить обычным симплекс-методом, если нет необходимости в получении решения двойственной задачи (см. следующую тему).

<u>Пример:</u> Решить следующую задачу линейного программирования.

$$
\begin{aligned}
&Z = -5x_1 + x_2 + x_3 \to \min\\
&x_1 + x_2 \geq 4\\
&5x_1 + x_2 + x_3 = 14\\
&x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}
\end{aligned}
$$

Приведём её к канонической форме.

$$
\begin{aligned}
&Z = -5x_1 + x_2 + x_3 \to \min\\
&x_1 + x_2 - x_4 = 4\\
&5x_1 + x_2 + x_3 = 14\\
&x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}
\end{aligned}
$$

Исходного опорного плана нет, т.к. балансовая переменная x_4 входит в первое уравнение с коэффициентом –1, и, следовательно, не является базисной. Смотрим расширенную задачу.

$$Z = -5x_1 + x_2 + x_3 + Mx_5 \rightarrow \min$$
$$x_1 + x_2 \quad -x_4 + x_5 = 4$$
$$5x_1 + x_2 + x_3 = 14$$
$$x_j \geq 0,\ j=\overline{1,5}$$

Б	$C_Б$	A_o	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
			-5	1	1	0	M	
A_5	M	4	**1**	1	0	-1	1	1-я
A_3	**1**	**14**	**<u>5</u>**	**1**	**1**	**0**	**0**	таблица
Z_j-C_j		4	**10**	0	0	0	0	
M		14	**1**	1	0	-1	0	
A_5	**M**	**6/5**	**0**	**<u>4/5</u>**	**-1/5**	**-1**	**1**	2-я
A_1	-5	14/5	1	**1/5**	1/5	0	0	таблица
Z_j-C_j		-14	0	**-2**	-2	0	0	
M		6/5	0	**4/5**	-1/5	-1	0	
A_2	1	3/2	0	1	-1/4	-5/4	-	3-я
A_1	-5	5/2	1	0	1/4	1/4	-	таблица
Z_j-C_j		-11	0	0	-5/2	-5/2	-	
M		0	0	0	0	0	-	

В первой таблице положительные оценки имеют два вектора, можно вводить в базис любой из них, т. к. эти оценки имеют одинаковый коэффициент при М. Введём в базис, например, вектор A_1. Для определения вектора, выводимого из базиса, определяется симплексное отношение:

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{4}{1}, \frac{14}{5}\right\} = \frac{14}{5}$$

Минимум достигается в строке A_3, поэтому выводим из базиса вектор A_3. Переходим к построению второй таблице. Вносим соответствующие изменения в столбцы Б и $C_Б$. Делаем пересчет остальных столбцов таблицы по методу Жордана-Гаусса .

Рассматриваем нижнюю индексную строку второй таблицы. Положительная оценка в ней соответствует вектору A_2. Вводим в базис вектор A_2. Для определения вектора, выводящегося из базиса, определяется симплексное отношение:

$$\theta_2 = \min\left\{\frac{6/5}{4/5}, \frac{14/5}{1/5}\right\} = \frac{3}{2}$$

Минимум достигается в строке A_3, поэтому выводим из базиса искусственный вектор A_5, который в следующей таблице можно не рассчитывать, поскольку не требуется нахождение решения двойственной задачи. Переходим к построению третьей таблице. Вносим соответствующие изменения в столбцы Б и $C_Б$. Делаем пересчет остальных столбцов таблицы по методу Жордана-Гаусса. Так как опорный план уже не содержит искусственных векторов, то вторая индексная строка содержит нулевые значения. Дальнейшее решение осуществляется обычным симплексным методом с одной индексной строкой.

Рассматриваем индексную строку третьей таблицы. Поскольку оценки индексной строки отрицательные и нулевые, то полученный опорный план является оптимальный, а значение целевой функции Z является минимальным.

Z_{min}= -11; x_{min} =(5/2;3/2;0;0)

Замечание. Если при решении задачи симплекс методом с искусственным базисом получается, что задача не имеет решения, так как целевая функция неограничена снизу при наличии искусственных векторов в базисе, то исходная ЗЛП не имеет решения, так как система ограничений противоречива.

Тема 6: Двойственность в линейном программировании.

6.1. Построение двойственных задач.

С каждой задачей линейного программирования связана двойственная задача. Рассмотрим построение двойственной задачи и её экономический смысл на следующем примере.

Исходная задача.

Предприятие выпускает **n** видов изделий с использованием **m** видов ресурсов. Удельные затраты ресурсов на производство единицы изделия известны и обозначаются a_{ij}, $j = \overline{1,n}\,; i = \overline{1,m}$. Заданы так же ограничения по количественному использованию ресурсов (A_i), и стоимость единицы изделий (C_j).

Найти план производства продукции, обеспечивающий её максимальное производство в стоимостном выражении.

Введём неизвестные переменные:

x_j – количество выпускаемых изделий j-го вида.

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \longrightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le A_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

<u>Двойственная задача:</u>

Предположим, что предпритие решило продать имеющиеся ресурсы, т. е. прекратить производство изделий. В этом случае необходимо установить размер стоимости единицы ресурсов, исходя из некоторых соображений. С одной стороны покупатель стремится приобрести ресурсы по более низким ценам. С другой стороны предприятие должно получить доход от продажи ресурсов не менее того, который оно имело при производстве изделий.

Введём неизвестные переменные.

y_i- стоимость единицы ресурсов i-го вида $i = \overline{1,m}$.

$$F = A_1 y_1 + A_2y_2 + \ldots + A_my_m \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{nm}y_m \ge c_n \end{cases}$$

$$y_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Исходная и двойственная задачи называются парой двойственных задач, и порой неважно какая из задач является исходной, а какая двойственной.

<u>Правила построения двойственных задач.</u>

1) Количество переменных двойственной задачи равняется количеству ограничений исходной задачи.

2) Коэффициентами при переменных в целевой функции F двойственной задачи являются правые части ограничений исходной задачи.

3) Если в исходной задаче требуется определить минимальное значение целевой функции Z, то в двойственной задаче требуется определить максимальное значение целевой функции F и наоборот.

4) Матрицей коэффициентов при переменных в ограничениях двойственной задачи является транспонированная матрица коэффициентов при переменных в ограничениях исходной задачи.

5) Правыми частями ограничений двойственной задачи являются коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи.

6) Определение типов ограничения двойственной задачи.

Определение 1. Если целевая функция задачи на минимум, то неравенства типа «больше или равно» называются *«правильными»,* а неравенства типа «меньше или равно» называются *«неправильными».* Если целевая функция задачи на максимум, то неравенства типа «меньше или равно» называются *«правильными»,* а неравенства типа «больше или равно» называются *«неправильными».*

Определение 2. Если на некоторую переменную накладываются ограничения «больше или равно» нулю , то такая переменная называется *«правильной»*, если «меньше или равно» то *«неправильной».*

Типы ограничения двойственной задачи определяются исходя из значений соответствующих переменных исходной задачи.

Если переменная x_j исходной задачи является «правильной», то j-е ограничение двойственной задачи так же является «правильным» относительно своей целевой функции.

Если x_j – «неправильная», то j-е ограничение так же будет «неправильным» относительно своей целевой функции.

Если переменная x_j исходной задачи может принимать любые значения, то j-е ограничение двойственной задачи будет уравнением.

7) Определение значений переменных двойственной задачи. Значения двойственных переменных определяются исходя из типов соответствующих ограничений исходной задачи:

Если i-е ограничение исходной задачи является «правильным» неравенством относительно своей целевой функции, то переменная y_i будет так же «правильной» переменной.

Если i-е ограничение исходной задачи является «неправильным» неравенством относительно своей целевой функции, то переменная y_i будет так же «неправильной» переменной.

Если i-е ограничение исходной задачи задано в виде уравнения, то переменная y_i может принимать любые значения.

<u>Пример:</u> Для следующей задачи линейного программирования построить двойственную задачу.

$$Z = -3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{ll} -x_1 + 2x_3 - x_4 \le -5 & y_1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 3 & y_2 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 \ge 8 & y_3 \\ x_1 \le 0,\ x_3 \ge 0. & \end{array}$$

Используя вышеприведённые правила, построим двойственную задачу.

$$F = -5y_1 + 3y_2 + 8y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{l} -y_1 + 2y_2 \le -3 \\ -y_2 + 2y_3 = 1 \\ 2y_1 - y_3 \ge -1 \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \ge 0, y_3 \le 0. \end{array}$$

6.2. Нахождение оптимального решения двойственной задачи.

Если найдено оптимальное решение одной из пары двойственных задач, то автоматически можно получить оптимальное решение другой задачи. Имеются несколько теорем двойственности, которые позволяют это сделать.

Первая теорема двойственности:

Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая задача так же имеет своё оптимальное решение, причём $Z_{max} = F_{min}$ ($Z_{min} = F_{max}$)

Если целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена на ОДЗ, то другая задача не имеет решения, так как система ограничений противоречива.

Если одна из пары двойственных задач не имеет решения, так как система ограничений противоречива, то другая задача не имеет решения либо из-за неограниченности целевой функции, либо её система ограничений противоречива.

Согласно условиям теоремы, можно найти оптимальное решение двойственной задачи или установить её неразрешимость.

Рассмотрим, как найти оптимальные значения двойственных переменных. Оптимальный план исходной ЗЛП можно найти с помощью формулы:

$X^*=D^{-1}A_0$

Матрица D^{-1} состоит из компонент-векторов, которые входят в последний базис, при котором получен оптимальный план исходной задачи.

Так как матрица коэффициентов при переменных в ограничениях двойственной задачи получается транспонированием матрицы коэффициентов исходной задачи, то оптимальное решение двойственной ЗЛП имеет вид:

$Y^*=C_б{}^*D^{-1}$

При решении задач необязательно пользоваться этой формулой. Значение двойственных переменных определяются с помощью индексной строки последней симплексной таблицы.

Обратную матрицу не находят, если в исходной задаче имеется полный единичный базис. Чтобы найти y_1, необходимо с помощью первого уравнения первой симплексной таблице определить столбец, в котором находится базисная переменная этого уравнения.

Оптимальное значение y_1 вычисляется следующим образом: к числу, которое находится на пересечении найденного столбца и индексной строки последней симплекс-таблице прибавляется число, которое находится на пересечении этого же столбца и строки коэффициентов при переменных целевой функции.

Аналогично, чтобы найти y_2 необходимо в соответствующем столбце взять число, которое находится в индексной строке последней симплекс таблицы и к нему прибавить число, которое стоит в этом же столбце и строке коэффициентов при переменных целевой функции. Таким образом, находятся оптимальные значения всех двойственных переменных. Оптимальное значение целевой функции двойственной задачи, согласно первой теореме двойственности, совпадает с оптимальным значением целевой функции исходной задачи и выписывается из первой клетки индексной строки последней симплексной таблице.

Пример. Для следующей задачи линейного программирования построить двойственную задачу и, решив одну из задач, записать оптимальные решения для обеих задач.

$$Z = 5x_1 - 7x_2 - x_3 \rightarrow \max$$
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &\le 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\ge 1 \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,3} \end{aligned}$$

Запишем двойственную задачу:

$$F = 2y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + y_3 &\ge 5 \\ -y_1 - 2y_2 + y_3 &\ge -7 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 &\ge -1 \\ y_1 \ge 0,\ y_3 &\le 0 \end{aligned}$$

Приведём исходную задачу к канонической форме с целевой функцией на максимум. Это делается для того, чтобы стандартно определить оптимальное решение двойственной задачи.

$$Z = 5x_1 - 7x_2 - x_3 \rightarrow \max$$
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 &= 1 \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

Задача не имеет исходного опорного плана, поэтому решим её с помощью симплекс-метода с искусственным базисом.

$$Z = 5x_1 - 7x_2 - x_3 - Mx_6 - Mx_7 \rightarrow \max$$
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_6 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 &= 1 \\ x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,7}. \end{aligned}$$

Б	$C_Б$	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
			5	-7	-1	0	0	-M	-M
A_4	0	2	2	-1	**-1**	1	0	0	0
A_6	-M	1	1	-2	**1**	0	0	1	0
A_7	**-M**	**1**	**1**	**1**	**2**	**0**	**-1**	**0**	**1**
z_j-c_j		0	-5	7	**1**	0	0	0	0
M		-2	-2	1	**-3**	0	1	0	0
A_4	**0**	**5/2**	**5/2**	**-1/2**	**0**	**1**	**-1/2**	**0**	**½**
A_6	-M	1/2	½	-5/2	0	0	½	1	-1/2
A_3	-1	½	½	½	1	0	-1/2	0	½
z_j-c_j		-½	**-11/2**	13/2	0	0	1/2	0	-1/2
M		-½	**-1/2**	5/2	0	0	-1/2	0	3/2
A_1	5	1	1	-1/5	0	2/5	**-1/5**	0	1/5
A_6	**-M**	**0**	**0**	**-12/5**	**0**	**-1/5**	**3/5**	**1**	**-3/5**
A_3	-1	0	0	3/5	1	-1/5	**-2/5**	0	2/5
z_j-c_j		5	0	27/5	0	11/5	**-3/5**	0	3/5
M		0	0	12/5	0	1/5	**-3/5**	0	8/5
A_1	5	1	1	-1	0	1/3	0	1/3	0
A_5	0	0	0	-4	0	-1/3	1	5/3	-1
A_3	-1	0	0	-1	1	-1/3	0	2/3	0
z_j-c_j		5	0	3	0	2	0	1	0
M		0	0	0	0	0	0	1	1

Оптимальное решение исходной задачи: X_{max}=(1;0;0) Z_{max}=5;

Определим оптимальное значение переменной y_1. В первом уравнении исходной таблицы базисным вектором является вектор A_4. На пересечении столбца A_4 и индексной строки последней таблицы находится 2. К 2 прибавляем коэффициент при переменной x_4 целевой функции 0. Итак, y_1=2+0=0.

Аналогично определяем оптимальные значения y_2 и y_3:

y_2=1+M+(-M)=1 y_3=0+M+(-M)=0

Оптимальное решение двойственной задачи: Y_{min}=(2;1;0) F_{min}=5.

Отметим, что при выводе из базиса искусственного вектора на некотором этапе, соответствующие столбцы необходимо рассчитывать и в последующих таблицах, т. к. без такого расчета будет невозможно определить оптимальные значения двойственных переменных.

Тема 7: Решение задач транспортного типа.

7.1. Задачи линейного программирования транспортного типа.

Многие экономические задачи сводятся к задачам транспортного типа, которые являются задачами линейного программирования и могут быть решены симплекс методом. Однако количество переменных и ограничений транспортной задачи является большими величинами, с другой стороны – ограничения транспортной ЗЛП являются простыми (коэффициенты при переменных равны 1). Поэтому для решения таких задач разработаны более простые точные методы решения.

Типы транспортных задач.

Имеются **m** поставщиков однородной продукции с известными запасами продукции и **n** потребителей этой продукции с заданными объёмами потребностей. Известны так же удельные затраты на перевозку.

Если сумма объёмов запасов продукции равна объёму потребностей всех потребителей, то такая задача называется *закрытой транспортной задачей* (т. е. если $\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$), в противном случае транспортная задача называется *открытой*. Для решения транспортной задачи необходимо, чтобы она была закрытой.

Открытую транспортную задачу можно преобразовать к закрытой следующим образом.

Пусть $\sum_{i=1}^{m} A_i > \sum_{j=1}^{n} B_j$. В этом случае необходимо ввести фиктивного n+1 потребителя с объёмом потребностей $\sum_{i=1}^{m} A_i - \sum_{j=1}^{n} B_j$. Удельные затраты на перевозку от поставщиков к фиктивному потребителю полагаются равными 0, так как на самом деле такие перевозки осуществляться не будут и некоторая часть продукции останется у поставщиков.

Пусть $\sum_{j=1}^{n} B_j > \sum_{i=1}^{m} A_i$. В этом случае необходимо ввести фиктивного m+1 поставщика с объёмом запасов $\sum_{j=1}^{n} B_j - \sum_{i=1}^{m} A_i$. Удельные затраты на перевозку от фиктивного поставщика к потребителям полагаются равными 0, так как на самом деле такие перевозки осуществляться не будут и некоторую часть продукции потребители недополучат.

В закрытой транспортной задаче все ограничения записываются в виде уравнений:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

$$I. \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i; \quad i = \overline{1,m}$$

$$II. \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j; \quad j = \overline{1,n}$$

$$III. x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$$

Теорема 1. Закрытая транспортная задача всегда имеет решение.

Теорема 2. Если объёмы запасов продукции и объёмы потребностей является целыми числами, то и решение транспортной задачи также будет целочисленным.

7.2. Методы построения исходного распределения транспортных задач.

При решении задач симплекс методом необходимо наличие исходного опорного плана. Решение транспортной задачи так же начинается с построения исходного опорного плана, который в транспортной задаче называется *исходным распределением*.

Определим, какое количество базисных переменных должно быть в опорном плане. Так как ограничения транспортной задачи содержат **n+m** уравнений, то количество базисных переменных должно быть **n+m**, если все уравнения являются линейно независимыми. Однако в транспортной задаче эти уравнения линейно зависимы. Чтобы показать это, найдём сумму всех ограничений (I) и сумму всех ограничений (II).

В каждом полученном уравнении мы будем иметь в левой части сумму всех неизвестных переменных **x**, а в правой части в одном из уравнений $\sum_{i=1}^{m} A_i$, а в другом $\sum_{j=1}^{n} B_j$. Но так как задача закрытая, то эти суммы равны, то есть мы получили два одинаковых уравнения (линейно зависимых). Удалив одно любое ограничение, мы получим систему из **m+n-1** линейно независимых уравнений. Таким образом, количество переменных в опорном плане должно быть **m+n-1**.

<u>Задача.</u> Имеются три поставщика и четыре потребителя однородной продукции. В следующей таблице заданы объёмы запасов, объёмы потребностей и удельные затраты на перевозку продукции.

Найти такие объёмы перевозки, при которых общие затраты на перевозку будут минимальными.

A_i \ B_j	70	30	80	60
100	8	2	0	1
80	3	4	2	3
120	1	4	1	2

Проверяем тип транспортной задачи. Определяем объём запасов всех поставщиков (100+80+120=300) и объём потребностей всех потребителей (70+30+80+60=240). Запасы продукции больше, чем потребности в ней на 300-240=60 единиц. Для того, чтобы преобразовать эту задачу в закрытую, необходимо ввести фиктивного пятого потребителя с объёмом потребностей 60 единиц. Удельные затраты на перевозку продукции от поставщиков к фиктивному потребителю полагаем равными 0.

B_j / A_i	70	30	80	60	60
100	8	2	0	1	0
80	3	4	2	3	0
120	1	4	1	2	0

Существуют несколько методов построения исходного распределения транспортных задач. Рассмотрим два таких метода.

Метод северо-западного угла. При построении исходного распределения с помощью данного метода, из оставшихся клеток выбирается левая верхняя клетка (северо-западная). На первом этапе выбирается клетка (1,1). В эту клетку записывается объём поставки x_{11}= min $\{A_1,B_1\}$. Величины A_1 и B_1 уменьшаются на данную величину. Ту строку или столбец, где будет получен 0, удаляют из рассмотрения. Затем из оставшихся клеток, рассматривают левую верхнюю клетку и поступают аналогично. Продолжая данный процесс, мы заполним клетку (m,n), причем удалим из рассмотрения и строку и столбец. Если в процессе заполнения клеток придётся вычеркнуть и строку, и столбец, то мы получим вырожденное распределение (количество занятых клеток меньше, чем **m+n-1**). Чтобы этого не произошло, из рассмотрения что-то одно: или строку, или столбец, а оставшийся столбец или строку считают с нулевой потребностью или запасами. Вычислим значение целевой функции для построенного исходного распределения : Z=8*70+2*30++2*80+2*60=900.

B_j / A_i	70	30	80	60	60
100	8 **70**	2 **30**	0 **0**	1	0
80	3	4	2 **80**	3 **0**	0
120	1	4	1	2 **60**	0 **60**

Метод минимального элемента. Метод северо-западного угла при заполнении клеток абсолютно не учитывает удельные затраты на перевозку, поэтому значение целевой функции может быть далёким от оптимального и, возможно, понадобится большее количество шагов для его нахождения. Метод минимального элемента наоборот учитывает удельные затраты, поэтому как правило значение целевой функции находится ближе к оптимальному решению. Метод минимального элемента отличается от предыдущего метода тем, что из оставшихся клеток выбирается клетка, имеющая наименьшие удельные затраты.

B_j \ A_i	70	30	80	60	60
100	8	2	0 **80**	1	0 **20**
80	3	4 **30**	2	3 **10**	0 **40**
120	1 **70**	4	1	2 **50**	0

Вычислим значение целевой функции при построенном исходном распределении: Z= 4*30+3*10+1*70+2*50=320. Значение целевой функции при исходном распределении, построенным методом минимального элемента (320) значительно меньше, чем значение целевой функции при исходном распределении, построенным методом северо-западного угла (900).

7.3. Метод потенциалов решения транспортной задачи.

После построения исходного распределения необходимо определить является ли данное распределение оптимальным, и если нет, перейти к другому «лучшему» распределению. Продолжая данный процесс, найдём оптимальное решение транспортной задачи. Для этих целей используется метод потенциалов, который основан на следующей теореме:

Теорема. Если для некоторого распределения транспортной задачи выполняются условия:

а). $u_i+v_j = c_{ij}$ для занятых клеток *б)* $u_i+v_j \le c_{ij}$, для свободных клеток,

то данное распределение является оптимальным.

Величины u_i называют потенциалами строк, а величины v_j называют потенциалами столбцов.

Алгоритм решения транспортной задачи.

1) Проверяется тип транспортной задачи. Если транспортная задача открытая, то её необходимо преобразовать к закрытому типу.

2) Любым из известных методов необходимо построить исходное распределение транспортной задачи.

3) Нахождение значений потенциалов строк и столбцов.

Количество уравнений, удовлетворяющих условию а) теоремы равняется **m+n-1** (т. к. распределение должно быть невырожденным), а количество неизвестных u_i, v_j равняется **m+n**. Таким образом, количество переменных больше количества уравнений. Решение такой системы линейных уравнений является неопределённым, поэтому одному из потенциалов нужно присвоить любое значение. По традиции $u_1=0$. Получается система из **m+n** уравнений с **m+n** переменными. Эту систему можно решить любым методом и получить определённое решение. На практике значения потенциалов вычисляется ещё проще: рассматриваются заполненные клетки, для которых один из потенциалов известен, и для них вычисляются значения неизвестных потенциалов.

A_i \ B_j	70	30	80	60	60	
100	8 -6	2 2	0 **80**	1 2	0 **20**	$u_1=0$
80	3 -1	4 **30**	2 -2	3 **10**	0 **40**	$u_2=0$
120	1 **70**	4 -1	1 -2	2 **50**	0 -1	$u_3=-1$
	$v_1=2$	$v_2=4$	$v_3=0$	$v_4=3$	$v_5=0$	

4) Вычисление оценок для свободных клеток:

Исходя из соотношения б) теоремы можно записать следующую формулу для вычисления оценок: $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Для того, чтобы оценки не перепутать с объёмами перевозок, они (оценки) заключаются в круги.

5) Проверка распределения на оптимальность. Если оценки всех свободных клеток меньше или равны 0, то данное распределение является оптимальным. Необходимо вычислить оптимальное значение Z и выписать оптимальный объём перевозок в виде матрицы. Если распределение не является оптимальным, то переходим к пункту 6.

6) Построение цикла пересчёта. В качестве исходной клетки выбирается клетка с наибольшей положительной оценкой. Эта клетка помечается знаком «+», то есть в неё необходимо записать некоторый объём поставки. Но тогда нарушится баланс по данному столбцу, следовательно, одну из занятых клеток данного столбца необходимо пометить знаком «-», то есть уменьшить объём поставки на такую же величину. Но тогда изменится баланс по данной строке, следовательно, какую-то занятую клетку данной строки необходимо пометить знаком «+». Данный процесс продолжается до тех пор, пока не поставлен знак «-» в строке, где находилась исходная клетка.

Теорема. Для любой свободной клетки существует цикл пересчёта и притом единственный.

7) Определение объёма перемещаемой продукции. При определении объёма продукции, перемещаемого по циклу пересчёта, мы должны исходить из следующих двух соображений:

а) после преобразования в клетках таблицы не должны получиться отрицательные числа;

б) одна из занятых клеток должна стать свободной.

Для того, чтобы эти условия выполнялись, необходимо объём перемещаемой продукции выбрать следующим: $\theta = \min \{x_{ij}\}^{-}$, где $\{x_{ij}\}^{-}$ – объёмы перевозок из клеток цикла пересчёта, помеченных знаком «-».

$\theta = \min\{20;30\}=20$

8) Построение новой таблицы.

К значениям клеток, помеченных знаком «+»прибавляется θ. От значений клеток, помеченных знаком «-», вычитается θ. Значение поставок остальных клеток переписывается без изменений. Переходим на выполнение пункта 3.

A_i \ B_j	70	30	80	60	60	
100	8 -8	2 **20**	0 **80**	1 0	0 -2	u_1=0
80	3 -1	4 **10**	2 0	3 **10**	0 **60**	u_2=2
120	1 **70**	4 -1	1 0	2 **50**	0 -1	u_3=1
	v_1=0	v_2=2	v_3=0	v_4=3	v_5=-2	

Для того, чтобы вычислить значение целевой функции, достаточно воспользоваться формулой: Z_1=Z_0-θ $б_{ij}$, Z_1 = 320-2*20=280

Поскольку в последней таблице нет положительных оценок, то данное распределение является оптимальным: Z_{min} =280

$$x_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 10 \\ 70 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Данное распределение является оптимальным, но не единственным, т. к. имеются нулевые оценки. Так как пятый потребитель является фиктивным, то соответствующий столбец в оптимальной матрице перевозок можно не записывать. Для нашего примера фиктивный объём перевозок (x_{25}=60), показывает, что 60 единиц продукции останутся невостребованными у второго поставщика.

Иногда бывают транспортные задачи с целевой функцией на max. Такие задачи решаются аналогично, за исключением того, что распределение будет оптимальным в том случае, когда оценки всех свободных клеток будут больше или равны нулю.

Тема 8: Применение метода динамического программирования для решения экономических задач

8.1. Общие сведения. Постановка задачи

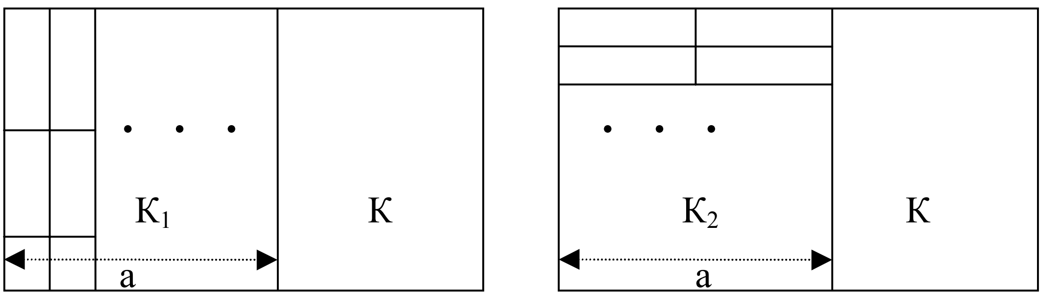
Решение многих экономических задач может быть разбито на конечное число этапов. Такие задачи могут быть решены методом динамического программирования.

Основной принцип метода динамического программирования сформулирован Беллманом: каково бы не было решение задачи на некоторых этапах, на последующих этапах должно быть использовано оптимальное решение относительно данного этапа.

Суть этого принципа поясним на следующем примере. Пусть исходный материал поступает на раскрой в виде листов прямоугольной формы заданного размера. Требуется провести раскрой данного исходного материала на заготовки прямоугольной формы таким образом, чтобы получить их максимальное количество.

Предположим, что на некотором этапе решения задачи получены два варианта раскроя:

Вариант 1 Вариант 2



Пусть по первому варианту раскроена определенная часть листа и получено $\mathbf{K_1}$ заготовок**.** По второму варианту раскроена та же часть листа (того же размера а) и получено $\mathbf{K_2}$заготовок**.** Предположим, что $\mathbf{K_1 < K_2}$**.** Так как по первому и второму варианту остаток листа одинакового размера, то при оптимальном раскрое (любым методом, например, методом полного перебора) этой части листа получается одно и то же количество заготовок равное **К.** Тогда общее количество заготовок, полученное по первому и второму вариантам, можно оценить следующим соотношением: $\mathbf{K_1 + K < K_2 + K}$.

Таким образом, так как задача с целевой функцией на максимум, второй вариант, возможно, будет оптимальным решением раскроя всего листа, а первый вариант можно в дальнейшем не рассматривать. Это позволяет сократить количество рассматриваемых вариантов решений.

Методом динамическою программирования могут быть решены следующие задачи.

Задача 1. Пусть в распоряжении предприятия имеется некоторый объем денежных средств **V**. Предприятие имеет **n** подразделений. При выделении некоторого объёма денежных средств одному из подразделений, предприятие в целом получает некоторую прибыль. Зависимость прибыли от выделенной суммы, как правило, является нелинейной. Поэтому она задается в виде таблицы.

Ставится задача распределить указанный объем денежных средств между **n** подразделениями таким образом, чтобы предприятие в целом получило максимальную прибыль.

Задача 2. Потребность региона (района, города) в некотором продукте может быть удовлетворена путем строительства или реконструкции цехов (заводов, предприятий). Для реконструкции цеха по выпуску определенного количества продукции необходимы некоторые капитальные вложения. Зависимость объёма выпускаемой продукции от капитальных вложений являются нелинейными и задаётся в виде таблицы.

Ставится задача: провести реконструкцию или строительство цехов таким образом, чтобы потребность в продукте была удовлетворена, а затраты на реконструкцию или строительство были минимальными.

8.2. Задача оптимального распределения денежных средств между подразделениями

Решение данной задачи можно разбить на ряд этапов. Например, на первом этане рассматривают выделение денежных средств первому подразделению. На втором этапе - распределение денежных средин между двумя подразделениями и так далее. То есть, номер этапа совпадает с количеством подразделений, между которыми производится распределение денежных средств.

На некотором **к**-ом этапе рассматривают распределение денежных средств между **к**-ым подразделением и первыми **к-1** подразделениями. Лучшие варианты распределения между **к-1** подразделениями выбираются из результатов выполнения предыдущего **(к-1)**-го этапа.

Рассматриваются такие варианты распределения, которые имеют одинаковую сумму распределяемых денежных средств. И среди таких вариантов выбирается вариант с наибольшей прибылью (или с наименьшими затратами для задачи 2). Остальные варианты, согласно принципа оптимальности Беллмана, на последующих этапах не рассматриваются

Таким образом, рассматриваются все **n** этапов. На последнем этапе выбирается оптимальное решение (или решения).

Алгоритм решения задачи 1

1. На первом этапе рассматриваются все варианты выделения денежных средств первому подразделению.

2. На втором этапе производится распределение денежных средств между первыми двумя подразделениями. Для этих целей строится таблица, столбцами в которой являются выделение денежных средств первому подразделению, а строками таблицы - выделение денежных средств второму подразделению.

В клетку на пересечении строки и столбца записываются две величины: сумма выделяемых объемов денежные средств первому и второму подразделению и сумма получаемой при этом прибыли.

В таблице заполняются только те клетки, в которых общая сумма выделенных средств не превышает величину **V.** После заполнения таблицы все множество клеток разбивается на подмножества с одинаковыми объемами выделенных средств. В каждом подмножестве помечаются звездочкой (*) те клетки, которые имеют наибольшую общую прибыль.

3. На третьем этапе производится распределение денежных средств между первыми двумя подразделениями и третьим. Заполняется таблица, столбцами которой являются лучшие варианты со второго этапа. Они помечены звёздочками и являются лучшими вариантами распределения денежных средств между первыми двумя подразделениями. Строками таблицы являются варианты выделения денежных средств третьему подразделению. Эти данные выбираются из исходной таблицы.

Клетки заполняются и помечаются аналогично второму этапу.

Таким образом, выполняются все последующие этапы до **n**-го этапа.

n. На этапе **n** производится распределение денежных средств между первыми **n-1** подразделениями и **n**-ым подразделением. Строится таблица из лучших вариантов **(n-1)**-го этап и вариантов выделения денежных средств подразделению **n.** Так как данный этап последний, то достаточно распределить объем денежных средств равный **V**, то есть, заполняются только те клетки, суммарный объем выделенных средств в которых равен **V**.

Выбирается клетка с наибольшей общей прибылью. Это значение и будет оптимальным значением критерия задачи, т. е. максимумом полученной прибыли. Из последней таблицы определяется оптимальный объём выделения денежных средств подразделению **n**.

Последовательно переходя к предыдущим таблицам, определяют оптимальные значения переменных, то есть объемы денежных средств, выделенных каждому подразделению.

Замечание 1. При заполнении шапки столбцов таблицы последнего этапа необязательно выписывать все лучшие варианты из предыдущей таблицы, т. к. заполняться будут только клетки с выделяемыми объёмами **V**. Достаточно выписать только варианты с объемами выделяемых средств не меньше разности общего объёма **V** и наибольшего выделяемого объема последнему подразделению. Например, если **V=90** денежных единиц, а наибольший выделяемый объем последнему подразделению равен 40, то в шапку последней таблицы достаточно записать данные из предпоследней таблицы с объёмами выделяемых средств не меньше 50 (90-40=50).

Замечание 2. Если при записи ответа при переходе от таблицы к таблице, выбирается клетка в шапке столбцов, то это означает, что соответствующему подразделению денежные средства не выделяются. Если выбирается клетка в шапке строк, то это означает, что все оставшиеся денежные средства выделяются данному подразделению.

Рассмотрим применение данного алгоритма для решения следующей задачи.

Задача

Требуется распределить 80 тыс. грн. между четырьмя подразделениями предприятия таким образом, чтобы предприятие в целом получило наибольшую прибыль. Зависимость получаемой прибыли от выделенных денежных средств, приведена в следующей таблице

Выделяемые объёмы / Подразделения	10	20	30	40	50
1	12	28	32	42	58
2	15	26	34	41	52
3	11	23	-	45	56
4	16	25	33	41	53

Решение задачи

1 этап. Из исходной таблицы выписываем данные по первому подразделению:

Выделяемые объёмы / Подразделения	10	20	30	40	50
1	12	28	32	42	58

2 этап. Строится таблица распределения денежных средств между первыми двумя подразделениями. В шапку столбцов записываются данные по первому подразделению, а в шапку строк - по второму. В качестве данных в каждую клетку шапок записываются выделяемые объёмы и через тире - получаемую при этом прибыль (эти данные выбираются из исходной таблицы). Остальные клетки таблицы заполняются суммированием соответствующих значений шапок строк и столбцов. Затем всё множество клеток, включая и клетки шапок, разбиваем на подмножества с одинаковыми объёмами выделяемых денежных средств. В каждом подмножестве помечаем символом “*” клетки, имеющие максимальную прибыль. Например, в нашей таблице имеются три клетки с выделяемым объёмом денежных средст 20 тыс. грн. однако звездочкой пометим клетку в шапке столбцов, т, к. она имеет наибольшее значение прибыли – 28.

1 / 2	10-12	20-28*	30-32	40-42	50-58
10–15*	20–27	30-43*	40-47	50-57	60–73*
20–26	30-38	40-54*	50-58	60-68	70–84*
30-34	40-46	50-62*	60-66	70-76	80–92*
40-41	50-53	60-69	70-73	80–83	
50-52	60-64	70-80	80-84		

3 этап. Строим таблицу распределения денежных, средств между первыми двумя подразделениями и третьим. В шапку столбцов записываем значение клеток помеченных звёздочками в предыдущей таблице. В шапку строк - данные по третьему подразделению из исходной таблицы. Остальные действия на третьем этапе аналогично предыдущему этапу.

1+2 / 3	10-15	20-28*	30-43*	40-54*	50-62	60-73	70-78	80–92
10–11	20–26	30-39	40-54*	50-65	60–73	70–84	80–95	
20–23	30-38	40-51	50-66*	60-77*	70–85	80-96		
40-45	50-60	60-73	70-88*	80–99*				
50-56	60-71	70-84	80-99					

4 этап. Данный этап является последним, поэтому из предыдущей таблицы выписываем клетки помеченные звёздочками с объёмами выделяемых средств не менее 30 (80 – 50 = 30, см. замечание к алгоритму 1). Во внутренней части таблицы заполняем только клетки с объемами выделяемых средств равными 80 тыс. грн.

1+2+3 / 4	30-43	40-54	50-66	60-77	70-88	80–99
10–16					80–104*	
20–25				80-102		
30-33			80-99			
40-41		80–95				
50-53	80-96					

Получаем следующее решение задачи:

При выделении 80 тыс. грн. четырём подразделениям, предприятие в целом получает максимальную прибыль в размере 104 тыс. грн.

Найдём оптимальные объёмы выделяемых денежных средств каждому подразделению. Из последней таблицы следует, что четвёртому подразделению необходимо выделить 10 тыс. грн. (выбранной клетки соответствует первая строка, поэтому эту величину выбираем из шапки первой строки), при этом оно принесёт прибыль предприятию в целом в 16 тыс. грн. В предыдущей таблице находим клетку с оставшимся объемом выделяемых денежных средств - 70 тыс. грн. Тогда третьему подразделению необходимо выделить 40 тыс. грн. (выбранной клетке соответствует третья строка, поэтому эту величину выбираем из шапки третьей строки). Так переходя от таблицы к таблице, определяем оптимальные объёмы выделяемых денежных средств для всех подразделений**.**

Итак, P_{max} = 104 тыс. грн.

Подразделение	Выделяемый объём (тыс. грн.)	Получаемая прибыль (тыс. грн.)
4	10	16
3	40	45
2	10	15
1	20	28
Итого	80	104

Тема 9. Основы сетевого планирования и управления (СПУ)

9.1. Основные понятия и определения

Сетевое планирование и управление (СПУ) предназначено для логического отображения взаимосвязей между работами (операциями) при исследовании работы изучаемого объекта. Основой сетевого планирования и управления является сетевой график.

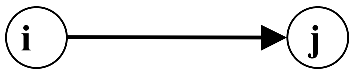
Сетевой график представляет собой множество вершин, связанных между собой стрелками (дугами). Вершины сетевого графика моделируют события, а стрелки - операции или работы.

События сетевых графиков бывают следующих типов:

- исходное. Это такое событие, которому не предшествует ни одна операция;
- завершающие. Это такое событие, за которым не следует ни одна операция:
- остальные события называются промежуточными.

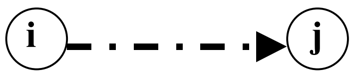
Операции или работы определяются своими начальным и конечным событиями и обозначаются **(i,j).** Они бывают следующих типов:

1. **Действительные**. Такие операции на сетевом графике обозначается сплошной стрелкой :



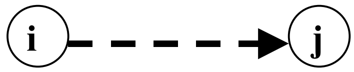
Для выполнения таких операций необходимы как временные, так и материальные ресурсы.

2. **Операции ожидания**. На сетевом графике они обозначается штрих пунктирной стрелкой:



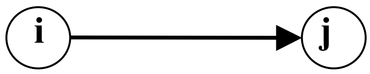
Для выполнения такой операции необходимы только временные ресурсы. Например, пока бетон не застыл, нельзя выполнять следующую работу. Поэтому такую работу можно отобразить операцией ожидания с необходимым временем ее выполнения.

3. **Фиктивная операция**. На сетевом графике такие операции обозначается пунктирной стрелкой:



Для выполнения фиктивных операций не требуются ни временные, ни материальные ресурсы. Фиктивные операции служат только для отображения логических взаимосвязей между отдельными операциями.

Любая операция представляется в виде начального и конечного событий и, если это не фиктивная операция**,** то для неё задаются временные ресурсы, то есть, такой промежуток времени**,** который необходим для выполнения данной операции. Он называется продолжительностью выполнения операции:



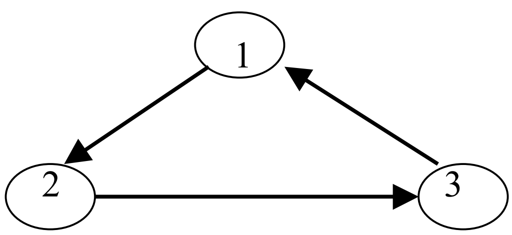
Здесь: **i**- начальное событие, **j**- конечное событие, $\mathbf{t_{ij}}$ **-**продолжительность выполнения операции.

В том случае, когда материальных ресурсов достаточно для её выполнения за промежуток $\mathbf{t_{ij}}$, можно действительную операцию изображать без указания необходимых материальных ресурсов.

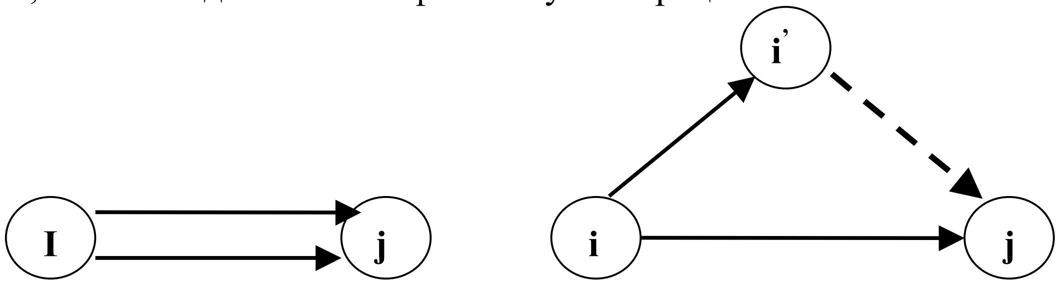
9.2. Правила построения сетевых графинов

Сетевые графики изображаются с соблюдением следующих правил:

1. Все стрелки (дуги) на сетевом графике должны быть направлены слева направо (допускается сверху вниз и снизу вверх).
2. Сетевой график не должен содержать избыточных пересечений стрелок (дуг).
3. Сетевой график не должен содержать контуров. Контур - это такая последовательность соседних дуг (стрелок), у которой конечное событие последней дуги совпадает с начальным событием первой дуги. Например:



4. На сетевом графике каждая операция должна однозначно определяться своим начальным и конечным событием, т. е. любая пара событий должна быть связана только одной дугой. Если это условие нарушается, то необходимо ввести фиктивную операцию.



5. На сетевом графике не должно быть событий, кроме исходного, которым не предшествует ни одна дуга.
6. Не должно быть событий, кроме завершающего, за которым не следует ни одна дуга.

Основные правила функционирования сетевого графика

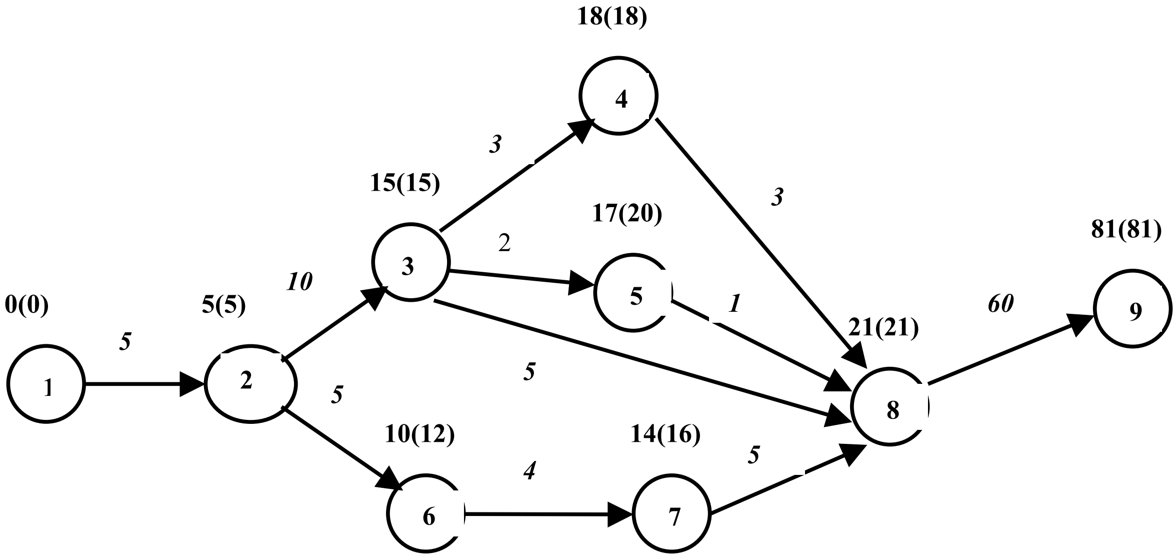
1. Каждое событие свершается мгновенно в тот момент, когда выполняются все операции непосредственно предшествующие ему.

2. Операция не может начать выполняться, пока не свершится ее начальное событие.

Рассмотрим пример построения сетевого графика. Используя названные работы, построить сетевой график реконструкции предприятия.

Операция	Функции, выполняемые операцией	Продолжительность (дни)
(1,2)	Определение объёма работ	5
(2,3)	Составление сметы	10
(2,6)	Выбор проекта реконструкции	5
(3,4)	Выбор подрядчика	3
(3,5)	Открытие счета в банке	2
(3,8)	Утверждение сметы вышестоящей организацией	5
(4,8)	Составление договора с подрядчиком	3
(5,8)	Сообщение заказчику об открытии счета в банке	1
(6,7)	Экономическое обоснование проекта	4
(7,8)	Привязка проекта к площади предприятия	5
(8,9)	Работы по реконструкции	60

Сетевой график для данных работ построен на следующем рисунке:



Полным путем в сетевом графике называется такая непрерывная последовательность соседних операций, для которой начальное событие первой операции является исходным событием сетевого графика, а конечное событие последней операции является завершающим событием этого графика.

Длительностью (продолжительностью) полного пути называется сумма продолжительности выполнения всех входящих в него операций.

9.3. Расчёт временных параметров сетевых графиков

Временные параметры сетевых графиков подразделяются на временные параметры событий и временные параметры операций (работ). Сетевой график, представленный на рисунке, будем использовать для иллюстрации вводимых параметров.

9.3.1. Временные параметры событий

Рассмотрим временные параметры событий.

1. Ожидаемый (ранний) срок свершения событий. Это такой срок свершения события, раньше которого событие свершиться не может в связи с правилом 1 функционирования сетевых графиков.

Ожидаемые сроки обозначаются $\mathbf{t_j}$ и записываются на сетевом графике над соответствующим событием. Начинают определять ожидаемые сроки с исходного события сетевого графика, ожидаемый срок которого полагают равным нулю. Ожидаемые сроки остальных событий определяют по следующей формуле:

$$t_j = \max_{\overset{>}{\{(i,\,j)\}}} \{t_i + t_{ij}\}$$

$>$

Здесь **{(i,j)}** есть множество операций непосредственно предшествующих событию **j**. Например, $\mathbf{t_3}$ = max {$\mathbf{t_2}$+$\mathbf{t_{23}}$} = max {5+10} = 15; $\mathbf{t_8}$ = max {18+3,17+1,15+5,14+5} =21

2. Критический путь и критическое время. Полный путь, имеющий наибольшую продолжительность, называется критическим ($\boldsymbol{\mu_{кр}}$), а продолжительность этого пути называется критическим временем сетевого графика ($\mathbf{T_{кр}}$).

Критическое время совпадает с ожидаемым сроком свершения завершающего события: $\mathbf{T_{кр} = t_{заверш.}}$ Для нашего примера: $\mathbf{T_{кр}}$=81 день.

Определение критического пути необходимо начинать с завершающего события. Оно будет последним в критическом пути. Предшествовать уже определённому событию в критическом пути будет то событие, на котором был определён максимум при вычислении ожидаемого срока свершения данного события. Записывая последовательно события в критический путь, достигаем исходного события сетевого графика. Для нашего примера: $\boldsymbol{\mu_{кр}}$ = (1-2-3-4-8-9).

3. Предельный (поздний) срок свершения события. Это такой срок свершения события, при увеличении которого увеличивается критическое время. Предельные сроки $\mathbf{(t_i^*)}$ записываются на сетевом графике над соответствующим событием в скобках.

Предельные сроки начинают рассчитывать с завершенного события, предельный срок свершения которого полагают равным ожидаемому сроку свершения данного события $\mathbf{t^*_{заверш.}} = \mathbf{t_{iзаверш.}}$ Предельные сроки свершения остальных событий необходимо вычислять по следующей формуле;

$$t_i^* = \min_{\overset{<}{\{(i,\,j)\}}} \{t_j^* - t_{ij}\}$$

$<$

Здесь **{(i,j)} -** множество дуг, начальным событием которых является событие **i**. Например: $\mathbf{t_3}^*$ = min {18-3;20-2;21-5} = 15.

9.3.2. Временные параметры операции

Данные параметры сетевого графика удобно записывать в виде таблицы. В таблице символом «*» отмечаются критические операции.

1. Раннее начало выполнения операции $(t_{ij}^{рн})$ это такой момент времени начала выполнения операции, раньше которого операция не может начать выполняться из-за того, что её начальное событие еще не свершилось. Данный параметр вычисляется по следующей формуле:

$$t_{ij}^{рн} = t_i$$

2. Позднее начало выполнения $(t_{ij}^{пн})$ операции**-** это такой предельный момент начала выполнения операции, при увеличении которого увеличивается критическое время. Данный параметр вычисляется по следующей формуле:

$$t_{ij}^{пн} = t_j^* - t_{ij}$$

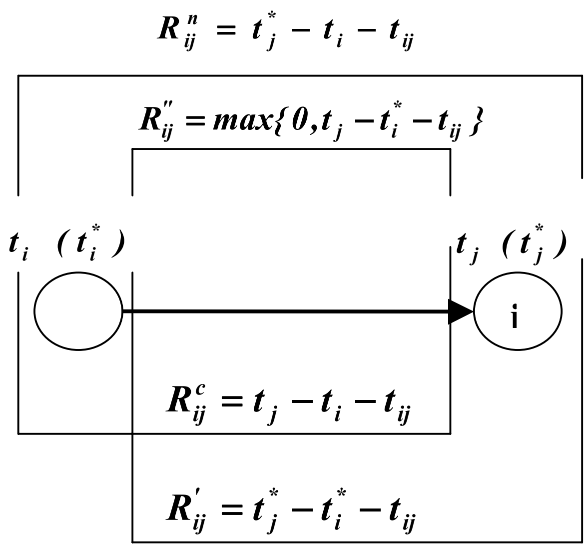
3. Раннее окончание выполнения операции $(t_{ij}^{ро})$ - это такой момент времени окончания выполнения операций, раньше которого операция не может закончить выполняться из-за того, что начальное событие данной операции еще не свершилось. Данный параметр вычисляется по следующей формуле:

$$t_{ij}^{ро} = t_i + t_{ij}$$

4. Позднее окончание выполнения операций $(t_{ij}^{по})$ - это такой предельный момент завершения выполнения операций, при увеличении которого увеличивается критическое время. Данный параметр вычисляется по следующей формуле:

$$t_{ij}^{по} = t_j^*$$

При определении резервов времени удобно пользоваться следующей схемой:



5. Полный резерв времени операции (R^n_{ij}) - это такой промежуток времени, на величину которого можно увеличить продолжительность выполнения операции или сдвинуть вправо по оси времени время начала ее выполнения при условии, что начальное событие данной операции свершится в ожидаемый срок, а конечное событие - в предельный срок.

$$R^n_{ij} = t^*_j - t_i - t_{ij}$$

6. Свободный резерв времени операций (R^c_{ij}) - это такой промежуток времени, на величину которого можно увеличить продолжительность выполнения операции или сдвинуть вправо по оси времени время начала ее выполнения при условии, что начальное и конечное события данной операции свершатся в ожидаемые сроки:

$$R^c_{ij} = t_j - t_i - t_{ij}$$

7. Частный резерв времени первою вида - (R'_{ij}) это такой промежуток времени, на величину которого можно увеличить продолжительность выполнения операции или сдвинуть вправо по оси времени время начала ее выполнения при условии, что начальное и конечное события данной операции свершаться в предельные сроки.

$$R'_{ij} = t^*_j - t^*_i - t_{ij}$$

8. Частный резерв времени второго вида (R''_{ij}) - это такой промежуток времени, на величину которого можно увеличить продолжительность выполнения операции или сдвинуть вправо по оси времени время начало ее выполнения при условии, что начальное событие свершится в предельный срок, а конечное событие данной операции в ожидаемый срок.

$$R''_{ij} = max\{\ 0, t_j - t^*_i - t_{ij}\ \}$$

В следующей таблице записаны все временные параметры для рассматриваемого примера:

Операции	$t_{ij}^{рн}$	$t_{ij}^{пн}$	$t_{ij}^{ро}$	$t_{ij}^{по}$	$R^{п}_{ij}$	R^{c}_{ij}	R'_{ij}	R'_{ij}
(1,2)*	0	0	5	5	0	0	0	0
(2,3)*	5	5	15	15	0	0	0	0
(2,6)	5	7	10	12	2	0	2	0
(3,4)*	15	15	18	18	0	0	0	0
(3,5)	15	18	17	20	3	0	3	0
(3,8)	15	16	20	21	1	1	1	1
(4,8)*	18	18	21	21	0	0	0	0
(5,8)	17	20	18	21	3	3	0	0
(6,7)	10	12	14	16	2	0	0	0
(7,8)*	14	16	19	21	2	2	0	0
(8,9)*	21	21	81	81	0	0	0	0

Приложение. Работа с обучающе-контролирующей программой «Счастливый случай»

Назначение и общее описание программы.

Программа предназначена для закрепления полученных студентами знаний и для контроля за уровнем этих знаний со стороны преподавателя по различным учебным курсам. Для использования программы для каждого курса необходимо создать файлы вопросов по разделам курса (k1, k2 и т. д.) и общий файл ko.

В игру могут играть одна или две команды. В каждой команде может быть от одного до четырёх игроков. Один сеанс игры состоит из нескольких геймов. В каждом гейме случайным образом задаются вопросы и варианты ответов на них из подключённых в данный момент разделов курса. Студент должен в течение заданного времени выбрать правильный ответ. Если ответ верный, то он получает 1 балл и программа переходит к следующему вопросу или к следующему гейму. Случайным образом с вероятностью 0,1 выпадает «счастливый случай», при этом при правилом ответе студент получает 2 балла. По завершении игры программа выставляет студенту оценку.

Установка программы.

Необходимо выполнить копирование папки «SS» с дискеты (a:) на логический диск (c:).

Подготовка к игре.

Игра проводится с вопросами разделов прочитанных студентам к настоящему времени. Для этого необходимо провести корректировку общего файла ko. Данный файл создаётся при разработке игры для нового курса. Например, для курса математического программирования:

```
ПОСТРОЕНИЕ МАТ. МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ (26)
26
ФОРМЫ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (43)
43
ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗЛП (59)
59
СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗЛП (60)
0
СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД С ИСКУССТВЕННЫМ БАЗИСОМ (47)
0
ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ (49)
0
ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (43)
0

0

0
```

В данном случае студентам были прочитаны первые три темы курса, поэтому соответствующее количество вопросов введены только для этих тем, а для остальных тем вместо количества вопросов введены нули.

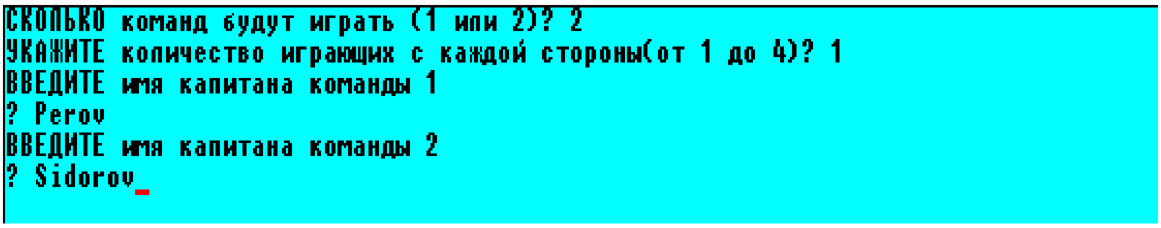
Корректировать файл ko можно с помощью текстового редактора Word. Данный файл открывается в редакторе с преобразованием «текст DOS». Затем проводится соответствующее редактирование файла и его сохранение в данном формате.

Проведение игры

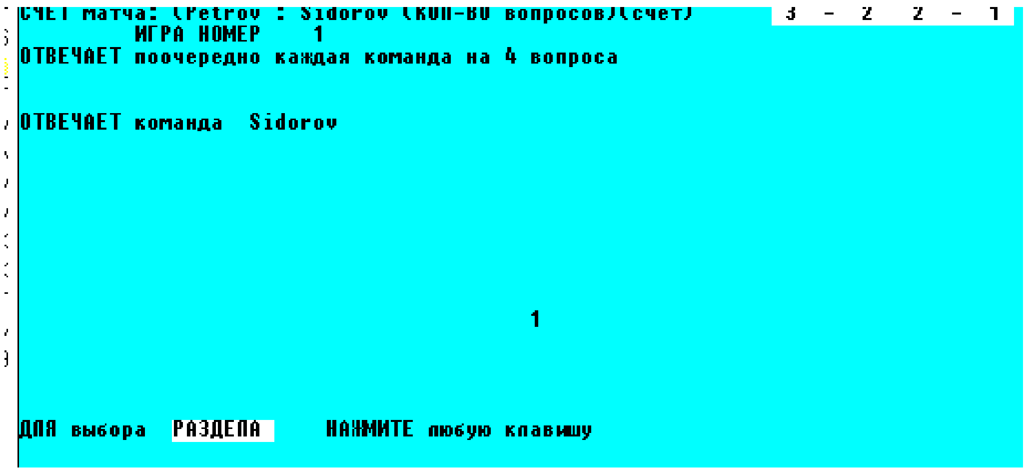
Для проведения игры необходимо загрузить для выполнения файл «Ss.exe». Это можно сделать с помощью «Проводника» или команды «выполнить» кнопки «Пуск». После загрузки файла в оперативную память появляется заставка с перечнем всех подключённых в данный момент разделов.

В игре будут заданы вопросы из следующих разделов:
РАЗДЕЛ 1 ПОСТРОЕНИЕ МАТ. МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ (26) ВСЕГО ВОПРОСОВ 26
РАЗДЕЛ 2 ФОРМЫ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (43) ВСЕГО ВОПРОСОВ - 43
РАЗДЕЛ 3 ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗЛП (59) ВСЕГО ВОПРОСОВ - 59
ДЛЯ продолжения работы нажмите любую клавишу

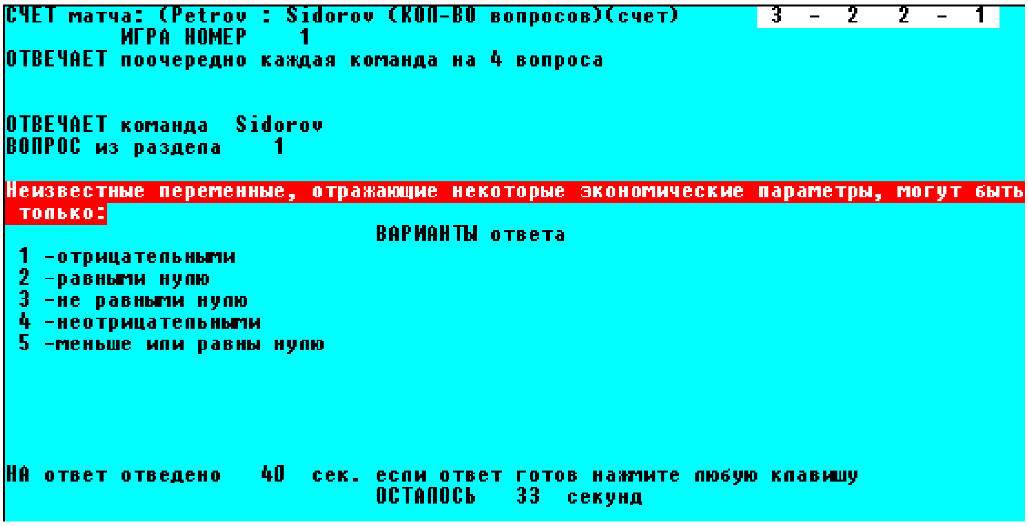
После этого в диалоговом режиме необходимо ввести количество участвующих в игре команд, количество игроков в каждой команде и имена капитанов команд. Если команда одна, то предполагается, что она состоит из одного игрока, и вопрос о количестве игроков не задаётся.



После ответов на вопросы начинается первый гейм игры.

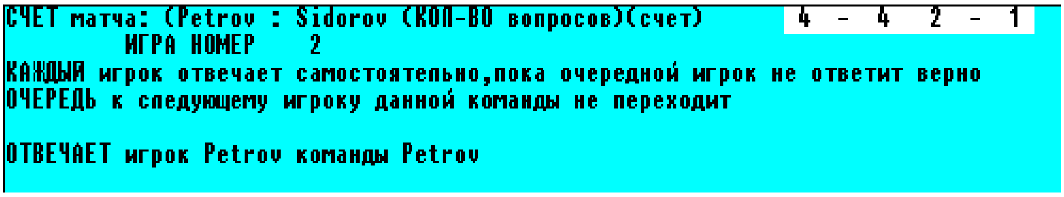


Данный гейм состоит в ответах на четыре вопроса каждой командой, не зависимо от правильности ответов. Сначала необходимо случайным образом выбрать номер раздела (темы). Цифра в средней части экрана отражает номер раздела из числа подключённых разделов. Она меняется случайным образом и с большой скоростью. Поэтому при нажатии любой клавиши, номер раздела действительно выбирается случайным образом. После этого, таким же случайным образом, необходимо выбрать номер вопроса из числа вопросов выбранного раздела. На экране дисплея появляется выбранный вопрос и варианты ответа. Внизу экрана отображается величина времени, которое отведено на обдумывание ответа и время которое осталось. После подготовки ответа необходимо на-

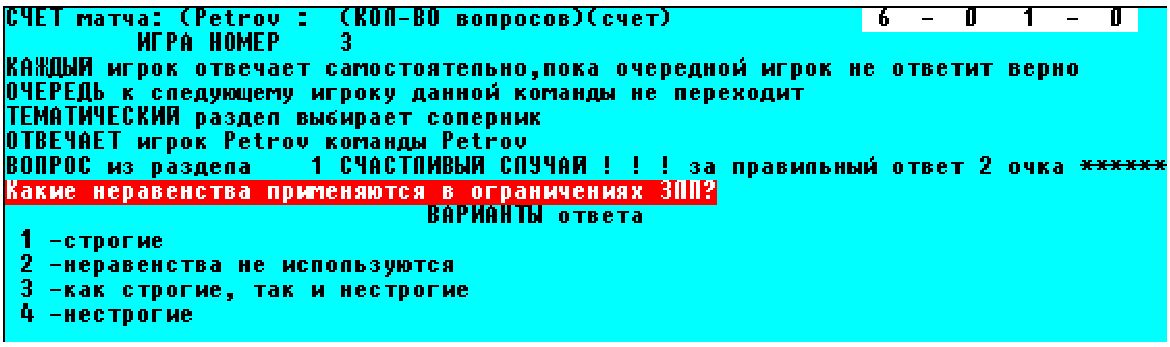


жать любую клавишу и вести номер выбранного варианта. В некоторых вопросах вариантов ответа нет, в этом случае нужно ввести сам ответ. Если время на обдумывание просрочено, то происходит переход к следующему вопросу, а за этот вопрос назначается количество баллов 0. Если после нажатия любой клавиши произошла задержка с вводом ответа, то такой ответ также не засчитывается.

После ответа каждой командой (или одной комодой) на четыре вопроса начинается второй гейм.



Этот гейм отличается от предыдущего тем, что каждый из игроков должен ответить верно, и пока он не ответит верно, очередь к следующему игроку не переходит, а будут задаваться дополнительные вопросы данному игроку.



Третий гейм отличается от предыдущего тем, что номер раздела выбирает соперник. После завершения третьего гейма выдаются результаты игры:

```
                             РЕЗУЛЬТАТЫ игры ! ! !
          КОМАНДА Petrov
ВЕЛИЧИНА отношения набранных очков к количеству вопросов -  1
КОМАНДА получает -  5
********************************************************************************

          КОМАНДА Sidorov
ВЕЛИЧИНА отношения набранных очков к количеству вопросов -  .6666666865348816
КОМАНДА получает -  3
********************************************************************************

ВЫИГРАЛА команда Petrov
```

Список рекомендуемой литературы для изучения курса

1. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.В. Математическое программирование. – М.: Высш. шк., 1980. – 350 с.

2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов экономических специальностей вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 319

3. Решение задач математического программирования (курс лекций для студентов экономических специальностей) / Христиановский В.В., Ерин В.Г., Ткаченко О. В. – Донецк: ДонГУ, 1992. –254 с.

4. Методические указания и задачи по математическому программированию (для студентов экономических специальностей) / Христиановский В.В., Ерин В.Г., Ткаченко О. В. – Донецк: ДонГУ, 1990. –154 с.

5. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию: Учеб. пособие для студентов экономических специальностей вузов. – М.: Высш. шк., 1975. – 270 с.

6. Матряшин И.П., Макеева В.К. Математическое программирование. – М.: Высш. шк., 1978. – 160 с.

7. Линейное и нелинейное программирование. / Под. Ред. И.Н. Ляшенко. –Киев: Вища шк., 1975. – 372 с.

8. Полунин И.В. Курс математического программирования. – Минск: Вышэйш.. шк., 1970. – 320 с.

9. Ермольев Ю.М., Ляшенко И.И., Михалевич В.С. Математические методы исследования операций: Учеб. пособие для вузов. – Киев: Вища шк., 1979. – 312 с.

10. Ларионов А.И., Юрченко Т.И. Экономико-математические методы в планировании. – М.: Высш. шк., 1984. – 224 с.

Оглавление