

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

- Ерин В.Г.
- Ткаченко О.В.
- Христиановский В.В.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методическое пособие и контрольные задания
(для студентов-заочников экономических специальностей)



Донецк, ДонНУ-2000

Христиановский В.В., Ерин В.Г., Ткаченко О.В. **Математическое программирование**. Методическое пособие и контрольные задания для студентов-заочников экономических специальностей. - Донецк. ДонГУ. 1999-156 с.

Содержит организационно-методические указания для заочников, список литературы, варианты контрольных заданий, а также тринадцать параграфов пособия по решению задач математического программирования и инструкцию по использованию пакета 05B при компьютерном решении задач линейного программирования.

В пособии представлены методы решения задач линейного, целочисленного, параметрического, дробно-линейного программирования. Рассмотрены транспортные и матричные игровые задачи. Показан графический подход к решению нелинейных задач, а также пример реализации метода динамического программирования.

Уделено существенное внимание вопросам двойственности и устойчивости решений в линейном программировании.

Все методы решения и приемы анализа решений сопровождаются конкретными реализованными примерами.

Рецензенты: **Гузь Н.Г.**, д.э.н., проф.

Амитан В.Н., д.э.н., проф.

Электронный вариант **Породникова В.Д.**

I. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ КУРСА “МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ” И ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ. ЛИТЕРАТУРА

1. Планами обучения студентов-заочников экономических специальностей по курсу «Математическое программирование» предусмотрено чтение лекций (10 часов), проведение практических занятий (10 часов), выполнение одной контрольной работы и сдача экзамена.

Для выполнения контрольной работы и сдачи экзамена необходимо творческое самостоятельное освоение программы курса. Этому должны способствовать как публикуемое здесь методическое пособие по решению задач, так и специально организованные консультации в течение учебного года.

2. Контрольная работа состоит из восьми заданий. Необходимо выполнить по одной задаче из каждого задания согласно своему варианту. Номер варианта обозначается римскими числами и выбирается согласно двум последним цифрам номера зачетной книжки:

Последние две цифры номера зачетной книжки					Номер варианта
01	21	41	61	81	I
02	22	42	62	82	II
03	23	43	63	83	III
04	24	44	64	84	IV
05	25	45	65	85	V
06	26	46	66	86	VI
07	27	47	67	87	VII
08	28	48	68	88	VIII
09	29	49	69	89	IX
10	30	50	70	90	X
11	31	51	71	91	XI
12	32	52	72	92	XII
13	33	53	73	93	XIII
14	34	54	74	94	XIV
15	35	55	75	95	XV
16	36	56	76	96	XVI
17	37	57	77	97	XVII
18	38	58	78	98	XVIII
19	39	59	79	99	XIX
20	40	60	80	00	XX

3. В заголовке контрольной работы, помещенном на обложке тетради, должны быть указаны фамилия, имя и отчество студента, номер зачетной книжки, какой раз выполняется работа, дата отсылки работы в университет, домашний адрес студента.

4. Решение задач контрольной работы и необходимый анализ должны быть сопровождены объяснениями.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. – М.: Выс. шк., 1986 – 319 с.
2. Балашевич В.А. Основы математического программирования: учебное пособие для инженерно-экономических и экономических специальностей. – Минск: Высшэйшая шк., 1985. – 173 с.
3. Деордица Ю.Л., Нефедов Ю.М. Исследование операций в планировании и управлении: Учебное пособие для экономических специальностей. – Киев: Выс.шк., 1991. – 270 с.
4. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман: Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997 – 407 с.
5. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.В. Математическое программирование: учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1985. – 301 с.
6. Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сборник задач по математическому программированию: Для экономических специальностей вузов. – Минск: Высшейшая шк. 1985 – 143 с.
7. Линейное и нелинейное программирование / Под ред. И.И. Ляшенко. – Киев: Выс.шк., 1979 – 372 с.
8. Решение задач математического программирования: курс лекций для студентов экономических специальностей / В.В. Христиановский, В.Г. Ерин, О.В. Ткаченко. – Донецк: ДонГУ, 1992. – 254 с.
9. Сборник задач по математическому программированию: в помощь студентам-экономистам / В.В. Христиановский, В.Г. Ерин, О.В. Ткаченко. – Киев: УМК ВО, 1992 – 336 с.

Дополнительная

- 10.Абрамов А.М., Капустин В.Ф. Математическое программирование: Учебное пособие. – Л.: Издательство ЛГУ, 1981 – 328 с.
- 11.Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов – кибернетиков. – М.: Наука, 1985 – 272 с.
- 12.Денисов В. Windows 95 с самого начала – СПб: Питер, 1996. –240 с.
- 13.Зайченко Ю.Л. Исследование операций: Учебник. – Высшая школа, 1988. – 549 с.
- 14.Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. – М.: Наука, 1959.-200 с.
- 15.Ляшенко И.Н., Ляшенко Е.И. Математика для экономистов: учебное пособие. – Донецк, ДонГУ, 1998.
- 16.Математика и кибернетика в экономике: Словарь-справочник. – М.: Экономика, 1975 – 70 с.
- 17.Методические указания и задачи по математическому программированию: Ч. 1. Для студентов экономических специальностей / В.В. Христиановский, В.Г. Ерин, О.В. Ткаченко. – Донецк: ДонГУ, 1990 – 175 с.
- 18.Методические указания и задачи по математическому программированию: Ч.2. Для студентов экономических специальностей / В.В. Христиановский, В.Г. Ерин, О.В. Ткаченко – Донецк: ДонГУ, 1990 – 154 с.
- 19.Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях: Учебное пособие. – М.: Выс.шк. , 1986 – 285 с.
- 20.Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применение. –М.: Прогресс, 1966.- 600 с.
- 21.Фигурнов В.Э. IBM PC для пользователя. Изд. 6-е, перераб. и доп. – М.: ИНФРА – М, 1995. – 432 с.
- 22.Шелдон Т. Windows 95. Проще простого. К.: Диалектика, 1996. – 512 с.
23. Эльстер К.Х, Рейгард, Шойбле М., Донат Г. Введение в нелинейное программирование. – М.: Наука, 1985 – 280 с.
- 24.Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование: теория, методы и приложения. –М.: Наука, 1969. – 424 с.

II. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТАМИ-ЗАОЧНИКАМИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ. Построить математическую модель, осуществить графическое и симплексное решение с последующим необходимым экономическим анализом следующей оптимизационной задачи.

Предприятие может выпускать товары T_1 и T_2 , используя ресурсы S_1, S_2, S_3 . Пусть товары исчисляются в тоннах, а каждый из ресурсов в своих условных единицах (например, в единицах веса, в человеко-часах, в киловатт-часах и т.п.).

Нормозатраты ресурсов в условных единицах на производство 1 т каждого из товаров, объемы наличных ресурсов, цены реализации товаров известны и приведены в таблице. Также приведены нужные нам обозначения переменных величин.

Товары Ресурсы	Нормозатраты ресурсов (усл.ед.) на производство 1 т товара (усл.ед./т)		Имеющи йся объем ресурсов (усл.ед.)	“Теневые” цены ресурсов (ден.ед./усл. ед.)
	T_1	T_2		
S_1	a_{11}	a_{12}	b_1	y_1
S_2	a_{21}	a_{22}	b_2	y_2
S_3	a_{31}	a_{32}	b_3	y_3
Цены товаров (тыс.грн./т)	c_1	c_2	Через z обозначим суммарную цену производимых товаров (тыс.грн.)	
План выпуска товаров (т)	x_1	x_2		

Здесь a_{ij}, b_i, c_j ($i = \overline{1,3}; j = \overline{1,2}$) - известные нам величины, заданные для каждого варианта контрольной работы в ниже приводимой таблице;

x_j, y_i, z - переменные искомые величины.

В приводимой таблице данные колонок $d_{13}, d_{23}, d_{33}, d_3$ используются лишь при анализе возможности выпуска третьего гипотетического товара. Основная же модель задачи использует лишь данные прочих колонок.

Подробный перечень требований по выполнению первого задания контрольной работы:

1. Составить математическую модель заданной оптимизационной задачи по данным своего варианта. (Исходная модель).
2. Составить математическую модель двойственной задачи.
3. Выполнить графическое решение исходной задачи. Проанализировать это решение.
4. Привести исходную задачу к каноническому виду. Осуществить симплексное

решение с целью получения оптимальных ответов для исходной и двойственной задач.

5. Проанализировать дефицитность (или недефицитность) каждого ресурса при реализации оптимального плана исходной задачи.
6. Выделить обратную матрицу преобразований, приведших к оптимальной таблице. Провести анализ по столбцам этой матрицы.
7. Проанализировать устойчивость полученного оптимального результата исходной задачи в зависимости от изменения коэффициентов целевой функции.
8. Проанализировать устойчивость двойственных оценок («теневых» цен) относительно изменения объемов имеющихся ресурсов.
9. Рассмотреть гипотезу о рациональности выпуска еще одного товара T_3 при первоначально имеющихся ресурсах. Предполагаемые нормозатраты и цена для этого товара приведены в колонках d_{13} , d_{23} , d_{33} , d_3 таблицы данных вариантов.
10. Вычислить норму заменяемости ресурсов, активно влияющих на полученный оптимальный план.

Примечание: данные колонок d_{13} , d_{23} , d_{33} , d_3 используются только при проведении анализа по п. 9 данного перечня требований.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ. Решить транспортную задачу.

В таблицах a_i - наличие товара у i -го поставщика, b_j - потребность j -го потребителя в этом товаре. В рабочих клетках указаны известные цены c_{ij} за перевозку единицы груза от i -го поставщика j -му потребителю.

1.

b_j	100	400	400	100
a_i				
150	1	3	4	0
250	2	2	3	4
300	5	5	3	6
300	1	6	7	4

2.

b_j	60	65	75	50
a_i				
70	0	4	3	1
80	4	3	2	2
80	6	3	5	5
20	4	7	6	1

3.

b_j	100	400	200	300
a_i				
100	2	4	2	1
150	3	1	5	6
250	1	7	3	5
500	5	8	6	1

4.

b_j	400	200	200	200
a_i				
250	6	1	4	2
300	3	5	1	3
350	5	6	7	1
100	2	1	8	5

5.

b_j	30	70	50	100
a_i				
70	7	5	1	6
120	5	3	4	9
20	6	8	7	7
40	4	3	5	5

6.

b_j	75	12	60	140
a_i		5		
80	4	5	2	10
40	7	3	2	4
160	3	4	3	5
120	5	7	9	6

7.

b_j	45	40	50	100
a_i	0	0		
300	7	9	9	5
150	2	5	8	9
350	5	6	4	8
200	3	11	3	3

8.

b_j a_i	25	35 1	45	35
50	6	8	2	4
30	7	2	5	4
40	8	1	7	2
20	1	2	8	10

9.

b_j a_i	60	40	35	65
45	4	2	3	2
30	7	5	7	3
50	2	6	8	4
75	5	1	3	1

10.

b_j a_i	200	100	80	120
60	2	5	4	2
140	3	1	3	1
160	5	3	3	2
140	3	4	6	0

11.

b_j a_i	600	400	200
100	6	15	9
400	7	10	16
700	9	11	15

12.

b_j a_i	40	120	40	20
150	1	1	3	2
50	4	8	4	3
20	3	3	2	2

13.

b_j	250	250	400	600
a_i				
350	8	1	10	8
650	11	15	11	7
500	12	7	15	12

14.

b_j	700	300	200	400
a_i				
900	18	20	14	10
300	10	20	30	30
400	16	22	10	20

15.

b_j	100	100	400	1000
a_i				
500	20	10	30	50
800	30	20	30	20
300	30	50	50	50

16.

b_j	450	350	550	650
a_i				
500	4	1	3	5
600	2	2	3	7
900	4	3	5	3

17.

b_j	80	80	40
a_i			
60	8	4	3
70	5	8	6
30	4	5	9
40	8	7	8

18.

b_j	350	450	400	600
a_i				
250	8	1	7	11
750	7	2	3	4
500	6	3	5	8
300	5	2	3	5

19.

b_j	60	40	90	10
a_i				
50	5	9	7	1
70	2	4	10	2
80	4	5	2	1

20.

b_j	90	60	80	20
a_i				
50	4	7	5	3
150	2	4	6	2
80	3	2	8	1

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ. С помощью симплекс-метода решить задачу дробно-линейного программирования. Полученное решение проверить использованием графического метода.

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$9x_1 + 6x_2 \geq 54,$$

$$1. \quad -2x_1 + 9x_2 \leq 19,$$

$$x_1 - x_2 \leq 6,$$

$$\varphi = \frac{5x_1 + 4x_2}{2x_1 - x_2} \rightarrow \max.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$-x_1 + x_2 \leq 5,$$

$$2. \quad -x_1 + 2x_2 \geq 2,$$

$$\varphi = \frac{x_1 - 2x_2}{x_1 + 5x_2} \rightarrow \min.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 12,$$

$$3. \quad 4x_1 + x_2 \leq 12,$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 12,$$

$$\varphi = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \max.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$3x_1 + 7x_2 \leq 21,$$

$$4. \quad 10x_1 + 8x_2 \leq 40,$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12,$$

$$\varphi = \frac{5x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} \rightarrow \min.$$

$$\begin{aligned}
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& -3x_1 + x_2 \leq -3, \\
5. \quad & x_1 - x_2 \leq 8, \\
& x_2 \leq 6, \\
& \varphi = \frac{3x_1 + 4x_2}{2x_1 + x_2} \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\
7. \quad & 12x_1 + 3x_2 \leq 36, \\
& x_2 \geq 1, \\
& \varphi = \frac{2x_1 - 3x_2}{3x_1 + x_2} \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& 9x_1 + 6x_2 \leq 54, \\
9. \quad & -2x_1 + 9x_2 \geq 19, \\
& -3x_1 + 10x_2 \leq 54, \\
& \varphi = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0 \leq x_1 \leq 4, \\
& 0 \leq x_2 \leq 5, \\
11. \quad & 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\
& 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\
& \varphi = \frac{x_1 - 2x_2}{x_1 + 5x_2} \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& 9x_1 + 6x_2 \geq 54, \\
& -2x_1 + 9x_2 \geq 19, \\
6. \quad & x_1 - x_2 \leq 6, \\
& -3x_1 + 10x_2 \leq 54, \\
& \varphi = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + 4x_2} \rightarrow \min.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1 + x_2 \leq 6, \\
8. \quad & x_1 + 8x_2 \leq 8, \\
& x_1 \geq 1, \\
& \varphi = \frac{x_1 + 2x_2}{3x_1 + 2x_2} \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& -4x_1 + x_2 \leq 4, \\
10. \quad & -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\
& x_1 + x_2 \geq 13, \\
& \varphi = \frac{x_1 - 2x_2}{x_1 + 5x_2} \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\
12. \quad & x_1 + x_2 \geq 3, \\
& x_1 \leq 3, \\
& \varphi = \frac{3x_1 + 4x_2}{2x_1 + x_2} \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0 \leq x_1 \leq 5, \\
& 0 \leq x_2 \leq 6, \\
13. \quad & 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\
& 2x_1 + 7x_2 \geq 14, \\
& \varphi = \frac{5x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1 - x_2 \leq 3, \\
& 3x_1 + 8x_2 \leq 72, \\
15. \quad & -3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\
& x_1 \geq 5, \\
& \varphi = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + 4x_2} \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, \\
17. \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\
& \varphi = \frac{x_1}{x_2} \rightarrow \min.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \leq x_1 \leq 10, \\
& 0 \leq x_2 \leq 10, \\
19. \quad & x_1 - x_2 \leq 6, \\
& x_1 + 3x_2 \geq 9, \\
& \varphi = \frac{x_1 - x_2}{4x_1 + 4x_2} \rightarrow \min.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1 + x_2 \leq 5, \\
14. \quad & x_1 - x_2 \geq 3, \\
& \varphi = \frac{5x_1 + 4x_2}{2x_1 - x_2} \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1 + x_2 \leq 3, \\
16. \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\
& x_2 \geq 1, \\
& \varphi = \frac{x_1 + 2x_2}{3x_1 + 2x_2} \rightarrow \min.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& 4x_1 - x_2 \leq 19, \\
18. \quad & -2x_1 + 3x_2 \leq 13, \\
& x_1 + x_2 \geq 6, \\
& \varphi = \frac{2x_1 - 3x_2}{3x_1 + x_2} \rightarrow \min.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1 + x_2 \geq 4, \\
20. \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 5, \\
& 5x_1 - 2x_2 \leq 7, \\
& \varphi = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \min.
\end{aligned}$$

ЧЕТВЕРТОЕ ЗАДАНИЕ. Решить параметрическую задачу.

$$\begin{aligned}
 & x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}), \\
 1. \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 6, \end{cases} \\
 & f = -2tx_1 + (-5+t)x_2 \rightarrow \min, t \in [-3,5].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}), \\
 2. \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2, \end{cases} \\
 & f = -(3+3t)x_1 - (2+t)x_2 \rightarrow \min, t \in [-2,1].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_j \geq 0, x_2 \geq 0, \\
 3. \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \end{cases} \\
 & f = -(3+2t)x_1 - (2+t)x_2 \rightarrow \min, t \in [-\frac{3}{2}, 1].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}), \\
 4. \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 4, \end{cases} \\
 & f = -tx_1 - (1+t)x_2 - (6-2t)x_3 \rightarrow \min, t \in [-10,10].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}), \\
 5. \quad & \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 51, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_6 = 5, \end{cases} \\
 & f = 5x_1 + (2+3t)x_2 \rightarrow \max, t \in [0,10].
 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}),$$

$$6. \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 9, \\ x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_5 = 6, \\ x_2 - x_6 = 5, \end{cases}$$

$$f = (1+t)x_1 + (2-t)x_2 \rightarrow \max, t \in [-3,3].$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}),$$

$$7. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 3, \end{cases}$$

$$f = (1+2t)x_1 + (2+t)x_2 \rightarrow \max, t \in [-2,2].$$

$$x_j \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$8. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \end{cases}$$

$$f = (3+2t)x_1 + (2+t)x_2 \rightarrow \max, t \in [-\frac{3}{2}, 1].$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}),$$

$$9. \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 3, \end{cases}$$

$$f = -tx_1 - (1+t)x_2 \rightarrow \min, t \in [-\infty, \infty].$$

$$x_j \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$10. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \leq 3, \end{cases}$$

$$f = (3+3t)x_1 + (2+t)x_2 \rightarrow \max, t \in [-1,1].$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}), \quad \mu \in [-20,20],$$

$$11. \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 12 - 3\mu, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 + \mu, \end{cases}$$

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max.$$

- $x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4}), \mu \in [-1,1],$
 12. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 5\mu, \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2 - \mu, \end{cases}$
 $f = x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 \rightarrow \max.$
- $x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4}), \mu \in [-5,5],$
 13. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 - \mu, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4 + 2\mu, \end{cases}$
 $f = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max.$
- $x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4}), f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max,$
 14. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3\mu, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 + \mu, \mu \in [-\infty, \infty]. \end{cases}$
- $x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4}), \mu \in [-3,3],$
 15. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6 - 3\mu, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 + \mu, \end{cases}$
 $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max.$
- $x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4}), \mu \in [-\infty, \infty],$
 16. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 2\mu, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 2 - \mu, \end{cases}$
 $f = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max.$
- $x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4}), \mu \in [-10,10],$
 17. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 - \mu, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 1 + 2\mu, \end{cases}$
 $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max.$
- $x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4}), \mu \in [-4,4],$
 18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 - \mu, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 8\mu, \end{cases}$
 $f = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \min.$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4}), \quad \mu \in [-13,13],$$

$$19. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 5\mu, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 - 3\mu, \end{cases}$$

$$f = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \max.$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4}), \quad \mu \in [-\infty, \infty],$$

$$20. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 + \mu, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 - \mu, \end{cases}$$

$$f = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \rightarrow \max.$$

ПЯТОЕ ЗАДАНИЕ. С помощью метода отсечений Гомори найти полностью целочисленное оптимальное решение.

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,5}),$$

$$1. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 & = 8, \\ 2x_1 & + x_4 = 8, \\ & 2x_2 + x_5 = 5, \end{cases}$$

$$z = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max.$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,6}),$$

$$2. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 & = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 & + x_4 = 8, \\ x_1 & + x_5 = 3, \\ & x_2 + x_6 = 1, \end{cases}$$

$$z = 6x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,5}),$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 7, \\ x_1 + 4x_2 & + x_4 = 8, \\ 2x_1 + 2x_2 & + x_5 = 8, \end{cases}$$

$$z = -4x_1 - 10x_2 \rightarrow \min.$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,5}),$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 & = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 & = 2, \end{cases}$$

$$z = -x_1 - x_2 \rightarrow \min.$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4}),$$

$$5. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = 18, \\ 6x_1 - 8x_2 - 2x_4 & = 10, \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min.$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,6}),$$

$$6. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = 8, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_4 & = 18, \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_5 & = 12, \\ 6x_2 - 2x_6 & = 12, \end{cases}$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$7. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & \leq 10, \\ x_1 + 4x_2 & \leq 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq 13, \end{cases}$$

$$z = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \max.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$8. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 & \leq 34, \\ 3x_1 + 5x_2 & \leq 60, \\ 3x_2 & \leq 8, \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$9. \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 & = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 & = 6, \end{cases}$$

$$z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.$$

$$\begin{aligned}
& x_j \geq 0, \quad (j=\overline{1,5}), \\
10. \quad & \begin{cases} x_1 - x_4 + 7x_5 = 2, \\ x_2 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 6, \end{cases} \\
& z = x_4 - x_5 \rightarrow \min.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,5}), \\
11. \quad & \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_5 = 1, \end{cases} \\
& z = x_1 + x_2 \rightarrow \min.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4}), \\
12. \quad & \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 16, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10, \end{cases} \\
& z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4}), \\
13. \quad & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_2 + x_4 = 4, \end{cases} \\
& z = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4}), \\
14. \quad & \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 11, \end{cases} \\
& z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,5}), \\
15. \quad & \begin{cases} 45x_1 + 30x_2 + 50x_3 + x_4 = 140, \\ 20x_1 + 63x_2 + 10x_3 + x_5 = 110, \end{cases} \\
& z = 25x_1 + 40x_2 + 30x_3 \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,7}), \\
16. & \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 + x_6 = 4, \\ x_2 + 4x_3 + x_4 + x_7 = 3, \end{cases} \\
& z = 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 2x_4 \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,6}), \\
17. & \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ -3x_1 - 3x_2 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_6 = 1, \end{cases} \\
& z = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \min.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,5}), \\
18. & \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_5 = 4, \end{cases} \\
& z = 3x_1 + 6x_2 \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,6}), \\
19. & \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 = 8, \\ 5x_1 - x_3 + x_5 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_6 = 4, \end{cases} \\
& z = -2x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \min.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_j \geq 0, \quad (j=\overline{1,5}), \\
20. & \begin{cases} x_1 - 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_2 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 10, \end{cases} \\
& z = -3x_4 + 4x_5 \rightarrow \min.
\end{aligned}$$

ШЕСТОЕ ЗАДАНИЕ. Для игры с заданной платежной матрицей А необходимо определить смешанные стратегии.

$$1. \begin{Bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 10 \end{Bmatrix}$$

$$2. \begin{Bmatrix} 3 & 8 \\ 12 & 1 \\ 9 & 16 \end{Bmatrix}$$

$$3. \begin{Bmatrix} 12 & 32 \\ 48 & 4 \\ 36 & 24 \end{Bmatrix}$$

$$4. \begin{Bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$5. \begin{Bmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$6. \begin{Bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{Bmatrix}$$

$$7. \begin{Bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 22 \end{Bmatrix}$$

$$8. \begin{Bmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 0 & 10 & 2 \\ 8 & 6 & 7 \end{Bmatrix}$$

$$9. \begin{Bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{Bmatrix}$$

$$10. \begin{Bmatrix} 3 & 8 \\ 12 & 1 \\ 9 & 6 \end{Bmatrix}$$

$$11. \begin{Bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$12. \begin{Bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 5 \end{Bmatrix}$$

$$13. \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$14. \begin{Bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$15. \begin{Bmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 3 \end{Bmatrix}$$

$$16. \begin{Bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{Bmatrix}$$

$$17. \begin{Bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{Bmatrix}$$

$$18. \begin{Bmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 8 & 7 & 6 \end{Bmatrix}$$

$$19. \begin{Bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 6 \end{Bmatrix}$$

$$20. \begin{Bmatrix} 8 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 4 \end{Bmatrix}$$

СЕДЬМОЕ ЗАДАНИЕ. С помощью метода динамического программирования определить оптимальное распределение капиталовложений, полная выделяемая сумма которых обозначена через K , между четырьмя предприятиями, чтобы общий прирост продукции, выраженный в относительных единицах, был максимальным.

В таблицах всех задач слева во втором вертикальном столбце указаны возможные доли выделения капиталовложений в тыс. гривен. В остальных столбцах приведены приросты продукции в относительных единицах $q_i(x)$ по каждому i -му предприятию ($i = 1, 2, 3, 4$) в зависимости от вложения средств x .

При расчетах для каждого предприятия считать $q_i(0) = 0$, т.е. если i -му предприятию капиталовложения не выделяются, то прироста продукции нет.

Номер задачи	Выделяемые капиталовложения x , тыс грн.	Прирост продукции в относительных единицах			
		$q_1(x)$	$q_2(x)$	$q_3(x)$	$q_4(x)$
1	2	3	4	5	6
1.	100	50	40	90	70
	200	100	60	100	80
	300	150	80	120	170
	$K = 400$	200	100	130	200
2.	25	15	20	35	30
	50	25	46	44	52
	75	45	50	85	80
	$K = 100$	60	72	90	102
3.	40	24	30	26	38
	80	50	70	68	49
	120	95	84	112	78
	$K = 160$	134	149	120	150
4.	20	15	18	20	20
	40	20	25	30	35
	60	40	38	35	15
	$K = 80$	55	51	59	30
5.	100	55	29	30	33
	200	64	60	67	65
	300	125	110	115	140
	$K = 400$	190	184	187	195
6.	25	10	20	15	5
	50	20	25	25	30
	75	25	30	60	40
	$K = 100$	70	60	75	80
7.	30	25	20	15	25
	60	50	30	30	35
	90	65	40	60	45
	$K = 120$	95	60	90	55
8.	60	30	35	55	40
	120	75	80	92	100
	180	110	130	125	137
	$K = 240$	150	155	180	175

9.	50 100 150 K = 200	30 95 110 130	40 70 120 150	35 80 100 160	25 65 115 175
10.	20 40 60 K = 80	15 30 42 99	5 12 45 65	10 33 41 50	30 47 65 70
11.	25 50 75 K = 100	10 25 65 80	15 30 40 75	5 50 60 65	30 45 67 80
12.	15 30 45 K = 60	10 15 20 45	5 20 25 50	8 10 12 30	35 45 55 60
13.	60 120 180 K = 240	18 28 57 20	20 35 60 86	23 37 54 76	27 51 71 82
14.	100 200 300 K = 400	60 70 65 30	55 30 45 125	70 65 50 60	40 50 70 225
15.	30 60 90 K = 120	10 24 65 98	12 29 60 100	9 30 58 105	15 33 98 110
16.	20 40 60 K = 80	10 18 39 58	12 23 42 65	20 34 48 70	15 36 45 68
17.	200 400 600 K = 800	80 100 140 200	64 110 130 180	68 120 150 220	74 138 160 240
18.	80 160 240 K = 320	30 45 60 70	35 41 75 90	54 60 65 80	36 66 85 85

19.	70	25	20	24	40
	140	60	50	56	90
	210	80	70	78	175
	K = 280	100	190	199	200
20.	56	24	25	30	32
	110	57	65	60	54
	165	90	82	92	120
	K = 220	130	125	132	150

ВОСЬМОЕ ЗАДАНИЕ. Решить графически заданную задачу нелинейного программирования, рассмотреть применение градиентного метода для этой задачи.

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 9,$$

$$1. \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \\ f = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

$$x_1 + x_2 \geq 7,$$

$$2. \quad 0 \leq x_1 \leq 4, \\ 0 \leq x_2 \leq 10, \\ f = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2 + 13 \rightarrow \min.$$

$$x_1 + x_2 \leq 7,$$

$$3. \quad x_2 \geq 0, \\ 0 \leq x_1 \leq 5, \\ f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min.$$

$$x_1 + x_2 = 2,$$

$$4. \quad f = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min.$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 100,$$

$$5. \quad x_2 \geq 0, \\ f = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2 + 13 \rightarrow \min.$$

$$x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$x_1 - x_2 \leq 1,$$

$$6. \quad 2x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$\frac{1}{2}x_1 - x_2 \geq -4,$$

$$f = 10(x_1 - 2)^2 + 20(x_2 - 3)^2 \rightarrow \min.$$

$$x_1^2 - x_2^2 \leq 9,$$

$$7. \quad x_2 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$f = x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 - 2x_2 \rightarrow \min.$$

$$2x_1^2 + 3x_2^2 \leq 6,$$

$$8. \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$f = 2x_1 - x_1^2 + x_2 \rightarrow \max.$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$9. \quad x_1 + 2x_2 \leq 16,$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 40,$$

$$f = 10x_1 + 16x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max.$$

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$x_1 - x_2 \leq 1,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$10. \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 \geq -4,$$

$$x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 0,$$

$$f = 10(x_1 - 3,5)^2 + 20(x_2 - 4)^2 \rightarrow \min.$$

$$11. \quad 2x_1 + x_2 = 4,$$

$$f = 2x_1 - x_1^2 + x_2 \rightarrow \max.$$

$$x_1^2 - x_2^2 \geq 9,$$

$$12. \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$f = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min.$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 52,$$

$$13. \quad x_1 \leq 0,$$

$$f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \max.$$

$$x_1^2 - x_2^2 \leq 9,$$

$$14. \quad x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$f = x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 - 2x_2 \rightarrow \max.$$

$$15. \quad x_1^2 + x_2^2 - 25 = 0,$$

$$f = x_1 + 5x_2^2 \rightarrow \max.$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6,$$

$$16. \quad 2x_1 + x_2 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$f = 2x_1 - x_1^2 + x_2 \rightarrow \max.$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$x_1 + x_2 \geq 2,$$

$$17. \quad x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$x_1 - x_2 \geq -2,$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 2,$$

$$f = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max.$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 4,$$

$$18. \quad 3x_1 + x_2 \leq 15,$$

$$x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$f = 4(x_1 - 6)^2 + 6(x_2 - 2)^2 \rightarrow \min.$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$19. \quad (x_1 - 2)^2 + (x_2^2 - 1)^2 \leq 9,$$

$$f = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

$$\begin{aligned}
 & x_1^2 + x_2^2 \leq 9, \\
 & x_1 \leq 2, \quad x_2 \geq 1, \\
 & x_2 \geq 1, \\
 & f = 8x_1^2 + 2x_2^2 \rightarrow \max.
 \end{aligned}$$

III. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

§ 1. О ПРОЦЕССЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ ОПЕРАЦИЙ

Математическое программирование – это область математики, которая разрабатывает теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т.е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Математическое программирование является основным разделом исследования операций. Процесс принятия решений в исследовании операций включает следующие основные этапы:

- 1) экономическая постановка задачи;
- 2) построение математической модели;
- 3) решение задачи;
- 4) проверка адекватности результатов вычислений моделируемому объекту.

Первый этап является наиболее важным. Он предполагает выделение важнейших свойств объекта и абстрагирование от второстепенных; изучение структуры объекта и тех зависимостей, которые связывают его элементы; формулирование гипотез, объясняющих поведение и развитие объекта.

На втором этапе экономическая проблема формализуется, то есть выражается в виде конкретных математических зависимостей и отношений (функций, уравнений, неравенств и т.п.).

На третьем этапе на основе выбранной модели проводится решение задачи. Этот этап может включать создание алгоритмов и программ для решения на ЭВМ.

На четвертом этапе проводится экспертная проверка результатов. Если нет адекватности модели и моделируемого объекта, производится корректировка экономической постановки или математической модели. Если корректировка не нужна, то результаты решения используются для принятия решений.

Блок-схема принятия решений показана на рис.1.1.



Рис. 1.1.

Одним из основных этапов процесса принятия решений в исследовании операций является построение математической модели. Математическая модель – это записанная в математических символах и выражениях абстракция реального явления или процесса. Математические модели экономических процессов и явлений называются экономико-математическими моделями. По способу логико-математического описания объектов модели делятся на:

- 1) линейные, в которых все зависимости описываются линейными соотношениями, и нелинейные, в которых имеются нелинейные соотношения;
- 2) стохастические, в которых учитывается случайный характер изучаемых процессов, и детерминированные, в которых учитываются усредненные значения всех параметров.

По временному признаку различают динамические модели, в которых исследуемые системы рассматриваются в развитии в течение нескольких периодов, и статические, в которых фактор времени не учитывается.

В соответствии с целями создания и применения можно выделить оптимизационные модели, в которых выбор осуществляется в зависимости от экстремизации некоторого критерия, и неоптимизационные, в которых критерия оптимальности нет.

По степени агрегированности различают также макромодели (всего хозяйства в целом) и микромодели (отдельных звеньев или процессов экономики).

Рассмотрим общую постановку задачи математического программирования.

Общая задача математического программирования состоит в определении

оптимального значения целевой функции, причем значения переменных должны принадлежать некоторой области допустимых значений. Математически определение оптимального решения выражается в нахождении экстремума (max или min) функции многих переменных

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

в заданной области изменения этих переменных

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) R_i b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где R_i - один из знаков $\geq, =, \leq$.

§ 2. ПРИМЕРЫ СОСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Задача оптимального планирования предполагает составление плана производства, обеспечивающего в максимальной степени выполнение задания.

Сформулируем ее в общем виде.

Имеется m видов материальных ресурсов, каждый из которых ограничен величиной b_i единиц ($i = 1, 2, \dots, m$). Из этих ресурсов следует изготовить n видов продукции. Известны нормы расхода i -го ресурса на выпуск единицы j -й продукции a_{ij} ($j = 1, 2, \dots, n$), а также прибыль, получаемая от реализации единицы продукции j -го вида или цена единицы продукции j -го вида c_j .

Требуется определить план производства продукции, обеспечивающий получение максимальной прибыли или максимальной стоимости.

Для составления математической модели данной задачи принимаем искомое количество продукции j -го вида равным x_j . Сформулированные условия в этом случае записываются следующим образом. Определить множество неотрицательных переменных $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), которые удовлетворяют условию ограничений по

ресурсам $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m})$ и при этом целевая функция, выражающая

суммарную прибыль от реализации всей продукции или суммарную ее стоимость, равна

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max.$$

Приведем пример построения математической модели задачи оптимального планирования производства.

Пусть химический цех может производить ценные вещества двух наименований – B_1 и B_2 . Известно, что производство этих веществ зависит от наличия четырех ресурсов (сырье, энергия, временной ресурс автоматов-производителей). Нормозатраты каждого из ресурсов на производство 1 кг вещества известны и приведены в таблице. В этой же таблице указаны величины имеющихся ресурсов и цена производимых веществ:

Ресурсы	Нормозатраты на производство 1 кг вещества, усл.ед./кг		Наличие ресурсов, усл.ед.
	B_1	B_2	
P_1	6	3	60
P_2	2	5	40
P_3	9	0	81
P_4	0	8	56
Цена 1 кг вещества, тыс.грн./кг	4	5	

Учитывая наличие ресурсов, нормозатраты и прибыль, необходимо составить такой план выпуска веществ B_1 и B_2 , который бы обеспечил цеху наибольшую суммарную стоимость.

Чтобы решать задачу с помощью математических приемов, следует сначала составить математическую модель задачи.

Все данные нашей задачи сосредоточены в одной таблице. Будем считать, что с экономических позиций нам задача понятна и имеется вся необходимая информация. Для построения модели введем переменные величины. Обозначим через x_1 план выпуска веществ B_1 и через x_2 план выпуска веществ B_2 . Эти величины нам как раз и нужно определить, и они должны быть такими, чтобы получалась максимальная стоимость, которую мы обозначим через z . В нашей простой задаче мы ограничены наличием ресурсов. Ресурсы P_1 имеют 60 условных единиц. Очевидно, что суммарные затраты на выпуск B_1 и B_2 не должны превысить 60. Из таблицы видно, что нормозатраты P_1 на 1 кг вещества B_1 составляют 6 усл. единиц, тогда затраты на весь план выпуска B_1 составят $6x_1$. Соответственно нормозатраты P_1 на 1 кг вещества B_2 равны 3 усл. единицам и затраты на план выпуска B_2 составят $3x_2$. Следовательно, суммарные затраты ресурса P_1 составят $(6x_1 + 3x_2)$ и не должны превысить величину наличия P_1 , т.е. не должны превысить 60. Итак, по ресурсу P_1 имеем неравенство $6x_1 + 3x_2 \leq 60$. Аналогично неравенства можно записать и для ресурсов P_2, P_3, P_4 :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leq 40, \\ 9x_1 &\leq 81, \\ 8x_2 &\leq 56. \end{aligned}$$

Видно, что ресурс P_3 используется лишь на производство вещества B_1 , а ресурс P_4 - на производство B_2 . Из ограничений еще надо учесть неотрицательность планов выпуска веществ, т.е. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Для составления модели остается сформировать функцию стоимости z . Стоимость z складывается из стоимости вещества B_1 и стоимости вещества B_2 . Так как выпуск вещества B_1 обозначен через x_1 , то стоимость вещества B_1 будет равна $4x_1$. Соответственно стоимость вещества B_2 будет равна $5x_2$. Но тогда суммарная стоимость составит целевую функцию нашей задачи:

$$z = 4x_1 + 5x_2.$$

Суммируя сказанное, можно сформулировать следующую математическую модель нашей задачи: найти такие значения переменных x_1 и x_2 , которые бы отвечали условиям

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, & (1), (2) \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 60, & (3) \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 40, & (4) \\ 9x_1 \leq 81, & (5) \\ 8x_2 \leq 56 & (6) \end{cases} \quad (2.1)$$

и обеспечивали бы максимум целевой функции

$$z = 4x_1 + 5x_2. \quad (2.2)$$

Задача о смесях

Во многих отраслях промышленности технологический процесс требует одновременного использования нескольких компонентов, в связи с чем возникает проблема такого их соединения, при котором достигался бы максимальный эффект.

Задачи определения оптимальных смесей характерны для химической, металлургической, нефтеперерабатывающей, пищевой и других отраслей промышленности. Важность решения указанных задач определяется как требованиями технологии, так и необходимостью экономии используемого сырья и материалов.

Сформулируем задачу о смесях в общем виде.

Имеется n различных видов сырья, каждый из которых включает m видов веществ. Известны количество i -го вещества в единице j -го вида сырья a_{ij} ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$), а также стоимость единицы сырья j -го вида c_j . Через b'_i и b''_i обозначим соответственно наименьшее и наибольшее допустимое количество веществ i -го вида в смеси, а через d_j - запас сырья j -го вида. Требуется из имеющегося сырья получить смесь с заданными свойствами при минимальных затратах. Для составления математической модели принимаем искомое количество сырья j -го вида, используемого для получения смеси, равным x_j .

Сформулированные требования теперь можно записать следующим образом.

Определить множество неотрицательных переменных $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), которые удовлетворяют условиям:

по качеству смеси:

$$b'_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b''_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

по ограничению ресурсов сырья:

$$x_j \leq d_j \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Целевая функция, представляющая стоимость смеси равна

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min.$$

Рассмотрим пример построения математической модели задачи о смесях.

Известно, что откорм животных экономически выгоден при условии, когда животное получает в дневном рационе не менее 6 единиц питательного вещества А, не менее 12 единиц вещества В, не менее 4 единиц вещества С. Для откорма животных используются два вида кормов. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и стоимость 1 кг корма приведены в таблице:

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма	
	I вида	II вида
А	2	1
В	2	4
С	0	4
Стоимость 1 кг корма	5	6

Определить, какое количество каждого вида корма необходимо расходовать, чтобы общие затраты на откорм были минимальными.

Построим математическую модель. Обозначим через x_1 и x_2 количество входящего в оптимальный рацион корма соответственно I и II вида. При этом ограничения по содержанию питательных веществ А, В и С будут выражены следующим неравенствами:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &\geq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 12, \\ 0x_1 + 4x_2 &\geq 4. \end{aligned}$$

Требование неотрицательности $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Целевая функция

$$z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \min.$$

Задача о раскрое материалов

Раскрой материалов – необходимый этап большинства производств. Сущность оптимального раскроя материалов состоит в определении такого плана раскроя, при котором получается необходимый ассортимент заготовок, а отходы (по длине, площади или весу) сводятся к минимуму.

Сформулируем задачу раскроя в общем виде. Исходный материал следует раскроить на m видов заготовок, причем заготовок i -го вида должно получиться A_i штук. Раскроить материал можно n различными способами. Известны количество заготовок i -го вида, получаемых при раскрое единицы исходного материала по j -му способу ($j = 1, 2, \dots, n$) b_{ij} , а также

величина отхода, получаемого при раскрое единицы исходного материала по j -му способу c_j . Требуется определить такой план раскроя исходного материала, который обеспечит получение необходимого количества заготовок каждого вида с минимальными отходами.

Для составления математической модели принимаем искомое количество единиц исходного материала, которое следует раскроить по способу j , равным x_j .

Сформулированные требования можно записать следующим образом.

Определить множество неотрицательных переменных $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), которые удовлетворяют условию получения необходимого количества заготовок каждого вида

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} x_j = A_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

и при этом целевая функция, выражающая суммарные отходы от раскроя по всем способам, равна

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min.$$

Рассмотрим пример построения математической модели задачи о раскрое.

Рулоны ткани длиной 35 метров следует разрезать на куски 13,5; 10; 7 м в количестве 50, 70 и 80 штук соответственно.

Определить оптимальный план раскроя ткани.

Построению математической модели задачи должна предшествовать работа по составлению таблицы возможных способов раскроя ткани на требуемые куски:

Длина кусков ткани	Способы раскроя одного рулона ткани							
	1	2	3	4	5	6	7	8
13,5			1	2	1			1
10	1	3	1		2	2		
7	3		1	1		2	5	3
Отходы от раскроя одного рулона (м)	4	5	4,5	1	1,5	1	0	0,5

Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_8$ количество рулонов ткани, которые следует раскроить соответственно по первому, второму и т.д. способам.

При этом ограничения по количеству необходимых кусков ткани будут выражены следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} 1x_3 + 2x_4 + 1x_5 + 1x_8 &= 50, \\ 1x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 2x_5 + 2x_6 &= 70, \\ 3x_1 + 1x_3 + 1x_4 + 2x_6 + 5x_7 + 3x_8 &= 80. \end{aligned}$$

Требования неотрицательности

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 8).$$

Целевая функция

$$z = 4x_1 + 5x_2 + 4,5x_3 + 1x_4 + 1,5x_5 + 1x_6 + 0,5x_8 \rightarrow \min.$$

Транспортная задача

Рассмотрим постановку однопродуктовой (однотоварной) транспортной задачи (например, задачи о перевозке угля в рамках региона).

Пусть имеется m поставщиков с резервами (запасами) товара a_i единиц ($i = 1, 2, \dots, m$). Имеется соответственно n потребителей с потребностями b_j единиц ($j = 1, 2, \dots, n$). Известны транспортные расходы по перевозке единицы продукции от i -го поставщика j -му потребителю, которые равны c_{ij} .

Следует составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, при котором весь продукт из пунктов производства вывозится, запросы потребителей удовлетворяются, а общая стоимость перевозок является минимальной. Для составления математической модели транспортной задачи принимаем искомое количество продукта, перевозимого от i -го поставщика j -му потребителю равным x_{ij} . Задание транспортной задачи и ее решение удобно осуществлять с помощью транспортной таблицы (матрицы) следующего вида:

Потр. Пост.	b_1	b_2	$\dots$	b_j	$\dots$	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1j} x_{1j}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2j} x_{2j}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	$\dots$	c_{ij} x_{ij}	$\dots$	c_{in} x_{in}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mj} x_{mj}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}

Если сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_m$ равна сумме $b_1 + b_2 + \dots + b_n$, то в таком случае весь товар будет вывезен от поставщиков и весь необходимый товар будет получен каждым из потребителей. Для этого случая составим математическую модель, описывающую однопродуктовую транспортную задачу.

Определить множество переменных $x_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющих условиям вывоза всего продукта из пунктов производства

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

условиям удовлетворения запросов потребителей

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}),$$

при которых достигает минимума целевая функция

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

Рассмотрим пример построения математической модели транспортной задачи.

С трех складов необходимо поставить груз четырем предприятиям. Стоимость перевозки 1 т груза, резервы поставщиков, а также потребности предприятий представлены в таблице:

Резервы поставщиков, т	Объем потребностей предприятий, т			
	60	40	90	10
	Стоимость перевозки 1 т груза, грн/т			
50	5	9	7	1
70	2	4	10	2
80	4	5	2	1

Составить такой план перевозки груза от поставщиков потребителям, чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальными.

Составим математическую модель. Обозначим через x_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$) количество единиц груза, перевозимого от i -го поставщика на j -е предприятие. Тогда условия вывоза и доставки имеющегося и необходимого количества груза обеспечиваются за счет выполнения следующих соотношений:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 70, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 80, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 60, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 40, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 90, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 10. \end{aligned}$$

Требование неотрицательности

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4).$$

Целевая функция

$$\begin{aligned} z &= 5x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + 1x_{14} + \\ &+ 2x_{21} + 4x_{22} + 10x_{23} + 2x_{24} + \\ &+ 4x_{31} + 5x_{32} + 2x_{33} + 1x_{34} \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Задача об оптимальных назначениях

Имеется n специалистов и n работ, на которые могут быть направлены специалисты. Пусть известна эффективность (например, в баллах) от назначения каждого i -го ($i = 1, 2, \dots, n$) специалиста на каждую j -ю работу. Эту эффективность будем обозначать через c_{ij} . Требуется таким образом назначить специалистов на работы, чтобы итоговая (суммарная) эффективность была максимальной.

Так как количество специалистов равно количеству работ и каждый из них может быть назначен только на одну работу, то переменная x_{ij} , определяющая назначение i -го специалиста на j -ю работу, может принимать только два значения:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i - \text{й специалист назначается на } j - \text{ю работу,} \\ 0, & \text{если не назначается.} \end{cases}$$

Математическая модель задачи. Ограничения:

1) каждый специалист может выполнять только одну работу

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, n};$$

2) каждая работа может выполняться только одним работником

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = \overline{1, n};$$

3) условие изменения переменной

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}. \\ 1, & \end{cases}$$

Целевая функция – максимизация суммарной эффективности

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max.$$

Приведем пример построения математической модели задачи об оптимальных назначениях.

Необходимо оптимальным образом распределить пять работников для выполнения каждой из пяти работ. Производительность указана в таблице:

Работник	Работа				
	I	II	III	IV	V
1	3	4	1	2	5
2	2	7	6	3	1
3	8	3	2	4	6
4	7	9	2	2	6
5	3	6	8	3	2

Составим математическую модель задачи.

Обозначим через x_{ij} ($i = \overline{1, 5}; j = \overline{1, 5}$) переменную, равную 1, если i -й работник назначен на выполнение j -й работы, и равную 0 в противном случае.

Условие выполнения каждым работником только одной работы выразится равенствами

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1, \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1, \end{cases}$$

а условие выполнения каждой работы только одним работником – равенствами

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 1, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &= 1, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 1. \end{aligned}$$

Целевая функция – максимизация суммарной производительности:

$$\begin{aligned} z = & 3x_{11} + 4x_{12} + 1x_{13} + 2x_{14} + 5x_{15} + \\ & + 2x_{21} + 7x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} + 1x_{25} + \\ & + 8x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + 4x_{34} + 6x_{35} + \\ & + 7x_{41} + 9x_{42} + 2x_{43} + 2x_{44} + 6x_{45} + \\ & + 3x_{51} + 6x_{52} + 8x_{53} + 3x_{54} + 2x_{55} \rightarrow \max. \end{aligned}$$

§ 3. ПРИВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ.

В самом общем виде задача линейного программирования ставится следующим образом.

Найти значения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые бы удовлетворяли условиям

[illegible]

и обеспечивали требуемый экстремум (минимум или максимум) заданной целевой функции

$$Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n. \quad (3.2)$$

Для решения задачи с помощью универсальных методов она должна быть приведена к каноническому виду, который представляет собой следующее:

Найти такие значения $x_1, \dots, x_n$, которые подчиняются условиям

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2, \\ \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (3.4)$$

и приносят минимум целевой функции

$$Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n. \quad (3.5)$$

С помощью простых преобразований любая задача линейного программирования может быть сведена к каноническому виду, т.е. представлена в форме записей (3.3), (3.4), (3.5). Кратко рассмотрим эти преобразования.

1. Из условий (3.3) ясно, что в каноническом задании на все переменные задачи наложено требование неотрицательности. Во многих экономических задачах это так и бывает. Но в общем случае могут встретиться переменные неотрицательные, неположительные и такие, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. И в этом общем случае задачу надо свести к таким переменным, каждая из которых подчинялась бы требованию неотрицательности. Покажем, как это делать. Пусть по

отношению к некоторой переменной x_k имеется требование неотрицательности, т.е. $x_k \geq 0$. Тогда эта переменная никаким преобразованиям не подвергается. Пусть по отношению к некоторой переменной x_p имеется требование $x_p \leq 0$. Это требование противоположно тому, что нам надо. Поэтому мы вводим новую переменную $\bar{x}_p = -x_p$, но уже по отношению к переменной $\bar{x}_p$ мы можем утверждать $\bar{x}_p \geq 0$. Если же по отношению к некоторой переменной x_q нет требования по знаку, т.е. она может принимать любые значения (положительные и отрицательные), то переменная x_q заменяется разностью неотрицательных переменных. Именно, вводятся новые дополнительные переменные $x'_q \geq 0$ и $x''_q \geq 0$ и делается замена $x_q = x'_q - x''_q$. В результате этой замены переменная x_q исключается из задачи, а в задаче остаются переменные x'_q , x''_q , на которые уже наложено требование неотрицательности. Итак, переменные, на которые наложено требование неотрицательности, остаются в задаче без изменения; переменные, на которые наложено требование неположительности заменяются переменными с противоположным знаком; переменные, которые могут менять знак, заменяются разностью новых неотрицательных переменных.

2. Условия (3.4) представлены в виде уравнений. Это означает, что любое из имеющихся в условии неравенств (кроме условий неотрицательности переменных) должно быть переделано в уравнение. Делается это с помощью введения дополнительных неотрицательных балансирующих переменных. Пусть, например, некоторое условие задано в виде неравенства

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i.$$

Тогда вводим дополнительную балансирующую переменную $x_{n+1} \geq 0$ прибавлением к меньшей части неравенства:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n + x_{n+1} = b_i.$$

Если в исходном задании имеется r неравенств, то вводится r дополнительных переменных $x_{n+1} \geq 0$, $x_{n+2} \geq 0$, ..., $x_{n+r} \geq 0$.

3. В одних задачах в зависимости от экономического смысла целевой функции требуется осуществлять максимизацию, в других – минимизацию. Между процедурами максимизации и минимизации имеется следующая связь: $\max z(x) = -\min [-z(x)]$ и $\min z(x) = -\max [-z(x)]$. В каноническом виде мы условились ввести минимизацию для целевой функции (3.5). Следовательно, если в первоначальном условии задачи требуется минимизировать $z(x)$, то никаких изменений не делается. Если же требуется максимизировать $z(x)$, мы переходим к функции $[-z(x)]$ и ее уже минимизируем.

Пример. Пусть задана следующая задача линейного программирования:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 12, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 6, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 8, \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \rightarrow \max.$$

В нашей задаче количество переменных $n = 4$, количество ограничений (без требований неотрицательности) $m = 3$. Заданную задачу необходимо преобразовать к каноническому виду. На переменные x_1 и x_2 наложено требование неотрицательности. Переменную x_3 заменяем переменной $\bar{x}_3 = -x_3$, считая уже $\bar{x}_3 \geq 0$. Переменная x_4 должна быть заменена разностью неотрицательных переменных $x'_4 \geq 0$ и $x''_4 \geq 0$. Именно $x_4 = x'_4 - x''_4$. И еще надо ввести две дополнительные балансирующие переменные для преобразования двух неравенств в уравнения. Для этого введем $x_5 \geq 0$ и $x_6 \geq 0$. Кроме всего этого от целевой функции $z(x)$ перейдем к функции $\bar{z}(x) = -z(x)$. Учитывая сказанное, задача примет вид

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \bar{x}_3 \geq 0, \quad x'_4 \geq 0, \quad x''_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4\bar{x}_3 + x'_4 - x''_4 + x_5 = 12, \\ -2x_1 + 3x_2 - \bar{x}_3 - 2x'_4 + 2x''_4 + x_6 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + \bar{x}_3 + 3x'_4 - 3x''_4 = 8, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bar{z} = -z &= -[2x_1 - 3x_2 - \bar{x}_3 - 2x'_4 + 2x''_4] = \\ &= -2x_1 + 3x_2 + \bar{x}_3 + 2x'_4 - 2x''_4 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Замечание. Все заменяющие переменные можно было бы ввести с новыми индексами $j > n$, не пользуясь черточками или штрихами над обозначающей буквой.

§ 4. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Любая задача линейного программирования (ЗЛП) имеет несложную геометрическую интерпретацию. Пусть, например, задача имеет самый общий вид (3.1)-(3.2). Так как полный набор переменных этой задачи состоит из n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и переменной z , то прежде всего задачу самым естественным образом рассматривать в $(n + 1)$ -мерном пространстве. И вся интерпретация состоит в том, что в множестве точек, удовлетворяющих условиям (3.1), надо найти такую точку (или такие точки), в которой (которых) бы координата z целевой функции принимала бы экстремальное значение (максимум или минимум в зависимости от требований задачи). Однако, пользуясь уровнями целевой функции ($z = \text{const}$), можно задачу интерпретировать и в n -мерном пространстве. Именно, совокупность условий (3.1) будет «высекать» в n -мерном пространстве выпуклое многогранное множество, а изоцели $z = \text{const}$ (т.е. уровни целевой функции) будут выявлять экстремальные точки (если они существуют) в области допустимых решений. А так как $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$, то уровнями одного и того же значения целевой функции будут гиперплоскости $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \text{const}$. Отсюда вытекает общая рекомендация для практически решаемых задач. Сначала строят область допустимых решений, а затем по прохождению изоцелей-гиперплоскостей $z = \text{const}$ через область делают вывод об экстремальных решениях рассматриваемой задачи.

Поскольку для линейной задачи изоцели представляют собой семейство параллельных гиперплоскостей $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \text{const}$, то для поиска оптимальных точек в области допустимых решений очень удобно пользоваться градиентом целевой функции

$$\text{grad } z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right) = (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Вектор-градиент как раз указывает направление наибольшего возрастания функции. Зная градиент целевой функции, нетрудно построить уровни этой функции.

Подытоживая сказанное, приведем два примера.

Пример А. В § 2 был рассмотрен конкретный пример составления математической модели экономической задачи. Модель задачи предстала в виде (2.1)-(2.2). Решение начнем с построения области допустимых решений. В условиях (2.1) имеется шесть неравенств. Для построения области допустимых решений надо выделить то геометрическое место точек на рис.4.1, которое подчиняется всем ограничениям (2.1). Итак, вводим первое ограничение $x_1 \geq 0$. Границей этого нестрогого неравенства является прямая $x_1 = 0$ (это ось x_2). Согласно первому неравенству нам подходят все точки правой полуплоскости и сама ось x_2 . Второе неравенство $x_2 \geq 0$ с границей $x_2 = 0$ (ось x_1) разрешает нам точки оси x_1 и всей верхней полуплоскости. Если же рассматривать одновременно требования первого и второго неравенств, то нам будут подходить точки первого координатного угла системы координат x_1, x_2 вместе с положительными

полуосями $0x_1$ и $0x_2$. Вводим третье неравенство $6x_1 + 3x_2 \leq 60$. Границей этого неравенства является прямая $6x_1 + 3x_2 = 60$, которую мы проводим на плоскости через точки ее пересечения с осями К (0, 20) и L (10, 0). Взяв в качестве контрольной точки начало координат О (0, 0), мы проверяем зону допустимости. Проверка даст $6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 < 60$, т.е. по отношению к третьей границе допускается полуплоскость книзу. Объединяя требование трех первых неравенств, мы получаем допустимое множество в виде треугольника OKL. Вводим четвертое неравенство $2x_1 + 5x_2 \leq 40$ с границей $2x_1 + 5x_2 = 40$, проходящей через точки пересечения с осями М(0, 8) и N(20, 0). Если взять в качестве контрольной точки начало координат О (0, 0), то мы и здесь наблюдаем признак допустимости, именно $2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 < 40$. Теперь уже четырем условиям вместе будет отвечать четырехугольник OMCL. Остается ввести еще два ограничивающих неравенства $9x_1 \leq 81$ с границей $9x_1 = 81$ и $8x_2 \leq 56$ с границей $8x_2 = 56$. Граница $9x_1 = 81$ есть вертикальная прямая ((5) на рис. 4.1), граница $8x_2 = 56$ имеет отметку (6) на этом же рисунке. Контроль показывает, что пятое ограничение допускает левую полуплоскость от вертикальной границы (5), а шестое ограничение – нижнюю полуплоскость от горизонтальной границы (6). В целом все шесть неравенств на плоскости x_1, x_2 выделяют шестиугольник OABCDE.

Переходим ко второй части решения нашей задачи, к определению оптимальной точки в найденной области допустимых решений. Для этого сначала определяем градиент целевой функции (2.2)

$$\text{grad } z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) = (4, 5).$$

Вектор (4,5) изобразим в виде направленного отрезка, исходящего из точки О(0, 0). Тогда линии уровня функции z будут представлены сеткой параллельных прямых, которые перпендикулярны к вектору $\text{grad } z$ и возрастают в сторону, указываемую направлением градиента. На рис. 4.1 показан градиент и уровни целевой функции. По расположению изоцелей очевидно, что максимум целевой функции имеет место в точке С. При достаточно хорошем масштабе, выбранном для рабочего рисунка, координаты оптимальной точки определяются непосредственно на рисунке. Если же выбранный масштаб такой, что мы затрудняемся определить координаты оптимальной точки, то их можно доопределить аналитически, выяснив, какие граничные прямые пересекаются в ней. В нашем примере в точке С пересекаются границы условий (3) и (4). Тогда для точного определения координат С решаем совместно следующие два уравнения:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 60, \\ 2x_1 + 5x_2 = 40. \end{cases}$$

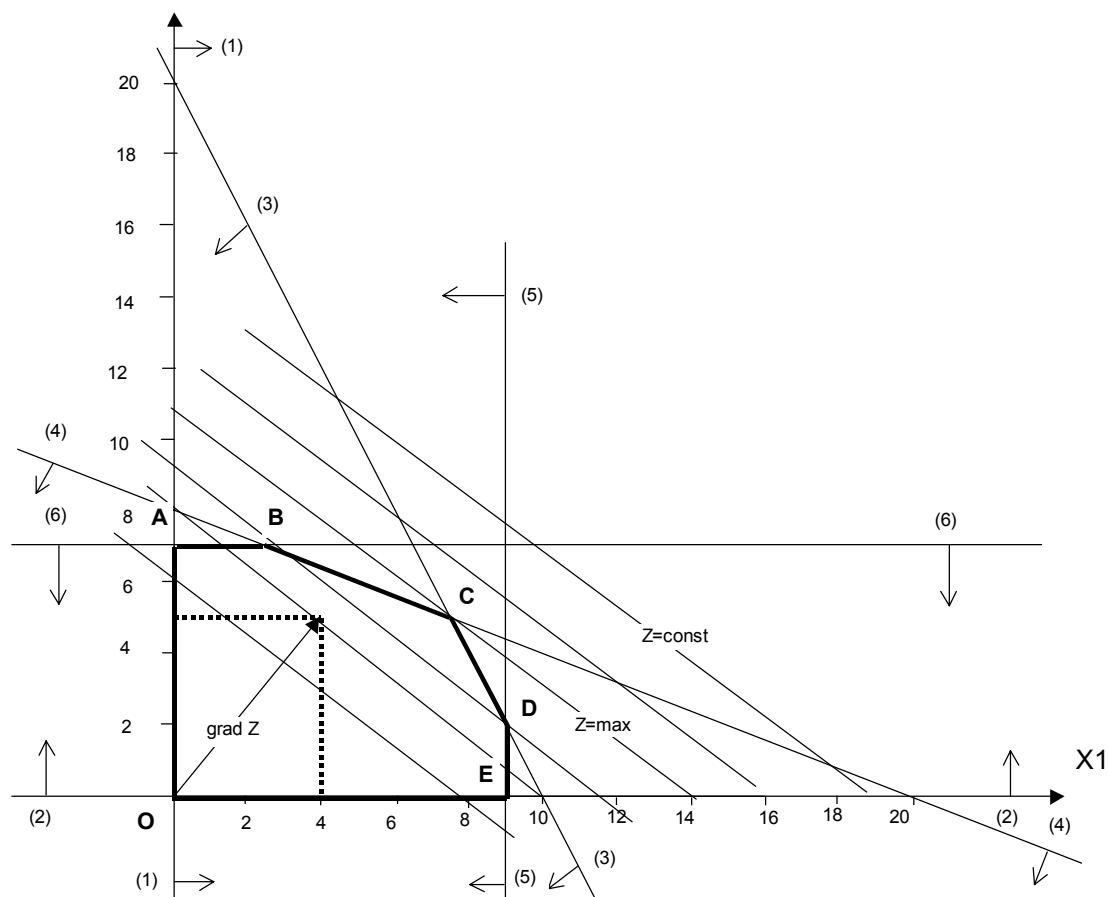


Рис.4.1.

Решая эту систему по методу Гаусса, получаем $x_1 = 7,5$ и $x_2 = 5$. Итак, максимум заданной целевой функции $z = 4x_1 + 5x_2$ наступает в точке $C(7,5; 5)$ и при этом $z_{max} = z(C) = 4 \cdot 7,5 + 5 \cdot 5 = 30 + 25 = 55$. Кстати, на рис. 4.1 видно, что минимум наступает в точке $O(0, 0)$ и соответственно $z_{min} = 4 \cdot 5 + 5 \cdot 0 = 0$.

Пример Б.

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

$$z = x_1 + 2x_3 + x_5 \rightarrow \min. \quad (4.3)$$

В этом примере $n = 5$ и линейно независимых уравнений $m = 3$. Так как $n - m = 2$, то задача может быть решена графически. Но нам надо предварительно выделить базисные переменные и исключить их для обеспечения возможности графического решения. Постараемся выделить в качестве базисных переменных x_1, x_2, x_3 . Переменная x_1 в первом уравнении может быть использована в качестве базисной. Выделим x_2 во втором уравнении. Для этого мы из первого уравнения вычтем второе. Наша система уравнений примет вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_5 = 3, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

В системе (4.4) из второго уравнения вычтем третье, тогда получим

$$\begin{cases} x_1 + 2x_5 = 3, \\ x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Тем самым мы от системы (4.2) перешли к эквивалентной системе (4.5) с уже выделенными базисными переменными x_1, x_2, x_3 . Из системы (4.5) легко найти выражения базисных переменных через свободные переменные x_4 и x_5 . Делаем это:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_5, \\ x_2 = 1 - 2x_4 + 2x_5, \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5. \end{cases} \quad (4.6)$$

Воспользовавшись (4.6), можно целевую функцию (4.3) представить через свободные переменные x_4, x_5 :

$$\begin{aligned} z = x_1 + 2x_3 + x_5 &= (3 - 2x_5) + 2(1 + x_4 - x_5) + x_5 = \\ &= 3 - 2x_5 + 2 + 2x_4 - 2x_5 + x_5 = 2x_4 - 3x_5 + 5. \end{aligned}$$

Итак, для целевой функции мы получили выражение через свободные переменные x_4 и x_5 .

Далее, согласно (4.1) каждая из переменных должна подчиняться условию неотрицательности. Эти условия в совокупности с равенствами (4.6) позволят нам вывести базисные x_1, x_2, x_3 из условий. Именно, имея в виду, что $x_1 \geq 0$ и что из (4.6) $x_1 = 3 - 2x_5$, мы можем эти два условия заменить неравенством $3 - 2x_5 \geq 0$. Аналогично, исходя из исходных условий $x_2 \geq 0$ и $x_2 = 1 - 2x_4 + 2x_5$ записываем неравенство $1 - 2x_4 + 2x_5 \geq 0$. Соответственно, из условий $x_3 \geq 0$ и $x_3 = 1 + x_4 - x_5$ имеем неравенство $1 + x_4 - x_5 \geq 0$. Все это нам позволяет перейти к задаче с меньшим количеством неизвестных:

$$\left. \begin{aligned} x_4 &\geq 0, \quad x_5 \geq 0; \\ 2x_5 &\leq 3, \\ 2x_4 - 2x_5 &\leq 1, \\ -x_4 + x_5 &\leq 1, \\ z = 2x_4 - 3x_5 + 5 &\rightarrow \min. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Количество неизвестных задачи (4.7) позволяет провести графическое решение. Определив оптимальные значения переменных x_4^0 и x_5^0 , мы затем определяем с помощью (4.6) оптимальные значения переменных x_1^0, x_2^0, x_3^0 . На рис. 4.2 представлено графическое решение задачи (4.7). Областью допустимых решений на этом рисунке является пятиугольник OABCD. По градиенту к

целевой функции $\text{grad } z = (2, -3)$ и сопутствующим ему изоцелеям, т.е. с помощью прямых $z = c_1, z = c_2, \dots, z = c_k$, определяем точку В, как приносящую нам минимум ($\min$) в рамках допустимой области OABCD. Координаты точки В очевидны из рисунка, но в общем случае могут быть точно определены как пересечение границ $x_5 = \frac{3}{2}$ и $-x_4 + x_5 = 1$.

Итак, для точки В имеем $x_4^0 = \frac{1}{2}, x_5^0 = \frac{3}{2}$. При этом

$z_{\min} = 2x_4^0 - 3x_5^0 + 5 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 5 = \frac{3}{2}$. В силу (4.6) получаем $x_1^0 = 0, x_2^0 = 3, x_3^0 = 0$. Итак, получаем оптимальное решение для задачи (4.1)-(4.3):

$$X^0 = (0, 3, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \quad Z_{\min} = \frac{3}{2}.$$

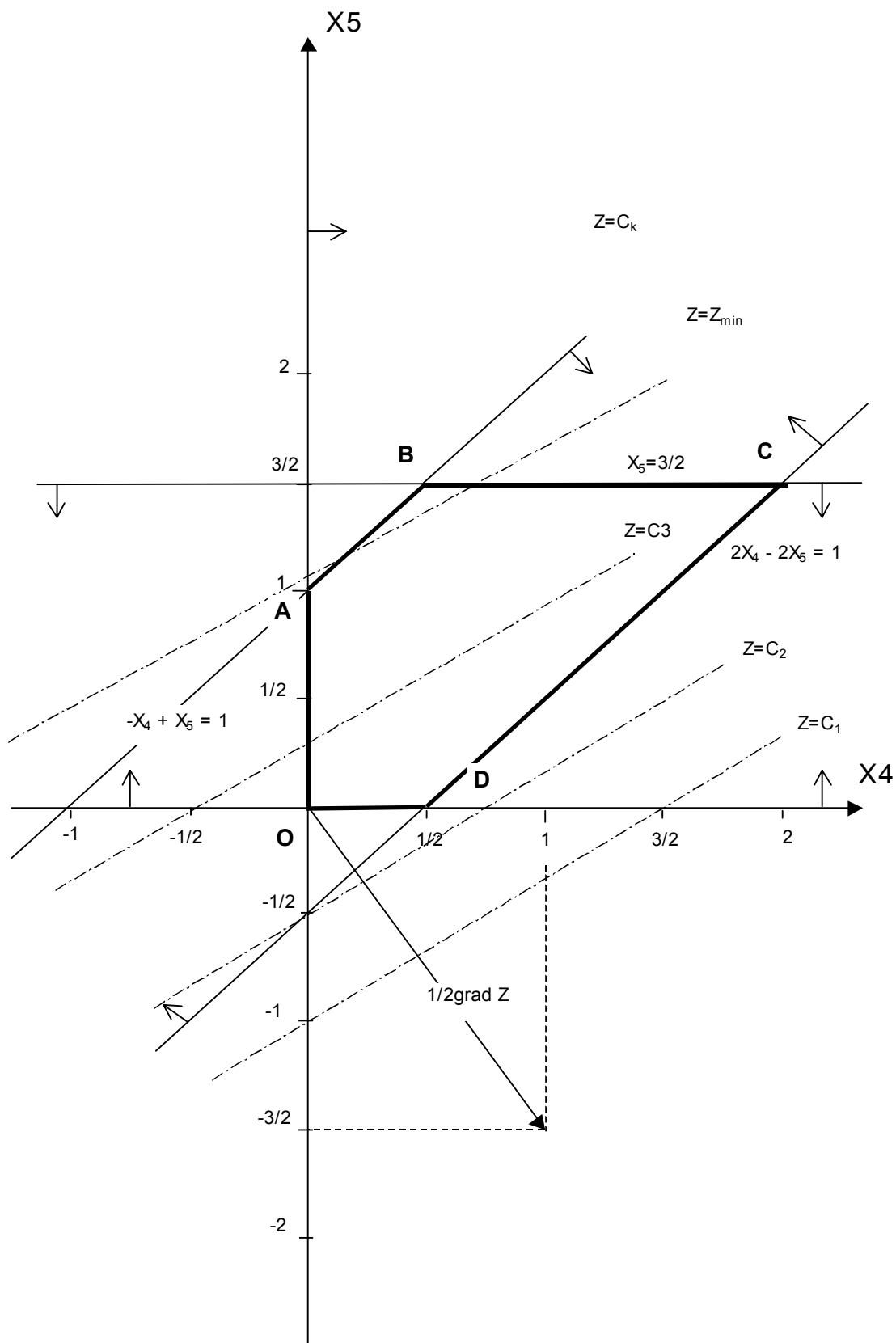


Рис 4.2.

§ 5. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Симплекс-метод является точным методом и принадлежит к числу методов последовательного улучшения плана. Его сущность заключается в том, что вначале указывается способ построения начального опорного плана и критерий его оценки на оптимальность. После такой оценки делается вывод либо об оптимальности опорного плана, либо о необходимости перехода к новому плану. Причем переход к новому плану осуществляется таким образом, что значение целевой функции при этом плане будет, по крайней мере, не худшим (с точки зрения критерия оптимальности), чем при предыдущем.

Необходимо четко представлять, что ограничения задач линейного программирования геометрически представляют собой выпуклые многогранные множества, число угловых точек (угловая точка является геометрическим образом опорного плана) которых можно подсчитать по формуле $K \leq C_n^r$, где n - число векторов, образующих систему ограничений, r - ранг этой системы векторов. Для задач, имеющих практическое приложение, K является достаточно большим числом. Например, задача линейного программирования, имеющая размеры матрицы системы ограничений $A_{4 \times 10}$, содержит $K_{\text{оп.пл.}} \leq C_{10}^4 = 210$ опорных планов. Исходя из теоремы о целевой функции ЗЛП, линейная форма может достигать оптимальное значение в опорных планах. Поэтому для решения задачи можно просто перебрать значения целевой функции во всех опорных планах и выбрать среди них наименьшее или наибольшее. Однако такой простой перебор не является целесообразным даже для решения задач с помощью современных быстродействующих ЭВМ. Симплекс-метод дает способ целенаправленного перебора опорных планов. Он позволяет существенно сократить количество планов, выбираемых для проверки на оптимальность.

Рассмотрим пример решения задачи линейного программирования симплекс-методом. Будем рассматривать такую процедуру симплекс-алгоритма, которая требует наличия канонической формы модели ЗЛП. При этом система ограничений задачи должна содержать не менее m единичных векторов (для удобства решения задачи величина m принимается равной числу ограничений задачи, что в свою очередь принимается равным рангу матрицы системы ограничений задачи, т.е. матрица, составленная из коэффициентов при переменных задачи, должна быть невырожденной и содержать m единичных столбцов).

Пусть нам задана следующая задача линейного программирования:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \leq 60, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 9x_1 \leq 81, \\ 8x_2 \leq 56, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (5.2)$$

$$z = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \quad (5.3)$$

Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи представляется в стандартной форме записи и имеет вид (5.1 – 5.3).

Прежде чем решить задачу симплекс-методом, необходимо привести ее модель к канонической форме. Особенности канонической формы модели состоят в том, что система ограничений задачи (5.1) должна быть представлена в форме уравнений, условия неотрицательности накладываются на все переменные, а целевая функция стремится к min. Воспользовавшись теоремой связи между формами моделей задач линейного программирования, преобразуем исходную модель задачи путем введения балансовых переменных следующим образом:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_3 & = 60, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 & = 40, \\ 9x_1 + x_5 & = 81, \\ 8x_2 + x_6 & = 56, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}), \quad (5.5)$$

$$z' = -4x_1 - 5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \rightarrow \min \quad (5.6)$$

Студент должен четко представлять, что смысл применения вышеуказанной теоремы к преобразованию исходной системы ограничений сводится к введению в каждое из условий так называемых балансовых переменных x_3, x_4, x_5, x_6 , которые должны быть обязательно неотрицательные, а в целевую функцию они вводятся с коэффициентом 0. Целевая функция сводится к min путем замены знаков коэффициентов при переменных на противоположные. Итак, первый шаг алгоритма, заключающийся в приведении исходной задачи линейного программирования к канонической форме, выполнен. Второй шаг заключается в том, что необходимо выбрать начальный опорный план задачи, а для этого предварительно необходимо выбрать исходный базис заданной системы векторов (речь идет о векторах

$$\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \overline{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

исходной системы ограничений).

Еще из курса высшей математики студенты должны усвоить понятие базиса и способы выделения базиса из заданной системы векторов. Если речь идет о выделении любого базиса, то проще всего брать единичный базис, т.е. базис, образованный из единичных векторов, т.к. они всегда линейно независимы. Для данной задачи таким базисом будет $B_1 = (\overline{A}_3, \overline{A}_4, \overline{A}_5, \overline{A}_6)$. Отсюда следует, что переменные x_3, x_4, x_5, x_6 будут базисными. Зная, что опорный план – это допустимое базисное решение системы ограничений (5.4), легко можно его найти, придав свободным переменным x_1, x_2 нулевое значение.

Итак, начальным опорным планом для решения задачи будет вектор

$$\bar{X}_{B_1} = (0; 0; 60; 40; 81; 56).$$

Определим теперь значение целевой функции при этом опорном плане, для чего в выражение целевой функции вместо переменных подставим значения координат опорного плана:

$$z(\bar{X}_{B_1}) = -4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 60 + 0 \cdot 40 + 0 \cdot 81 + 0 \cdot 56 = 0$$

Таким образом, нам необходимо проверить на оптимальность опорный план $\bar{X}_{B_1} = (0; 0; 60; 40; 81; 56)$ и $z(\bar{X}_{B_1}) = 0$.

Для получения критерия оптимальности воспользуемся выводами из теоремы оптимальности и следствия и рассчитаем оценки оптимальности для всех векторов задачи. Для удобства дальнейших расчетов данные исходной задачи, записанной в канонической форме, заносятся в специально составленную для этого симплекс-таблицу 5.1, которая имеет следующий вид:

Таблица 5.1.

B_1	$\bar{C}_{B_1}$	$\bar{B}_1$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$
			-4	-5	0	0	0	0
$\bar{A}_3$	0	60	6	3	1	0	0	0
$\bar{A}_4$	0	40	2	5	0	1	0	0
$\bar{A}_5$	0	81	9	0	0	0	1	0
$\bar{A}_6$	0	56	0	8	0	0	0	1
Z'_j		0	4	5	0	0	0	0
$-C_j$								

Опишем симплекс-таблицу 5.1. В первой строке шапки симплекс-таблицы указаны векторы исходной системы ограничений задачи, а во второй – коэффициенты при переменных в целевой функции задачи. В первом столбце (столбец $\bar{B}_1$) указаны векторы, образующие базис заданной системы векторов, а во втором столбце – коэффициенты целевой функции при базисных переменных. Во всех остальных клетках таблицы (кроме последней строки, о которой будет сказано ниже) стоят коэффициенты разложения соответствующих векторов по векторам базиса.

Так как для нашей задачи базис выбран единичным, то коэффициентами разложения любого вектора по векторам единичного базиса являются координаты самого вектора – в этом как раз и заключается удобство для расчета выбора такого начального базиса. А поэтому в первой симплекс-таблице на этом месте будут стоять коэффициенты при переменных исходной системы ограничений.

Особо необходимо сказать о третьем столбце (столбец $\bar{B}$). В нем стоят значения базисных переменных в соответствующем опорном плане. Студент должен точно уяснить, что опорный план – это по-другому названное допустимое решение, а поэтому для того, чтобы выписать опорный план, соответствующий

симплекс-таблице, необходимо свободным переменным придать нулевое значение, а значение базисных переменных выбирается из столбца $\bar{B}$. Поэтому, заполнив симплекс-таблицу 5.1, мы можем сразу же записать $\bar{X}_{B_1} = (0;0;60;40;81;56)$.

Последняя строка называется индексной. В третьем столбце этой строки стоит значение целевой функции при проверяемом опорном плане $z(\bar{X}_{B_1}) = 0$, а во всех остальных клетках индексной строки стоят оценки оптимальности $z_j - C_j$ для всех векторов исходной задачи. Здесь z_j - значение целевой функции, если в нее вместо переменных подставить коэффициенты разложения вектора $\bar{A}_j$ по векторам базиса, а C_j - коэффициент целевой функции при соответствующей переменной. Для первой симплекс-таблицы коэффициенты индексной строки рассчитываются по следующим формулам:

$$z(\bar{X}_{B_1}) = \sum_{i=1}^m C_i^6 \cdot b_i, \quad (5.7)$$

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^m c_i^6 x_{ij} - c_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5.8)$$

Эти формулы легко реализуются на составленной таблице, так как суммы в них представляют скалярное произведение вектора $\bar{C}_{B_1}$ соответственно на все остальные векторы таблицы.

Проверка выбранного опорного плана на оптимальность осуществляется по оценкам оптимальности. При этом руководствуются следующими соображениями, вытекающими из теоремы оптимальности.

Проверяемый опорный план будет оптимальным в том случае, если оценки оптимальности для всех векторов будут неположительными. Воспользуемся этим критерием для проверки на оптимальность опорного плана, представленного в таблице 5.1. Проверяемый опорный план $\bar{X}_{B_1} = (0;0;60;40;81;56)$ не является оптимальным, т.к. в индексной строке имеются положительные оценки для векторов $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$. Необходимо перейти к новому опорному плану, а это значит, что нужно выбрать и новый базис.

Для перехода к новому базису необходимо в базис ввести один из свободных векторов, а т.к. он не может содержать более четырех векторов (это число векторов совпадает с рангом матрицы системы ограничений), необходимо из базиса вывести один из базисных векторов.

Студенты должны четко уяснить, что в базис можно вводить только вектор, которому соответствует положительная оценка оптимальности. Если же таких оценок несколько, то в базис вводится вектор, которому соответствует $\max_{z_j - c_j > 0} \{\theta_{0j}(z_j - c_j)\}$, где θ_{0j} - симплексное отношение для вектора $\bar{A}_j$. На практике часто для уменьшения предварительных расчетов в базис вводят вектор, которому соответствует наибольшая положительная оценка оптимальности. Мы так и поступим. В нашем случае в базис будем вводить вектор $\bar{A}_2$, т.к. ему соответствует наибольшая из положительных оценок $(z_2' - c_2) = 5$. Столбец, который соответствует вектору $\bar{A}_2$, вводящемуся в базис, называется

направляющим столбцом.

Для определения вектора, выводящегося из базиса, определяется симплексное отношение по формуле:

$$\theta_{0j} = \min_{x_{ij} > 0} \left\{ \frac{b_i}{x_{ij}} \right\}, \quad (5.9)$$

здесь j - индекс вектора, вводящегося в базис.

$$\text{В нашем случае } j = 2 \text{ и } \theta_{02} = \min \left\{ \frac{60}{3}; \frac{40}{5}; \frac{56}{8} \right\} = \frac{56}{8}.$$

Симплексное отношение соответствует вектору $\bar{A}_6$, а значит этот вектор будет выводиться из базиса. Строка, соответствующая базисному вектору $\bar{A}_6$, называется направляющей строкой, а на пересечении направляющей строки и направляющего столбца стоит разрешающий элемент. Выделим направляющий столбец и направляющую строку. Теперь базис будет состоять из векторов $(\bar{A}_3, \bar{A}_4, \bar{A}_5, \bar{A}_2) = B_2$ и необходимо пересчитать симплексную таблицу.

Симплексные таблицы пересчитываются по правилу полных жордановых исключений. Оно в литературе известно в своих двух вычислительных модификациях, которые можно применять независимо друг от друга.

Модификация 1 (правило 1). Воспользуемся двумя элементарными преобразованиями Гаусса:

А) элементы направляющей строки можно делить на разрешающий элемент;

Б) элементы направляющей строки умножаем на нужное число и осуществляем векторное сложение с определяемой другой строкой таблицы (в т.ч. и с индексной строкой).

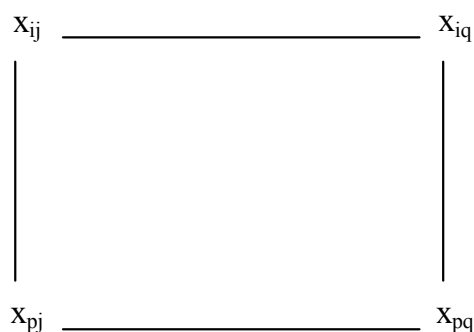
С помощью вышеуказанных элементарных преобразований делают так, чтобы направляющий столбец стал единичным, т.е. таким, как тот столбец, вектор которого выводится из базиса.

Модификация 2 (правило четырехугольника):

- элементы направляющей строки делятся на разрешающий элемент;
- направляющий столбец записывается единичным;
- те строки и столбцы, которые имеют в направляющем столбце или строке нули, записываются в новую симплекс-таблицу без изменений;
- элементы таблицы, не стоящие в направляющей строке или направляющем столбце, пересчитываются по следующему правилу пересчета.

Элемент новой симплекс-таблицы равен элементу, стоящему на этом же месте в предыдущей симплекс-таблице, минус произведение элементов, стоящих на диагонали прямоугольника, противоположной разрешающему элементу, деленное на разрешающий элемент.

Это же правило можно пояснить следующей мнемосхемой и выразить в виде формулы:



$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{iq} x_{rj}}{x_{rq}}. \quad (5.10).$$

В формуле (5.10) x_{rq} - разрешающий элемент таблицы; x'_{ij} - рассчитываемый элемент таблицы; x_{ij} - элемент таблицы, стоящий на месте рассчитываемого старой симплекс-таблицы; x_{iq} и x_{rj} - элементы, стоящие на диагонали составленного четырехугольника, на которой не стоит разрешающий элемент.

Пересчитаем теперь по первому правилу симплекс-таблицу 5.1. Так как разрешающий элемент равен 8, то направляющая строка делится на 8.

Примечание.

Так как в базис вместо вектора $\bar{A}_6$ теперь включен вектор $\bar{A}_2$, то в новой симплекс-таблице в столбце B_2 на месте вектора $\bar{A}_6$ должен стоять $\bar{A}_2$, а вместо коэффициента C_6 в столбце $\bar{C}_{B_2}$ должен стоять коэффициент C_2 .

Наша задача при пересчете – сделать столбец для вектора $\bar{A}_2$ единичным. Для этого необходимо сделать нули с помощью векторного сложения направляющей строки с другими строками таблицы. Сделаем, например, на месте элемента $x_{12} = 3$ нуль. Для этого умножим направляющую строку на $(-3/8)$ и сложим ее с первой строкой. Тогда получим:

$$\begin{array}{rcl} 60 & 6 & 3 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \quad - \text{ первая строка} \\ -21 & 0 & -3 \ 0 \ 0 \ 0 \ -3/8 \quad - \text{ направляющая, умноженная на } (-3/8) \\ \hline 39 & 6 & 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -3/8 \quad - \text{ результат векторного сложения.} \end{array}$$

Результат записываем на месте первой строки в новую симплекс-таблицу. Аналогично пересчитывается вторая строка таблицы.

Строку для вектора $\bar{A}_5$ при записи в новую симплекс-таблицу пересчитывать не надо, т.к. в направляющем столбце элемент $x_{32} = 0$.

Индексная строка преобразовывается путем сложения ее с направляющей строкой, умноженной на $(-5/8)$.

Результаты вычислений записываются в табл. 5.2.

Таблица 5.2.

B_2	$\bar{C}_{B_2}$	$\bar{B}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$
			-4	-5	0	0	0	0
$\bar{A}_3$	0	39	6	0	1	0	0	- 3/8
$\bar{A}_4$	0	5	2	0	0	1	0	- 5/8
$\bar{A}_5$	0	81	9	0	0	0	1	0
$\bar{A}_2$	-5	7	0	1	0	0	0	1/ 8
Z_j' - C_j		- 35	4	0	0	0	0	- 5/8

Заполнением симплекс-таблицы 5.2 заканчивается первая итерация симплекс алгоритма. Дальнейшее решение задачи заключается в повторении вышеописанной итерации.

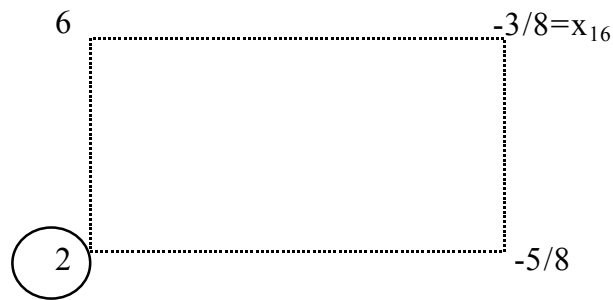
Опять рассматривается индексная строка. В ней есть положительная оценка оптимальности для вектора $\bar{A}_1$, а это значит, что соответствующие этой таблице опорный план $\bar{X}_{B_2} = (0; 7; 39; 5; 81; 0)$ и $z(\bar{X}_{B_2}) = -35$ не являются оптимальными. Необходимо еще раз перейти к новому опорному плану. Выбираем в качестве направляющего столбец для вектора $\bar{A}_1$ (ему соответствует положительная оценка оптимальности $z_1' - c_1 = 4$) и определяем вектор, выводящийся из базиса, путем расчета симплексного отношения:

$$\theta_{01} = \min \left\{ \frac{39}{6}; \frac{5}{2}; \frac{81}{9} \right\} = \frac{5}{2}.$$

θ_{01} соответствует строке для вектора $\bar{A}_4$, а поэтому вектор $\bar{A}_4$ будет выводиться из базиса. Соответствующая ему строка будет направляющей. Разрешающим элементом будет $x_{21} = 2$. Выделим в симплекс-таблице 5.2 направляющую строку и столбец.

Для пересчета симплекс-таблицы 5.2 воспользуемся второй модификацией – правилом четырехугольника. Для этого разделим направляющую строку на разрешающий элемент, запишем в новую таблицу направляющий столбец в виде единичного, перенесем строку для вектора $\bar{A}_2$ и столбцы для векторов $\bar{A}_3$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_5$ в новую таблицу без изменений, т.к. им соответствуют в направляющем столбце и направляющей строке нули. Остальные элементы таблицы пересчитаем по формуле (5.10).

Покажем, например, как будет пересчитан элемент таблицы x_{16} . Для этого элемента таблицы показан четырехугольник.



$$x_{16}^1 = -3/8 - \frac{6 \cdot (-5/8)}{2} = \frac{12}{8}$$

Заполним симплекс-таблицу 5.3.

Таблица 5.3.

$\overline{B_3}$	$\overline{C_{B_3}}$	$\overline{B_3}$	$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$	$\overline{A_3}$	$\overline{A_4}$	$\overline{A_5}$	$\overline{A_6}$
			-4	-5	0	0	0	0
$\overline{A_3}$	0	24	0	0	1	-3	0	12/8
$\overline{A_1}$	-4	5/2	1	0	0	1/2	0	-
$\overline{A_5}$	0	2	0	0	0	2	1	5/16
	-5	11	0	1	0	-	0	45
$\overline{A_2}$		7/2				9/2		1/16
		7				0		1/8
Z_j'		-	0	0	0	-2	0	5/8
$-C_j$		45						8

Этой таблице соответствует опорный план $\overline{X}_{B_3} = (5/2; 7; 24; 0; 11/2; 0)$ и значение целевой функции $z(\overline{X}_{B_3}) = -45$.

Как видно, значение целевой функции еще уменьшилось, а значит сделан еще один шаг к оптимуму.

Просмотрим опять оценки оптимальности в индексной строке. Видим, что для вектора $\overline{A_6}$ оценка оптимальности $z_6 - c_6 = 5/8$ положительна, значит, проверяемый опорный план опять не является оптимальным и необходимо еще раз перейти к новому опорному плану. Для этого будем вводить в базис вектор $\overline{A_6}$, а выводить $\overline{A_3}$. Разрешающим элементом будет $x_{16} = 12/8$. В результате пересчета по методу полных жордановых исключений получим симплекс-таблицу

5.4.

Таблица 5.4.

B_4	$\bar{C}_{B_4}$	$\bar{B}_4$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$
			-4	-5	0	0	0	0
$\bar{A}_6$	0	16	0	0	8/	-2	0	1
	-4	15	1	0	12	-	0	0
$\bar{A}_1$	0	/2	0	0	5/	1/8	1	0
$\bar{A}_5$	-5	27	0	1	24	9/	0	0
		/2			-	8		
$\bar{A}_2$		5			45/24	2/		
					-	8		
					1/12			
Z_j'		-	0	0	-	-	0	0
- C_j		55			5/12	3/4		

Этой таблице соответствует опорный план $\bar{X}_{B_4} = (15/2; 5; 0; 0; 27/2; 16)$ и $z(\bar{X}_{B_4}) = -55$. Проверим его на оптимальность, для чего рассмотрим в индексной строке оценки оптимальности. Так как в индексной строке стоят все отрицательные или нулевые элементы, то проверяемый опорный план является оптимальным, а значение целевой функции минимально. Таким образом,

$$\bar{X}_{\text{opt}} = (15/2; 5; 0; 0; 27/2; 16), \quad z_{\min} = -55.$$

Решение задачи окончено. Так как исходная задача была поставлена на $\max$, то нам необходимо изменить знак в целевой функции на противоположный.

Получен ответ: $\bar{X}_{\text{opt}} = (15/2; 5)$, $z_{\max} = 55$. Вернемся к экономической постановке задачи и прокомментируем полученное решение. Предприятие должно выпускать 7,5 кг вещества B_1 и 5 кг вещества B_2 . При этом будет получен доход в количестве 55 единиц. Такой же результат был получен при графическом решении.

Отыскание исходного базиса. Наиболее удобно начинать вычисления в соответствии с симплекс- алгоритмом с единичного базиса. Однако далеко не всегда рассматриваемая задача имеет полный единичный базис, которому соответствует допустимое базисное решение. Для того, чтобы использовать симплексный метод в этом случае, приходится прибегать к приему, который называется введением искусственного базиса.

В ограничения задачи, заданной в канонической форме, искусственно вводится несколько новых переменных с таким расчетом, чтобы полученная новая система уравнений имела полный единичный базис, которому соответствует опорный план новой системы ограничений. Опорный план новой расширенной задачи будет являться опорным планом исходной задачи, если введенные искусственные переменные будут равны нулю.

Если в целевую функцию, стремящуюся к минимуму, добавить

искусственные переменные с очень большими положительными коэффициентами M , то эти переменные будут стремиться к нулю.

Решая расширенную задачу симплексным методом, можно найти ее оптимальный план, который будет являться оптимальным и для исходной задачи. Если же исходная задача неразрешима, то это обнаруживается в результате решения новой задачи.

Рассмотрим пример решения задачи с помощью искусственного базиса.

Пусть задача имеет каноническую форму:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 8, \end{cases} \quad (5.11)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}), \quad (5.12)$$

$$z = 2x_1 + 4x_2 + 20x_3 - 5x_4 \rightarrow \min. \quad (5.13)$$

Так как в ограничениях (5.11) нет единичного базиса, вводим искусственные базисные переменные x_5 и x_6 : $B_1 = (\overline{A_5}, \overline{A_6})$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$. В целевую функцию z переменные x_5 и x_6 добавим с очень большими положительными коэффициентами M . Получим расширенную задачу

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 8, \end{cases} \quad (5.14)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}), \quad (5.15)$$

$$z = 2x_1 + 4x_2 + 20x_3 - 5x_4 + Mx_5 + Mx_6 \rightarrow \min. \quad (5.16)$$

Опорный план расширенной задачи будет являться опорным планом исходной задачи, если $x_5 = 0$, $x_6 = 0$. Если будем решать задачу (5.15) – (5.16), то очевидно, что x_5 и x_6 стремятся к нулю.

Решение оформляем в симплексных таблицах.

Таблица 5.5.

B_1	$\overline{C}_{B_1}$	$\overline{B_1}$	$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$	$\overline{A_3}$	$\overline{A_4}$	$\overline{A_5}$	$\overline{A_6}$
			2	4	20	-5	M	M
$\overline{A_5}$	M	5	1	2	-1	1	1	0
$\overline{A_6}$	M	8	2	-1	1	1	0	1
$Z_j - C_j$		0	-2	-4	-	5	0	0
		13	3	1	20	2	0	0
					0			

$\bar{X}_{B_1} = (0; 0; 0; 0; 5; 8)$. Расчет индексной строки:

$$z(\bar{X}_{B_1}) = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 20 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + M \cdot 5 + M \cdot 8 = 0 + 13M,$$

$$z_1 - c_1 = \bar{C}_{B_1} \cdot \bar{A}_1 - c_1 = M \cdot 1 + M \cdot 2 - 2 = -2 + 3M,$$

$$z_2 - c_2 = \bar{C}_{B_1} \cdot \bar{A}_2 - c_2 = M \cdot 2 + M \cdot (-1) - 4 = -4 + M,$$

$$z_3 - c_3 = \bar{C}_{B_1} \cdot \bar{A}_3 - c_3 = M \cdot (-1) + M \cdot 1 - 20 = -20 + 0 \cdot M,$$

$$z_4 - c_4 = \bar{C}_{B_1} \cdot \bar{A}_4 - c_4 = M \cdot 1 + M \cdot 1 - (-5) = 5 + 2M,$$

$$z_5 - c_5 = \bar{C}_{B_1} \cdot \bar{A}_5 - c_5 = M \cdot 1 + M \cdot 0 - M = 0 + 0 \cdot M,$$

$$z_6 - c_6 = \bar{C}_{B_1} \cdot \bar{A}_6 - c_6 = M \cdot 0 + M \cdot 1 = 0 + 0 \cdot M.$$

Вся индексная строка разбивается на две подстроки. В предпоследней записываем свободные члены выражения $z(\bar{X}_{B_1})$ и $Z_j - C_j$, в последней – коэффициенты при M .

Решается задача с помощью симплексных преобразований при условии, что критерием оптимальности является последняя индексная строка. Наибольшая положительная оценка $Z_j - C_j = 3$. Вводим в базис вектор $\bar{A}_1$. Симплексное отношение при $j = 1$

$$\theta_{01} = \min \left\{ \frac{5}{1}; \frac{8}{2} \right\} = \frac{8}{2} = 4$$

соответствует вектору $\bar{A}_6$, который выводится из базиса.

Симплексные таблицы пересчитываем по правилу полных жордановых исключений. Векторы-столбцы, соответствующие искусственным переменным, при выводе их из базиса можно не рассчитывать.

Таблица 5.6.

B_2	$\bar{C}_{B_2}$	B_2	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$
			2	4	20	-5	M	M
$\bar{A}_5$	M	1	0	5/2	-3/2	1/2	1	-
$\bar{A}_1$	2	4	1	-1/2	1/2	1/2	0	-
Z_j		8	0	-5	-	6	0	-
$-C_j$		1	0	5/2	19	1/2	0	-
				2	-3/2	2		

$\bar{X}_{B_2} = (4; 0; 0; 0; 1; 0)$ определяется из третьего столбца симплексной табл. 5.6. Направляющий столбец соответствует наибольшей положительной оценке в последней индексной строке $z_2 - c_2 = 5/2$. $\bar{A}_2$ вводим в базис. Следует обратить внимание на то, что в направляющем столбце единственное число больше нуля ($5/2$), значит, симплексное отношение находить не следует, первая строка - направляющая и $\bar{A}_5$ выводится из базиса. Векторы $\bar{A}_5$ и $\bar{A}_6$, соответствующие искусственным переменным x_5 и x_6 , не рассчитываем, так как они выведены из базиса.

Таблица 5.7.

B_3	$\bar{C}_{B_3}$	$\bar{B}_3$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$
			2	4	20	-5	M	M
$\bar{A}_2$	4	$2/5$	0	1	$-3/5$	$1/5$	-	-
$\bar{A}_1$	2	$21/5$	1	0	$1/5$	$3/5$	-	-
Z_j		10	0	0	-	7	-	-
$-C_j$		0	0	0	22	0	-	-

$(Z_j - C_j)$ в последней индексной строке равны 0, искусственные переменные выведены из базиса, значит, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $\bar{X}_{B_3} = (21/5; 2/5; 0; 0; 0; 0)$.

Получен опорный план исходной задачи и $z(\bar{X}_{B_3}) = 10$. Этот план проверяется на оптимальность на основании предпоследней индексной строки. Минимум функции не достигнут, так как $z_4 - c_4 = 7 > 0$.

Продолжаем симплексные преобразования, ориентируясь на предпоследнюю строку. Пересчет даст нам табл. 5.8.

Таблица 5.8.

B_4	$\bar{C}_{B_4}$	$\bar{B}_4$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$
			2	4	20	-5
$\bar{A}_4$	-5	2	0	5	-3	1
	2	3	1	-3	2	0
$\bar{A}_1$						
Z_j		-4	0	-	-1	0
$-C_j$				35		

$$\bar{X}_{B_4} = (3; 0; 0; 2),$$

$$z(\bar{X}_{B_4}) = -4.$$

Достигнут минимум функции z , так как все оценки индексной строки $Z_j - C_j \leq 0$. Оптимальный план единственный, потому что свободные векторы $\overline{A_2}$ и $\overline{A_3}$ имеют отрицательные оценки $Z_2 - C_2 = -35$; $Z_3 - C_3 = -1$. При $x_1 = 3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 2$; $z_{\min} = -4$.

Рассмотрим пример, когда задача не имеет допустимых решений.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ -2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 1, \end{cases} \quad (5.17)$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0, \quad (5.18)$$

$$z = -x_1 + x_2 \rightarrow \max. \quad (5.19)$$

Задача (5.17), (5.18), (5.19) задана в общей форме. Перейдем к канонической форме

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 1, \end{cases} \quad (5.20)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}), \quad (5.21)$$

$$z' = -z = x_1 - x_2 \rightarrow \min. \quad (5.22)$$

Полный единичный базис выделить нельзя, поэтому во второе уравнение добавим искусственную базисную переменную x_6 . Получим расширенную задачу:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 1, \end{cases} \quad (5.23)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}), \quad (5.24)$$

$$z' = -z = x_1 - x_2 + Mx_6 \rightarrow \min. \quad (5.25)$$

Решаем задачу (5.23) – (5.25) симплексным методом, оформляя решение в таблицах.

Таблица 5.9.

B_1	$\overline{C_{B_1}}$	$\overline{B_1}$	$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$	$\overline{A_3}$	$\overline{A_4}$	$\overline{A_5}$	$\overline{A_6}$
			1	-1	0	0	0	M
$\overline{A_3}$	0	3	-1	3	1	0	0	0
$\overline{A_6}$	M	2	-2	1	0	-1	0	1
$\overline{A_5}$	0	1	1	1	0	0	1	0

$$-Z_j' \quad \left| \quad \quad \quad \right| \quad \left| \quad \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}} \quad \left| \quad \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right|$$

$$Q_{02} = \min_{x_{i2} > 0} \left\{ \frac{b_i}{x_{i2}} \right\} = \min \left\{ \frac{3}{3}; \frac{2}{1}; \frac{1}{1} \right\} = \frac{3}{3} \text{ или } \frac{1}{1}.$$

Направляющая строка может быть либо I, либо III. Выбираем третью, чтобы разрешающий элемент был «I». Вводим в базис $\overline{A_2}$, выводим $\overline{A_5}$.

Таблица 5.10.

B_2	$\overline{C_{B_2}}$	$\overline{B_2}$	$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$	$\overline{A_3}$	$\overline{A_4}$	$\overline{A_5}$	$\overline{A_6}$
			1	-1	0	0	0	M
$\overline{A_3}$	0	0	-4	0	1	0	-3	0
$\overline{A_6}$	M	1	-3	0	0	-1	-1	1
	-1	1	1	1	0	0	1	0
$\overline{A_2}$								
Z_j'		-1	-2	0	0	0	-1	0
$-C_j$		1	-3	0	0	-1	-1	0

В нижней строке $Z_j' - C_j$ все оценки $Z_j' - C_j \leq 0$, при этом искусственная переменная осталась в базисе $x_6 = 1$, и это ее минимальное значение. Значит, исходная задача не имеет допустимых решений, системы ограничений (5.20), (5.21) и (5.17), (5.18) несовместны.

§ 6. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ПРИМЕР ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СТАНДАРТНОЙ ПЛАНОВОЙ ЗАДАЧИ

В § 2 был рассмотрен пример задачи определения оптимального плана выпуска веществ.

Получена математическая модель:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \leq 60, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 9x_1 \leq 81, \\ 8x_2 \leq 56, \end{cases} \quad (6.1)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (6.2)$$

$$z = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max. \quad (6.3)$$

Дополним условие задачи требованием оценить каждый из видов ресурсов, используемых для производства. Оценки, приписываемые каждому виду ресурсов, должны быть такими, чтобы оценка всех используемых ресурсов была минимальной, а суммарная оценка ресурса, используемого на производство единицы вещества каждого вида, - не меньше цены единицы вещества данного вида.

Припишем каждому из видов ресурсов, используемых для производства веществ, двойственную оценку, соответственно равную y_1, y_2, y_3 и y_4 .

Согласно условию, двойственные оценки должны быть такими, чтобы общая оценка ресурса, используемого на производство единицы вещества каждого вида, была не меньше цены единицы вещества данного вида, т.е. y_1, y_2, y_3 и y_4 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 6y_1 + 2y_2 + 9y_3 \geq 4, \\ 3y_1 + 5y_2 + 8y_4 \geq 5, \end{cases} \quad (6.4)$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \quad (6.5)$$

Общая оценка ресурсов, используемых на производство веществ, составит

$$\varphi = 60y_1 + 40y_2 + 81y_3 + 56y_4 \rightarrow \min. \quad (6.6)$$

Задачи (6.1) – (6.3) и (6.4) – (6.6) образуют пару задач, называемую в линейном программировании двойственной парой.

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить двойственную задачу по следующим правилам:

1. Во всех ограничениях исходной задачи свободные члены должны

находиться справа, а члены с неизвестными - слева.

2. Ограничения-неравенства исходной задачи должны иметь знаки, направленные в одну сторону.
3. Если целевая функция в исходной задаче минимизируется, ограничения-неравенства следует записать со знаком « $\leq$ », тогда в двойственной задаче целевая функция будет минимизироваться и знаки ограничений-неравенств будут « $\geq$ ».
4. Каждому ограничению исходной задачи соответствует переменная в двойственной задаче. Если переменная соответствует неравенству, она неотрицательна, если равенству – то переменная без ограничений на знак («произвольная»).
5. Коэффициенты при переменных в ограничениях двойственной задачи получаются транспонированием матрицы, составленной из коэффициентов при переменных исходной задачи.
6. Свободные члены исходной задачи являются коэффициентами при переменных в функции цели двойственной задачи, а свободными членами в двойственной задаче – коэффициенты при переменных в функции исходной задачи.

Отметим также, что соотношение двойственности взаимное, т.е. задача, двойственная по отношению к двойственной, совпадает с исходной.

Двойственные пары задач подразделяются на симметричные и несимметричные. В симметричной паре ограничения прямой и двойственной задач являются нестрогими неравенствами и, следовательно, переменные обеих задач могут принимать только неотрицательные значения.

Запишем симметричную пару двойственных задач для общего случая.

Исходная задача:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max.$$

Двойственная задача:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i \rightarrow \min.$$

Дальнейший анализ будем проводить на примере симметричных двойственных задач. Основой для анализа являются следующие теоремы.

Первая теорема двойственности.

Если одна из задач двойственной пары имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное решение, причем

$$Z_{\max} = \varphi_{\min}.$$

Если же целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена (для исходной задачи сверху, для двойственной снизу), то другая задача вообще не имеет планов.

Вторая теорема двойственности.

Если при подстановке координат оптимального плана $\bar{x}^0 (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ в систему ограничений исходной задачи i -е ограничение выполняется как строгое неравенство, то соответствующая i -я переменная в оптимальном плане $\bar{y}^0 (y_1^0, \dots, y_m^0)$ двойственной задачи равна нулю, т.е.

если $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j^0 < b_i$, то $y_i^0 = 0$

и если $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j^0 = b_i$, то $y_i^0 > 0$.

С другой стороны, если какая-то j -я переменная исходной задачи входит в оптимальный план $\bar{x}^0$ с положительным значением, то соответствующее ограничение в оптимальном плане $\bar{y}^0$ двойственной задачи будет выполняться, как строгое равенство, т.е.

если $x_j^0 > 0$, то $\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i^0 = c_j$

и если $x_j^0 = 0$, то $\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i^0 > c_j$.

Иначе говоря, оптимальные решения $\bar{x}^0$ и $\bar{y}^0$ двойственных задач удовлетворяют условиям:

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^0 - c_j \right) x_j^0 = 0 \quad (j = \overline{1, n});$$

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 - b_i \right) y_i^0 = 0 \quad (i = \overline{1, m}).$$

Экономическая трактовка результатов этой теоремы состоит в следующем.

Положительную двойственную оценку могут иметь лишь ресурсы, полностью используемые в оптимальном плане, оценки не полностью используемых ресурсов всегда равны нулю.

С другой стороны, если данный вид продукции вошел в оптимальный план, то двойственная оценка ресурсов, затрачиваемых на единицу этой продукции в точности равна ее цене и производство продукции по оценкам оправдано.

Если же выпускать данную продукцию нерационально и она не вошла в оптимальный план, то и по оценкам ее производство будет убыточным, т.е. оценка затрачиваемых ресурсов окажется выше цены этой продукции.

Третья теорема двойственности.

В оптимальном плане двойственной задачи значение переменной y_i^0 численно равно частной производной функции $z_{\max} (b_1, b_2, \dots, b_m)$ по данному

аргументу, т.е.

$$y_i^0 = \frac{\partial z_{\max}}{\partial b_i}.$$

Таким образом, оптимальные оценки определяют влияние свободных членов b_i условий – ограничений задачи линейного программирования на оптимальную величину целевой функции, т.е. вычисление наряду с оптимальным планом связанных с ним оптимальных оценок позволяет взвесить относительную важность отдельных ресурсов для достижения поставленной в задаче цели.

Вернемся к рассмотренной ранее паре симметричных двойственных задач определения оптимального плана выпуска веществ (6.1) – (6.3) и нахождения оптимальных двойственных оценок используемых ресурсов (6.4) – (6.6).

При симплексном решении одной из задач получаем в итоговой таблице решение и для двойственной задачи. Именно для исходной задачи решение считываем из столбца свободных членов последней таблицы, которая уже отвечает признакам оптимальности. В свою очередь, решение двойственной задачи считывается из индексной строки. Именно y_1 считывается из индексной строки в том столбце, которому соответствовала базисная переменная в первой строке первой симплексной таблицы, y_2 - для второй строки начальной таблицы и т.д. в предположении, что цены для базисных переменных в первой таблице равны нулю.

Решение исходной задачи приведено в таблице (5.4). Из этой таблицы видно, что оптимальным планом производства веществ является такой, при котором изготавливается 7,5 кг вещества $B_1(x_1^0 = 7,5)$ и 5 кг вещества $B_2(x_2^0 = 5)$. При данном плане производства остаются неиспользованными 13,5 ед. ресурса $P_3(x_3^0 = 13,5)$ и 16 ед. ресурса $P_4(x_4^0 = 16)$. Общая стоимость произведенных веществ равна 55.

Из таблицы также видно, что оптимальным решением двойственной задачи является $y_1^0 = 5/12$, $y_2^0 = 3/4$, $y_3^0 = 0$, $y_4^0 = 0$ (знаки поменяли в связи с тем, что прямую задачу на $\max$ решали как задачу на $\min$). Переменные y_1 и y_2 обозначают двойственные оценки единицы ресурсов соответственно первого и второго видов. Эти оценки отличны от нуля, а ресурсы первого и второго видов полностью используются при оптимальном плане производства веществ. Двойственные оценки ресурсов третьего и четвертого видов равны нулю. Эти виды ресурсов не полностью используются при оптимальном плане производства веществ.

Таким образом, положительную двойственную оценку имеют лишь те виды ресурсов, которые полностью используются при оптимальном плане производства. Поэтому двойственные оценки определяют дефицитность используемых ресурсов. Кроме того, величина двойственной оценки показывает, на сколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества ресурса соответствующего вида на одну единицу. Так, увеличение количества ресурса P_1 на одну единицу приведет к тому, что появится возможность найти новый оптимальный план производства веществ, при котором общая стоимость изготавливаемых веществ возрастет на 5/12 и станет

равной $55 + 5/12 = 55 \frac{5}{12}$.

При этом числа, стоящие в столбце вектора $\bar{A}_3$ табл. (5.4) показывают, что указанное увеличение общей стоимости изготавливаемых веществ может быть достигнуто за счет увеличения выпуска вещества V_1 на $5/24$ ед. и сокращения выпуска вещества V_2 на $1/12$ ед. Вследствие этого использования ресурса P_4 уменьшится на $8/12$ ед., а ресурса P_3 увеличится на $45/24$ ед.. Аналогично увеличение на одну единицу ресурса P_2 позволит найти новый оптимальный план производства веществ, при котором общая стоимость изготавливаемых веществ возрастет на $3/4$ ед. и составит $55 + \frac{3}{4} = 55 \frac{3}{4}$ (ед.).

Это будет достигнуто в результате увеличения выпуска вещества V_2 на $2/8$ ед. и сокращения выпуска вещества V_1 на $1/8$ ед. Вследствие этого использования ресурса P_3 уменьшится на $9/8$ ед, а ресурса P_4 увеличится на 2 ед.

Вычисляя минимальное значение целевой функции двойственной задачи

$$\Phi_{\min} = 60 \cdot 5/12 + 40 \cdot \frac{3}{4} + 81 \cdot 0 + 56 \cdot 0 = 55,$$

видим, что оно совпадает с максимальным значением целевой функции исходной задачи.

При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи получаем:

$$6 \cdot 5/12 + 2 \cdot \frac{3}{4} + 9 \cdot 0 = 4$$

$$3 \cdot 5/12 + 5 \cdot \frac{3}{4} + 8 \cdot 0 = 5.$$

Оба ограничения двойственной задачи выполняются как строгие равенства. Это означает, что двойственные оценки ресурсов, используемых для производства единицы соответственно веществ V_1 и V_2 , равны в точности их ценам. Поэтому выпускать эти два вида веществ по двойственным оценкам экономически целесообразно. Их производство и предусмотрено оптимальным планом прямой задачи.

Двойственные оценки могут служить инструментом анализа и принятия правильных решений в условиях постоянно меняющегося производства. Так, например, с помощью двойственных оценок ресурсов возможно сопоставление оптимальных условных затрат и результатов производства

Предположим, в рассмотренной ранее задаче определения оптимального плана выпуска веществ V_1 и V_2 появилась возможность выпуска еще одного вида веществ V_3 . Затраты на 1 кг вещества V_3 составляют: $a_{13} = 12$ единиц ресурса P_1 , $a_{23} = 8$ единиц ресурса P_2 , $a_{33} = 1$ единица ресурса P_3 и $a_{43} = 3$ единицы ресурса P_4 ; цена 1 кг вещества V_3 равна $C_3 = 10$ (грн.). Требуется установить, даст ли прибыль включение в план выпуска дополнительно вещества V_3 и какой должна быть цена 1 кг вещества V_3 , чтобы его производство было рентабельным.

Используя двойственные оценки ресурсов, сопоставим дополнительные затраты на ресурсы в расчете на 1 кг вещества V_3 с ценой его реализации.

Затраты, равные $a_{13} \cdot y_1^0 + a_{23} \cdot y_2^0 + a_{33} \cdot y_3^0 + a_{43} \cdot y_4^0 = 12 \cdot 5/12 + 8 \cdot 3/4 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 11$ (грн), больше цены продукции $C_3 = 10$ (грн), поэтому вещество V_3 не следует включать в план выпуска. Необходимость повторного решения задачи в изменившихся условиях отпадает. Чтобы производство вещества V_3 стало рентабельным, его цена должна составлять не менее 11 (грн.).

Двойственные оценки ресурсов позволяют судить об эффекте не любых, а

лишь сравнительно небольших изменений ресурсов. При резких изменениях сами оценки могут стать другими, что приведет к невозможности их использования для анализа эффективности производства. Поэтому, чтобы проводить экономический анализ с использованием двойственных оценок, нужно знать их интервал устойчивости.

Для задачи (6.1) – (6.3) найдем интервалы устойчивости (неизменности) двойственных оценок по отношению к изменениям запасов ресурсов каждого вида. Определим, изменятся ли эти оценки, если увеличить запасы каждого из ресурсов на 10 единиц: а) в отдельности; б) одновременно. Найдем соответствующее изменение максимальной выручки от реализации продукции с помощью двойственных оценок.

Предположим, что запасы ресурсов P_1, P_2, P_3, P_4 , равные первоначально 60, 40, 81 и 56 единицам, изменились соответственно на величины $\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3$ и Δb_4 .

Для определения интервалов устойчивости двойственных оценок по отношению к изменениям ресурсов каждого вида необходимо определить такие значения $\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3, \Delta b_4$, при которых среди компонент вектора

$$D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 60 + \Delta b_1 \\ 40 + \Delta b_2 \\ 81 + \Delta b_3 \\ 56 + \Delta b_4 \end{pmatrix}$$

нет отрицательных.

Здесь D^{-1} - матрица, обратная матрице B , составленной из компонент векторов базиса A_6, A_1, A_5, A_2 , который определяет оптимальный план задачи (5.1 – 5.3). В рассматриваемом примере элементы матрицы B^{-1} могут быть взяты из столбцов векторов (табл. 5.4) A_3, A_4, A_5, A_6 , образующих первоначальный единичный базис.

Таким образом, получаем:

$$D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 60 + \Delta b_1 \\ 40 + \Delta b_2 \\ 81 + \Delta b_3 \\ 56 + \Delta b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/12 & -2 & 0 & 1 \\ 5/24 & -1/8 & 0 & 0 \\ -45/24 & 9/8 & 1 & 0 \\ -1/12 & 2/8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 + \Delta b_1 \\ 40 + \Delta b_2 \\ 81 + \Delta b_3 \\ 56 + \Delta b_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 + \frac{8}{12} \Delta b_1 - 2 \Delta b_2 + \Delta b_4 \\ \frac{15}{2} + \frac{5}{24} \Delta b_1 - \frac{1}{8} \Delta b_2 \\ \frac{27}{2} - \frac{45}{24} \Delta b_1 + \frac{9}{8} \Delta b_2 + \Delta b_3 \\ 5 - \frac{1}{12} \Delta b_1 - \frac{2}{8} \Delta b_2 \end{pmatrix}$$

Условие неотрицательности компонент указанного выше вектора приводит к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 16 + \frac{8}{12}\Delta b_1 - 2\Delta b_2 + \Delta b_4 \geq 0, \\ \frac{15}{2} + \frac{5}{24}\Delta b_1 - \frac{1}{8}\Delta b_2 \geq 0, \\ \frac{27}{2} - \frac{45}{24}\Delta b_1 + \frac{9}{8}\Delta b_2 + \Delta b_3 \geq 0, \\ 5 - \frac{1}{12}\Delta b_1 - \frac{2}{8}\Delta b_2 \geq 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

Предположим, что изменяется только запас ресурса P_1 , а остальные запасы ресурсов остаются неизменными: $\Delta b_2 = \Delta b_3 = \Delta b_4 = 0$.

Тогда получим:

$$\begin{cases} 16 + \frac{8}{12}\Delta b_1 \geq 0, \\ \frac{15}{2} + \frac{5}{24}\Delta b_1 \geq 0, \\ \frac{27}{2} - \frac{45}{24}\Delta b_1 \geq 0, \\ 5 - \frac{1}{12}\Delta b_1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \Delta b_1 \geq -24, \\ \Delta b_1 \geq -36, \\ \Delta b_1 \geq \frac{36}{5}, \\ \Delta b_1 \geq 60, \end{cases}$$

откуда $-24 \leq \Delta b_1 \leq \frac{36}{5}$ и $60 - 24 \leq b_1 + \Delta b_1 \leq 60 + \frac{36}{5}$ или $36 \leq b_1 + \Delta b_1 \leq 67\frac{1}{5}$, т.е. при неизменности двойственных оценок ресурсов запас ресурса P_1 может изменяться в пределах от 36 до $67\frac{1}{5}$ единиц.

Аналогично можно получить, что

$$28 \leq b_2 + \Delta b_2 \leq 48; \quad 67\frac{1}{2} \leq b_3 + \Delta b_3 < \infty; \quad 40 \leq b_4 + \Delta b_4 \leq \infty.$$

Таким образом, при запасе только одного из ресурсов P_1 в пределах от 36 до $67\frac{1}{5}$ единицы или P_2 - в пределах от 28 до 48 единиц, или P_3 - в пределах не менее $67\frac{1}{2}$ единицы, или P_4 - в пределах не менее 40 единиц оптимальное решение двойственной задачи остается прежним, т.е.

$$y^0 = \left(\frac{5}{12}; \frac{3}{4}; 0; 0 \right)$$

Следовательно, увеличение на 10 единиц в отдельности запаса ресурса P_1 (равного 60 единицам) или P_2 (40 единиц) приведет к изменению их двойственных оценок, а запаса ресурса P_3 (81 единица) или P_4 (56 единиц) оставит оценки этих ресурсов прежними (равными нулю). В результате с помощью полученных двойственных оценок ресурсов можно найти соответствующее изменение максимальной выручки $\Delta z_{\max}$.

Если запасы ресурсов изменяются одновременно, то исследование устойчивости двойственных оценок усложняется, т.к. в данном случае нужно найти многогранник решений системы неравенств (6.7). Однако всегда можно проверить, удовлетворяют ли конкретные изменения запасов ресурсов системе

(6.7). Так, в нашей задаче при одновременном увеличении запасов всех ресурсов на 10 единиц т.е. при $\Delta b_1 = \Delta b_2 = \Delta b_3 = \Delta b_4 = 10$ все неравенства системы (6.7) справедливы, следовательно, оптимальное решение двойственной задачи остается прежним, т.е.

$$y^0 = \left(\frac{5}{12}; \frac{3}{4}; 0; 0 \right)$$

Поэтому изменение максимальной выручки составит:

$$\Delta z_{\max} = y_1^0 \cdot \Delta b_1 + y_2^0 \cdot \Delta b_2 + y_3^0 \cdot \Delta b_3 + y_4^0 \cdot \Delta b_4 = 5/12 \cdot 10 + 3/4 \cdot 10 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 10 = 35/3 \text{ (грн)}.$$

По соотношениям двойственных оценок могут быть определены расчетные нормы заменяемости ресурсов, при соблюдении которых проводимые замены в пределах устойчивости двойственных оценок не влияют на эффективность оптимального плана.

Определим нормы заменяемости ресурсов P_1 и P_2 . Составим отношение двойственных оценок ресурсов P_1 и P_2 , т.е. $y_1^0 : y_2^0 = 5/12 : 3/4 = 5 : 9$, т.е. для максимизации общей выручки каждые дополнительные 9 единиц ресурса P_1 , эквивалентны дополнительным 5 единицам ресурса P_2 . Вывод верен в пределах устойчивости двойственных оценок, когда изменения запасов ресурсов $\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3, \Delta b_4$ удовлетворяют системе (6.7).

Всего выше изложенного достаточно, чтобы приступить к решению задачи первого задания контрольной работы. Однако для облегчения работы студентов-заочников проведем дополнительное полное исследование примера, аналогии которого как раз и входят в варианты первого задания. Такое дополнительное рассмотрение оправдано прежде всего из-за того, что ниже приведенный комплекс исследований мало освещен в доступной учебной литературе. Для цельности изложения целый ряд фрагментов будет повторять уже изложенный материал.

Пример.

При изготовлении товаров двух наименований T_1 и T_2 используется три ресурса S_1, S_2, S_3 . Пусть выпуск товаров исчисляется в тоннах [т], а используемые ресурсы в условных единицах [усл. ед.], причем единица измерения для каждого ресурса своя.

Известны и приведены в таблице 6.1 нормозатраты каждого из ресурсов на производство 1 тонны каждого из товаров [усл.ед./т], имеющийся объем ресурсов [усл. ед.], цены за 1 тонну производимых товаров [тыс.грн./т].

Таблица 6.1.

Товары Ресурсы	Нормозатраты ресурсов на производство товаров, [усл.ед./т]		Имеющиеся объемы ресурсов, [усл.ед.]	Обозначения теневых цен ресурсов
	T_1	T_2		
S_1	$a_{11} = 1$	$a_{12} = 4$	$b_1 = 28$	y_1
S_2	$a_{21} = 1$	$a_{22} = 1$	$b_2 = 10$	y_2
S_3	$a_{31} = 3$	$a_{32} = 1$	$b_3 = 24$	y_3
Цены товаров, [тыс.грн./т]	$c_1 = 7$	$c_2 = 3$	Через z обозначим суммарную цену производимых товаров, [тыс.грн.]	
Планы выпуска товаров, [т]	x_1	x_2		

Необходимо определить оптимальные планы выпуска товаров x_1 , x_2 , т.е. такие их значения, при которых суммарная цена z производимых товаров будет максимальной. Нужно также определить объективно обусловленные оценки (теневые цены) ресурсов при реализации найденного оптимального плана выпуска товаров. В заключение требуется проанализировать полученные результаты по методике, приводимой по ходу решения и анализа поставленной задачи.

Математическая модель. Решение всякой оптимизационной задачи начинается с составления математической модели этой задачи.

Как уже показано в таблице 6.1, через x_1 обозначен план выпуска товара T_1 , через x_2 - план выпуска товара T_2 . Так как планы выпуска товаров не могут быть отрицательными, то фиксируем ограничения $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Кроме этого, мы ограничены наличными объемами ресурсов S_1 , S_2 , S_3 . Отсюда возникнут три ограничения-неравенства. Очевидно, что если a_{ij} - нормозатраты i -го ресурса на производство единицы (1 т) j -го товара, то $a_{ij}x_j$ - затраты i -го ресурса на весь план выпуска j -го товара. Учитывая, что у нас два товара, можно записать ограничение по использованию ресурса S_1 : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$; а по второму и третьему ресурсам соответственно: $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$ и $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3$. В силу численных данных в таблице 6.1 ограничения по ресурсам примут вид:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 28, & (1) \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 10, & (2) \\ 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 24, & (3) \end{cases} \quad (6.8)$$

Зная цены c_1 и c_2 товаров, планируемых к выпуску, можно зафиксировать целевую функцию задачи: $z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$.

Тогда математическая модель задачи будет представлена в таком виде: найти такие значения планов x_1 и x_2 , которые бы удовлетворяли условиям

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \quad (6.9)$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 28, & (6.10.1) \\ x_1 + x_2 \leq 10, & (6.10.2) \\ 3x_1 + x_2 \leq 24, & (6.10.3) \end{cases} \quad (6.10)$$

и обеспечивали бы наибольшее значение целевой функции

$$z = 7x_1 + 3x_2 \quad (z \rightarrow \max). \quad (6.11)$$

Получена математическая модель, которая может быть отнесена к классу стандартных плановых задач при двух планируемых товарах и трех ограничениях по ресурсам ($n = 2$, $m = 3$). Для задачи (6.9)-(6.11) может быть найден оптимальный план выпуска товаров. Вместе с тем, если обозначить через y_1 , y_2 , y_3 - соответственно цены ресурсов S_1 , S_2 , S_3 в конкретных условиях планируемого производства, то возникает возможность зафиксировать, так называемую, двойственную задачу. Как описывалось выше, эта задача будет иметь вид:

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0; \quad (6.12)$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 7, & (6.13.1) \\ 4y_1 + y_2 + y_3 \geq 3, & (6.13.2) \end{cases} \quad (6.13)$$

$$\varphi = 28y_1 + 10y_2 + 24y_3 \rightarrow \min. \quad (6.14)$$

Экономически такую задачу можно интерпретировать возникшим желанием продать ресурсы, не производя товары и получая вместе с тем не меньший доход. Именно, в (6.13) каждое слагаемое $a_{ij}y_i$ выступает как цена доли затрат i -го ресурса на производство 1 т j -го товара. Неравенство (6.13.1) фиксирует требования по первому товару (но этот товар мы уже и не собираемся выпускать), а (6.13.2) – по второму товару. Но тут же вместе с этим покупатель ресурсов стремиться минимизировать свою целевую функцию (6.14), т.е. минимизировать затраты на покупку ресурсов.

Можно образно считать, что y_1 и y_2 это «теневые» цены ресурсов в условиях конкретного предполагаемого выпуска товаров T_1 и T_2 .

Графическое решение конкретной задачи.

Задачу (6.9)-(6.11) будем считать исходной.

Задачу (6.12)-(6.14) – двойственной к исходной.

На рис. 6.1 представлено графическое решение задачи (6.9)-(6.11). Сущность и правила графического решения были изложены ранее при рассмотрении основного примера. Область допустимых планов – пятиугольник OABCD – образован ограничениями неотрицательности переменных исходной задачи (6.9) и ограничениями по наличию ресурсов (6.10). Граница ограничения (6.10.1), т.е. прямая линия $x_1 + 4x_2 = 28$ проходит через точки A и B. Граница ограничения (6.10.2) – через точки B и C; граница ограничения (6.10.3) – через точки C и D. На рис. 6.1 показан градиент целевой функции ($\text{grad } z$) и уровни этой функции ($z = \text{const}$). По прохождению уровней в области допустимых планов очевидно, что максимум заданной целевой функции наступает в точке C(7;3). Следовательно, $Z_{\max} = 7x_{1c} + 3x_{2c} = 7 \cdot 7 + 3 \cdot 3 = 58$ (тыс.грн). Если подставить координаты оптимальной точки C в ограничения (6.10), то обнаружим, что нестрогое неравенство (6.10.1) выполняется как неравенство:

$$x_1 + 4x_2 = 7 + 4 \cdot 3 = 19 < 28$$

Это означает, что наличие ресурса S_1 не будет использовано полностью при реализации оптимального плана, т.е. при выпуске 7 т продукта T_1 и 3 т продукта T_2 . Более того, ясно, что первый ресурс S_1 будет недоиспользован на $28 - 19 = 9$ (усл. ед).

Довольно очевидно, что при увеличении наличия ресурсов в условиях (6.10) будут увеличиваться лишь свободные члены и границы ограничений будут перемещаться параллельно самим себе кверху направо (пятиугольник OABCD «расширяется»). Из чертежа видно, что при неизменности наличия S_2 и S_3 увеличение S_1 никак не повлияет на координаты оптимальной точки (точка В начнет перемещаться вверх вдоль границы условия (6.10.2)). При уменьшении S_1 (опять же при неизменности наличия S_2 и S_3) точка В начнет перемещаться книзу по границе ограничения (6.10.2), первоначально не меняя оптимальности точки С. Именно С остается оптимальной и при совмещении В с С, но при дальнейшем уменьшении S_1 (т.е. меньше 19) точка С перестает быть оптимальной.

А вот при подстановке координат т. С (7, 3) в ограничения (6.10.2) и (6.10.3) мы будем получать строгие равенства:

$$x_1 + x_2 = 7 + 3 \equiv 10,$$

$$3x_1 + x_2 = 3 \cdot 7 + 3 \equiv 24.$$

Это означает, что при реализации оптимального плана в 7 т товара T_1 и 3 т товара T_2 , ресурсы S_2 и S_3 будут полностью реализованы (исчерпаны).

Очень интересным представляется анализ влияния изменения цен C_1 и C_2 планируемых товаров на сохранение оптимальности в найденной оптимальной точке С(7;3). Этот анализ мы сделаем досконально при реализации решения нашего примера с помощью симплекс-метода. Однако в силу простоты нашего примера это можно было бы сделать и с помощью графического решения (рис. 6.1). Сейчас же мы лишь качественно проанализируем затронутый вопрос анализа.

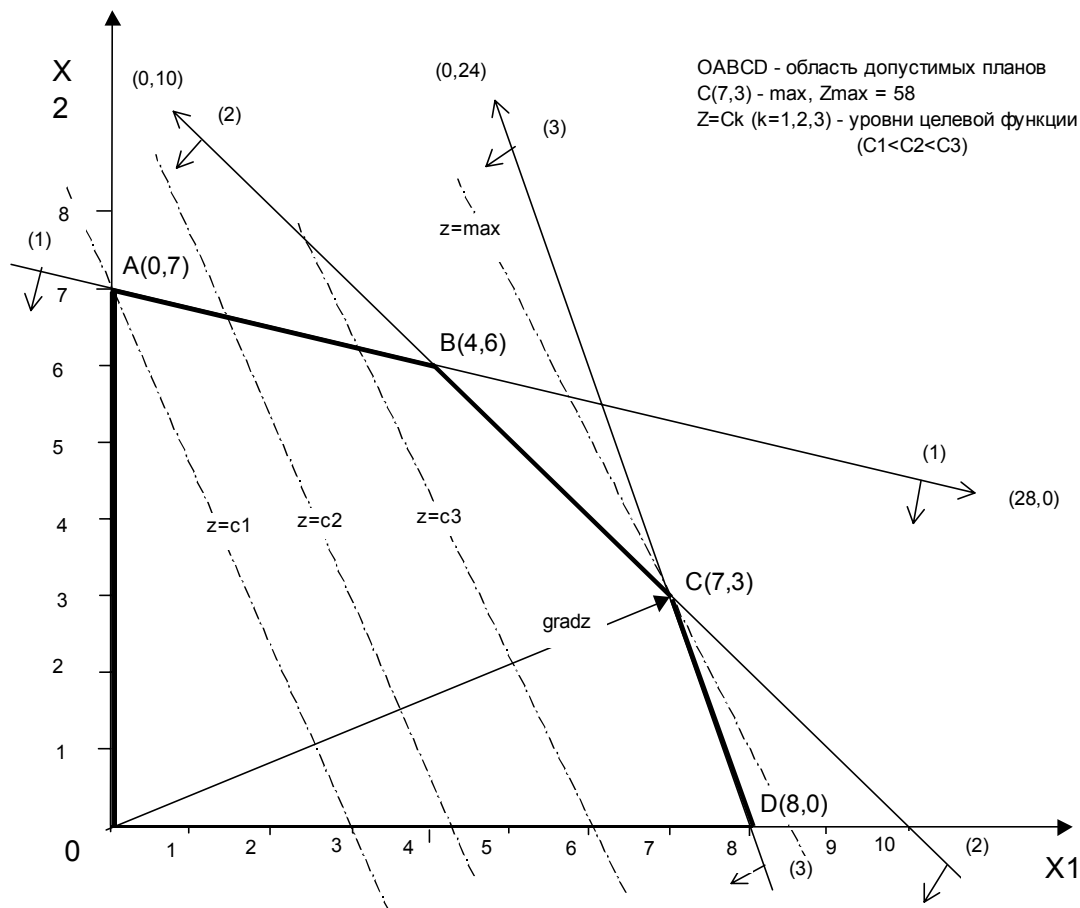


Рис. 6.1.

Именно, если бы изменились цены C_1 и C_2 предполагаемых к выпуску товаров, то изменялось бы положение градиента целевой функции. При смещении направления градиента от фиксированного на чертеже положения по часовой стрелке сначала с изменением C_1 и C_2 будет такой момент, когда признак оптимальности будет иметь место на всем отрезке CD (это когда градиент перпендикулярен CD), а затем лишь в точке D . Если бы изменение направления градиента целевой функции пошло от найденной оптимальной точки $C(7;3)$ против часовой стрелки, то сначала бы оптимальность наступила на отрезке BC , когда градиент цели перпендикулярен BC , а затем лишь в точке B и т.д.

Решение примера с помощью симплекс-метода.

Осуществим симплексное решение примера. Для этого математическая модель примера (6.9)-(6.11) приводится к каноническому виду с помощью балансовых неотрицательных переменных x_3, x_4, x_5 . Перевод целевой функции на процедуру минимизации делать не будем, т.е. будет осуществляться непосредственно максимизация, критерий оптимальности при этом лишь сменится по знаку. Итак, будем иметь дело с канонической моделью

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0; \quad (6.15)$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 28, & (6.16.1) \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10, & (6.16.2) \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 24, & (6.16.3) \end{cases} \quad (6.16)$$

$$z = 7x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max. \quad (6.17)$$

По описанной выше методике составляется первая симплексная таблица и ведется пошаговое решение до получения оптимального результата. Рядом с каждой таблицей дан краткий комментарий по соответствующей итерации. Т.к. задачу мы будем решать непосредственно на максимум, то признаком неоптимальности рассматриваемого базисного решения будет наличие отрицательных оценок в $(m+1)$ -й строке.

Таблица 6.2

№ n/	Б		1	2	3	4	5	С
1	A_1	8						0
2	A_2	0						0
3	A_3	4						0
m	Z_j	-	7	3				0
+1	C_j							

$\bar{X}_{B_1} = (0, 0, 28, 10, 24)$ - не оптимальное, A_1 - ведущий столбик (неблагоприятная оценка «-7» в последней строке).

$\min(\frac{28}{1}; \frac{10}{1}; \frac{24}{3}) = 8$, что соответствует 3-й строке. Она будет разрешающей в табл. 6.2.

Таблица 6.3

№ n/	Б		1	2	3	4	5	С
1		0		1			1/3	-
2				2			1/3	-
3				1			1/3	1
m	Z_j	-		-			7	
+1	C_j	6		2/3			1/3	

$\bar{X}_{B_2}=(8,0,20,2,0)$ - не оптимальное, $Z(\bar{X}_{B_2})=56$. A_2 - ведущий столбик,
 $\min(\frac{20}{11/3}; \frac{2}{2/3}; \frac{8}{1/3})=3$, что соответствует 2-й строке табл. 6.3.

Таблица 6.4

			B	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
1	A ₃	0	9	0	0	1	- 11/2	3/ 2
2	A ₂	3	3	0	1	0	3/ 2	- 1/2
3	A ₁	7	7	1	0	0	- 1/2	1/2
m	Z _j - C _j		58	0	0	0	1	2
+1								

$\uparrow y_1^0$ $\uparrow y_2^0$ $\uparrow y_3^0$

$\bar{X}_{B_3}^0=(7,3,9,0,0)$ - оптимальный результат. $Z_{\max}=Z(\bar{X}_{B_3}^0)=58$, т.к. нет отрицательных относительных оценок в (m+1) строке. Оптимальный ответ для двойственной задачи: $y_1^0=0, y_2^0=1, y_3^0=2$;

$$\varphi_{\min}=\varphi(Y^0)=58.$$

В табл. 6.4 симплексных процедур получен оптимальный результат $x_1^0=7, x_2^0=3, x_3^0=9, x_4^0=0, x_5^0=0$. Так как x_1 -план выпуска товара T_1 , то для получения максимального дохода надо выпускать 7 тонн этого товара, второго товара T_2 надо выпускать 3 тонны. Так как x_3, x_4, x_5 - балансовые переменные соответственно по ресурсам S_1, S_2, S_3 (см. равенства (6.16.1), (6.16.2), (6.16.3)), то $x_3^0=9$ означает, что при реализации оптимального результата 1-й ресурс S_1 будет недоиспользован на 9 усл. единиц (в измерениях 1-го ресурса); $x_4^0=0$ означает, что ресурс S_2 будет полностью использован; $x_5^0=0$ - ресурс S_3 также будет полностью использован (исчерпан).

Оптимальная таблица 6.4 также дает нам информацию об оптимальных значениях переменных двойственной задачи (6.12)-(6.14). Именно, значения «теневых» цен $y_1^0=0, y_2^0=1, y_3^0=2$ ресурсов S_1, S_2, S_3 читаются в (m+1)-й целевой строке соответственно в столбцах A_3, A_4, A_5 которые соответствовали единичным столбцам исходных базисных переменных в табл. 6.2. В самом деле, в столбце A_3 табл. 6.2 единица стоит в 1-й строке (ресурс S_1), в столбце A_4 единица стоит во 2-й строке (ресурс S_2) и в столбце A_5 - в третьей строке (ресурс S_3).

Кстати, на месте этих единичных векторов в строках ограничений в оптимальной таблице (табл. 6.4) получается обратная матрица линейных преобразований симплексного решения от исходной табл. 6.2 к оптимальной таблице 6.4. Эта матрица выделена квадратом в табл. 6.4. Обозначим ее через D^{-1} . У нас в оптимальной таблице

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -11/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

С помощью этой матрицы можно выполнять важные вычисления и

осуществлять полезный экономический анализ. Но об этом позднее.

Информация из столбцов обратной матрицы линейных преобразований, приведших к оптимальному результату. Из столбцов матрицы D^{-1} можно почерпнуть весьма полезную информацию.

Столбец A_3 : «теневая» цена ресурса S_2 равна $y_1^0=0$, столбец остался единичным и по первой строке можно прочесть, что $x_3=9$, т.е. при реализации найденного оптимального плана 1-й ресурс окажется в избытке, причем этот избыток (недоиспользование) как раз составит 9 условных единиц.

Столбец A_4 : «теневая» цена ресурса S_2 равна $y_2^0=1$, ресурс будет полностью использован и его возможное увеличение будет вести к увеличению целевой функции (т.е. дохода). И т.к. $y_2^0=1$, то увеличение ресурса S_2 на 1 у.е. будет давать добавку по доходу на $\Delta Z = y_2^0 \cdot \Delta b_2 = 1 \cdot 1 = 1$ (тыс. грн.) (здесь Δb_2 - приращение ресурса S_2 и ΔZ - соответствующее приращение дохода). При таком приращении ресурса S_2 максимальный доход уже составит $Z_{\max}=58$ тыс. грн. + 1 тыс. грн. = 59 тыс. грн. На рис. 6.2 проиллюстрирована эта ситуация, комментарий по отношению к которой будет приведен ниже.

Из столбца A_4 еще следует, что при увеличении ресурса S_2 на 1 у.е. для новой оптимальной точки выпуск товара T_1 сократится на $\frac{1}{2}$ тонны (на пересечении строки базисной переменной x_1 и столбца A_4 стоит «-1/2»), а выпуск товара T_2 увеличится на $\frac{3}{2}$ тонны (т.к. в строке с базисной переменной x_2 в столбце A_4 имеем «3/2»).

Сказанное по столбцу A_4 будет ниже прокомментировано с помощью графических построений (рис. 6.2).

Столбец A_5 : «теневая» цена ресурса S_3 равна $y_3^0=2$. Это означает, что увеличение ресурса S_3 на 1 у.е. принесет добавку по Z на $\Delta Z = y_3^0 \cdot \Delta b_3 = 2 \cdot 1 = 2$ (тыс. грн.) и составит $Z_{\max}=58$ тыс. грн. + 2 тыс. грн. = 60 тыс. грн. При этом, как следует из столбика A_5 табл. 3, выпуск T_1 увеличится на $\frac{1}{2}$ тонны, а T_2 уменьшится на $\frac{1}{2}$ тонны. Запас по сырью S_1 (см. 1-ю строку) увеличится на $\frac{3}{2}$ у.е.

Иллюстрация к увеличению ресурса S_2 на 1 у.е.

На рис. 6.1 показано графическое решение примера. Оптимальный результат наблюдается в точке $C(7, 3)$. На рис. 6.2 показаны изменения в получении оптимального результата в предположении, что ресурс S_2 имеется теперь в наличии $b'_2 = b_2 + \Delta b_2 = 10 + 1 = 11$ (усл.ед.).

На иллюстрирующем графике границей по второму ресурсу станет прямая $x_1 + x_2 = 11$. Если раньше областью допустимых планов был пятиугольник $OABCD$, то теперь станет $OAVWD$, а в качестве оптимальной точки предстанет точка $W(6,5; 4,5)$. Как раз из столбца A_4 таблицы 6.4 мы получаем информацию об уменьшении выпуска товара T_1 на $\frac{1}{2}$ тонны и об увеличении выпуска товара T_2 на $\frac{3}{2}$ тонны. Такие изменения как раз и приводят нас к координатам точки $W(7 - \frac{1}{2} = 6,5; 3 + \frac{3}{2} = 4,5)$. Этим изменениям выпуска товаров T_1 и T_2 отвечают соответственно отрезки CK и KW на рис. 6.2. Из чертежа явно следует, что точка W ближе к границе 1-го ресурса, чем точка C , т.е. будет иметь место

X_2
 (0,10)
 (0,24)
 (7,3)
 (23,0)

OABCD - область допустимых планов
 C(7,3) - max, $Z_{\max} = 58$
 $Z = C_k$ ($k=1,2,3$) - уровни целевой функции ($C_1 < C_2 < C_3$)

ОАВВД - область допустимых планов при увеличении ресурса S2 на 1 единицу. При этом $W(6,5;4,5)$ - max, $Z(W) = 59$. Выпуск 1-го товара уменьшится на 0,5 т., а 2-го товара увеличится на 1,5 т. (Это отрезки СК и КW)



Продолжаем экономический анализ рассматриваемого примера с помощью математических приемов линейного программирования. Сейчас нас будет интересовать неизменность полученного оптимального плана выпуска товаров ($X_1=7$ тонн, $X_2=3$ тонны) в зависимости от изменения цен реализации товаров. В графическом рассмотрении примеров уже подчеркивалось, что в некотором диапазоне изменения цен сохраняется признак оптимальности (т.е. сохраняется знак неотрицательности относительных оценок, если решение осуществляется с помощью симплекс-метода).

$$\mathbf{B} \quad \mathbf{C}_B$$

$$\begin{array}{l} A3 \\ A2 \\ A1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{цена } x_2 \\ \rightarrow \text{цена } x_1 \end{array} \right\} \text{соответственно индексам}$$

Пусть C_1 будет даваться приращение ΔC_1 и C_2 - приращение ΔC_2 . Т.к. у нас $C_1=7$ и $C_2=3$, то фиксируем вектор C_B в виде матрицы-строки $(0 \quad 3+\Delta C_2 \quad 7+\Delta C_1)$. Из той же таблицы 6.4 фиксируем обратную матрицу преобразований:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -11/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Она в таблице выделена квадратом.

Полученную матрицу-строку умножаем на матрицу D^{-1} . Для сохранения признака оптимальности элементы этого произведения должны оставаться неотрицательными.

$$\begin{aligned} (0 \quad 3+\Delta C_2 \quad 7+\Delta C_1) \begin{pmatrix} 1 & -11/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \\ = (0 \quad \frac{3}{2}(3+\Delta C_2) - \frac{1}{2}(7+\Delta C_1) \quad -\frac{1}{2}(3+\Delta C_2) + \frac{1}{2}(7+\Delta C_1)). \end{aligned}$$

Требование неотрицательности здесь остается только записать для 2-й и 3-й компонент:

$$\begin{cases} \left[\frac{3}{2}(3+\Delta C_2) - \frac{1}{2}(7+\Delta C_1) \right] \geq 0, \\ \left[-\frac{1}{2}(3+\Delta C_2) + \frac{1}{2}(7+\Delta C_1) \right] \geq 0. \end{cases} \quad (6.18)$$

Рассмотрим только отдельное изменение либо цены C_1 , либо цены C_2 .

Пусть $\Delta C_2=0$, т.е. меняется только цена первого товара. Иными словами, меняется в целевой функции только коэффициент при x_1 , тогда наши требования преобразуются в неравенства:

$$\begin{cases} \left(\frac{9}{2} - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\Delta C_1 \right) \geq 0 \Rightarrow 2 - \Delta C_1 \geq 0, \Delta C_1 \leq 2, \\ \left(-\frac{3}{2} + \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\Delta C_1 \right) \geq 0 \Rightarrow 4 + \Delta C_1 \geq 0, \Delta C_1 \geq -4. \end{cases}$$

Итак, неизменность полученного оптимального результата гарантирована нам, если приращение цены C_1 лежит в пределах

$$-4 \leq \Delta C_1 \leq 2$$

Соответственно, цена C_1 должна принадлежать диапазону изменений

$$7-4 \leq C_1 \leq 7+2 \text{ или } 3 \leq C_1 \leq 9.$$

Пусть теперь $\Delta C_1=0$, т.е. меняется только коэффициент при переменной x_2 в целевой функции.

Тогда из неравенств (6.18) имеем:

$$\begin{cases} (\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\Delta C_2 - \frac{7}{2}) \geq 0 \Rightarrow 2 + 3\Delta C_2 \geq 0; \Delta C_2 \geq -\frac{2}{3}, \\ (-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Delta C_2 + \frac{7}{2}) \geq 0 \Rightarrow 4 - \Delta C_2 \geq 0; \Delta C_2 \leq 4. \end{cases}$$

Теперь неизменность полученного оптимального результата гарантирована при приращении ΔC_2 в пределах

$$-\frac{2}{3} \leq \Delta C_2 \leq 4.$$

Соответственно, цена C_2 должна принадлежать диапазону изменений

$$3 - \frac{2}{3} \leq C_2 \leq 3 + 4 \text{ или } 2\frac{1}{3} \leq C_2 \leq 7, \text{ что равносильно } 2,333 \leq C_2 \leq 7.$$

Общий вывод: план выпуска $x_1^0=7$ тонн и $x_2^0=3$ тонны, остается оптимальным, если цена первого товара меняется от 3 тыс. грн/т до 9 тыс. грн/т, но цена 2-го товара остается исходно заданной 3 тыс. грн/т; либо цена 1-го товара остается фиксированной в 7 тыс. грн/т, а цена 2-го товара меняется в пределах от 2,333 тыс. грн/т до 7 тыс. грн/т.

В случае вырожденности оптимального результата, т.е. когда выпуск некоторых товаров в оптимальном плане равен нулю, анализ устойчивости оптимального плана в зависимости от цен следует проделать с позиции параметрического программирования (см. § 9).

Очередным пунктом исследований будет анализ устойчивости (неизменности) двойственных оценок (теневых цен) относительно изменения объемов имеющихся ресурсов S_1, S_2, S_3 .

Опять же будет использоваться обратная матрица

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -11/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

воспроизводимая из оптимальной таблицы 6.4 симплексного решения и матрица-столбик наличных объемов ресурсов, которые будут подвержены изменениям с помощью приращений $\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3$:

$$(B + \Delta B) = \begin{pmatrix} b_1 & + & \Delta b_1 \\ b_2 & + & \Delta b_2 \\ b_3 & + & \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & + & \Delta b_1 \\ 10 & + & \Delta b_2 \\ 24 & + & \Delta b_3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляется произведение матриц

$$D^{-1}(B + \Delta B) = \begin{pmatrix} 1 & -11/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 & + & \Delta b_1 \\ 10 & + & \Delta b_2 \\ 24 & + & \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + \Delta b_1 - \frac{11}{2}\Delta b_2 + \frac{3}{2}\Delta b_3 \\ 3 + \frac{3}{2}\Delta b_2 - \frac{1}{2}\Delta b_3 \\ 7 - \frac{1}{2}\Delta b_2 + \frac{1}{2}\Delta b_3 \end{pmatrix}.$$

Для устойчивости двойственных оценок, т.е. чтобы они оставались равными $y_1^0=0$, $y_2^0=1$, $y_3^0=2$, компоненты полученной матрицы-столбца должны быть неотрицательны:

$$\left\{ \begin{array}{l} 9 + \Delta v_1 - \frac{11}{2} \Delta v_2 + \frac{3}{2} \Delta v_3 \geq 0, \\ 3 + \frac{3}{2} \Delta v_2 - \frac{1}{2} \Delta v_3 \geq 0, \\ 7 - \frac{1}{2} \Delta v_2 + \frac{1}{2} \Delta v_3 \geq 0; \end{array} \right. \quad (6.19)$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\Delta v_1 + 11\Delta v_2 - 3\Delta v_3 \leq 18, \\ -3\Delta v_2 + \Delta v_3 \leq 6, \\ \Delta v_2 - \Delta v_3 \leq 14. \end{array} \right. \quad (6.20)$$

Как и в предыдущем пункте исследований анализ устойчивости будем проводить лишь в отдельности по одному фактору.

Если наличие ресурсов S_2 и S_3 не меняется, т.е. $\Delta v_2=0$ и $\Delta v_3=0$, то из неравенств (6.20) следует: $-2\Delta v_1 \leq 18$ или $\Delta v_1 \geq -9$.

А так как $v_1 = 28$, то диапазон изменений v_1 ограничен снизу, но не ограничен сверху: $28-9 \leq v_1 < +\infty$, т.е. $v_1 \geq 19$.

Если меняется только S_2 , т.е. $\Delta v_1=0$ и $\Delta v_3=0$, то из неравенств (6.20) имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta v_2 \leq \frac{18}{11} \\ \Delta v_2 \geq -2 \\ \Delta v_2 \leq 14 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \leq \Delta v_2 \leq \frac{18}{11} \approx 1,636$$

А диапазон изменения v_2 будет таким: $(10-2) \leq v_2 \leq (10+\frac{18}{11})$ или

$$8 \leq v_2 \leq \frac{128}{11} \approx 11,636.$$

Если меняется только объем ресурса S_3 , т.е. $\Delta v_1=0$ и $\Delta v_2=0$, то из неравенств (6.20) получаем:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta v_3 \geq -6 \\ \Delta v_3 \leq 6 \\ \Delta v_3 \geq -14 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{в итоге } -6 \leq \Delta v_3 \leq 6.$$

Соответственно, диапазон изменения v_3 таков $(24-6) \leq v_3 \leq (24+6)$ или $18 \leq v_3 \leq 30$.

Тогда, если, например,

уменьшим S_1 на 9 единиц,

увеличим S_2 на 1 единицу,

увеличим S_3 на 6 единиц, то при сохранившихся «теневых» ценах $y_1^0=0$, $y_2^0=1$, $y_3^0=2$ будем иметь прирост по доходу

$$\Delta Z = y_1^0 \cdot \Delta v_1 + y_2^0 \cdot \Delta v_2 + y_3^0 \cdot \Delta v_3 = 0 \cdot (-9) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 13 \text{ (тыс. грн.)}$$

и соответственно максимальный доход станет равным $Z = 58 + 13 = 71$ (тыс. грн.).

Рассмотрим гипотезы о выпуске еще одного товара.

Пусть в условиях нашего примера имеется технологическая возможность выпускать еще один товар T_3 . Пусть нормозатраты ресурсов S_1, S_2, S_3 на товар T_3 известны и равны соответственно d_{13}, d_{23}, d_{33} . Цена реализации нового товара предполагается равной d_3 . Надо установить, даст ли прибыль включение в план выпуска дополнительного товара T_3 . Какой должна быть цена единицы товара T_3 , чтобы его производство было рентабельным.

Конечно, для решения этого вопроса можно в условие примера (6.9) – (6.11) включить план выпуска товара T_3 , т.е. x_3 , а затем заново решить задачу, которая примет вид:

$$\begin{aligned} & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0; \\ & \begin{cases} x_1 + 4x_2 + d_{13}x_3 \leq 28, \\ x_1 + x_2 + d_{23}x_3 \leq 10, \\ 3x_1 + x_2 + d_{33}x_3 \leq 24; \end{cases} \\ & Z = 7x_1 + 3x_2 + d_3x_3 \rightarrow \max, \end{aligned}$$

где $d_{13}, d_{23}, d_{33}, d_3$ конкретно заданы.

Но необходимости в таких действиях нет, т.к. известны «теневые» цены ресурсов при оптимальных планах выпуска товаров T_1 и T_2 . Надо лишь сопоставить дополнительные затраты на ресурсы в расчете на единицу товара T_3 с ценой его реализации d_3 .

Дополнительные затраты будут равны $d_{13}y_1^0 + d_{23}y_2^0 + d_{33}y_3^0$.

Пусть, например, задано, что $d_{13}=2, d_{23}=2, d_{33}=1, d_3=3$ тыс.грн. Тогда учитывая, что в нашем примере (6.12)-(6.14) $y_1^0=0, y_2^0=1, y_3^0=2$, дополнительные затраты равны $2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$. Получилось, что дополнительные затраты больше предполагаемой цены товара $d_3=3$. Поэтому выпуск товара T_3 не следует включать в план выпуска, и необходимость повторного решения для расширенной модели отпадает. А чтобы производство товара T_3 стало рентабельным, его цена должна составить не менее 4 тыс. грн/т.

Последнее, чем мы займемся в экономико-математическом анализе нашего примера, это вопрос о так называемой взаимозаменяемости ресурсов. Причем этот вопрос будет даже рассматриваться в более широком плане, чем взаимозаменяемость ресурсов одного и того же технологического назначения. Именно будет рассматриваться в стоимостном плане с помощью «теневых» цен ресурсов. Сущность возникшей проблемы мы проиллюстрируем с помощью графики на рис. 6.3. Заметим, что этот рисунок имеет лишь качественное отношение к рассматриваемому примеру (6.9)-(6.11).

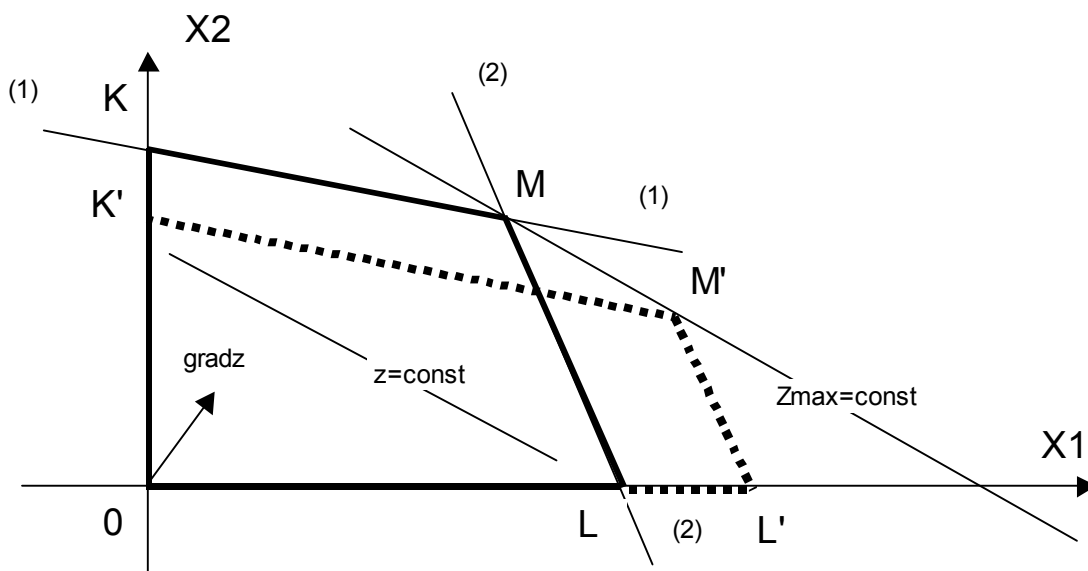


Рис. 6.3.

На иллюстрирующем графике рис. 6.3 имеется в виду наличие двух ресурсов при двух планируемых товарах x_1 и x_2 . Пусть первоначально область допустимых планов представлена четырехугольником OKML. Пусть уровни целевой функции таковы, что максимум наступает в точке M.

Координаты этой точки как раз и составят оптимальный план задачи. Видно, что точка M представляет собой пересечение границ наличия первого и второго ресурсов. (Прямая (1), проходящая через K и M, и прямая (2), проходящая через M и L). Пусть теперь при прежних нормзатратах уменьшилось наличие 1-го ресурса, т.е. граница (1) смещается параллельно KM книзу, и увеличилось наличие второго ресурса, т.е. граница (2) смещается параллельно ML направо. Тогда область допустимых планов предстанет в виде нового четырехугольника, например, OK'M'L'. Оптимальной точкой будет M'. Если она лежит на прежнем максимальном уровне $Z=Z_{\max}$, то как раз говорят о том, что ресурсы взаимозаменялись. Ведь у нас получилось, что первый ресурс уменьшился, второй – увеличился, а максимальный доход останется прежним. Пусть нам, например из симплексного решения, известны теневые цены y_1^0 и y_2^0 ресурсов для рис. 6.3, тогда норма заменяемости определяется из отношения теневых цен ресурсов, т.е. как $y_1^0 : y_2^0$.

А теперь остается вернуться к рассматриваемому примеру (6.9)-(6.11). Из рис. 6.1 видно, что максимум будет иметь место в точке C (7, 3), представляющей собой пересечение границ-условий 2-го и 3-го ресурса. Из симплексного решения у нас есть информация о «теневых» ценах 2-го и 3-го ресурсов. Это $y_2^0=1$ и $y_3^0=2$. Тогда норма заменяемости этих ресурсов равна $\frac{y_2^0}{y_3^0} = \frac{1}{2}$ или $2y_2^0 = y_3^0$. Это означает, что увеличение 2-го ресурса на 2 единицы равноценно изменению (уменьшению) 3-го ресурса на 1 единицу.

При решении вопроса о взаимозаменяемости надо следить за тем, чтобы не нарушались условия по прочим ресурсам.

§ 7. ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим решение однопродуктовой (однотоварной) транспортной задачи (например, задачи о перевозке угля в рамках региона).

Пусть имеется m поставщиков с резервами (запасами) товара $a_1, a_2, \dots, a_m$. Имеется соответственно n потребителей с потребностями $b_1, b_2, \dots, b_n$. Цены на перевозку единицы товара (например, за 1 т) известны. Именно, пусть C_{ij} - цена перевозки единицы товара от i -го – поставщика j -му потребителю.

Задание транспортной задачи и ее решение удобно осуществлять с помощью транспортной таблицы (матрицы) следующего вида:

Потр. Пост.	b_1	...	b_j	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}
...	...	...	...	...	...
a_i	c_{i1} x_{i1}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}
...	...	...	...	...	...
a_m	c_{m1} x_{m1}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}

В левых верхних углах рабочих клеток записываем цены перевозок (c_{11} - цена перевозки единицы товара от первого поставщика первому потребителю, c_{1j} - от первого к j -му, c_{1n} - от первого к n -му и т.д.). В самих клетках будут размещаться планируемые перевозки. В общем случае через x_{ij} обозначается планируемая перевозка от i -го поставщика к j -му потребителю. Величины x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) нам как раз требуется определить. Эти величины (планируемые перевозки) должны быть определены такими, чтобы общая стоимость перевозок была минимальной. Если эту общую стоимость обозначить через z , то она выражается суммой произведений каждой планируемой перевозки на соответствующую цену, т.е.

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1j}x_{1j} + \dots + c_{1n}x_{1n} +$$

.....

$$+ c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mj}x_{mj} + \dots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$$

Итак, нашей целью будет определение таких значений $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn}$, при которых z принимает наименьшее возможное значение (т.е. $z = \min$).

Исследование задачи и ее решение начинается с подсчета сумм товара, соответственно имеющегося у поставщиков и требуемого всеми потребителями:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_i + \dots + a_m = \sum_{i=1}^m a_i,$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_j + \dots + b_n = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Если эти суммы одинаковы, т.е. $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, то транспортная задача называется закрытой и к ее решению можно непосредственно приступить.

Если же $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$, то задача называется открытой; для ее решения необходимо произвести сбалансирование (уравнивание) поставок и потребностей. Делается это путем введения фиктивного поставщика или фиктивного потребителя в зависимости от соотношения между собой сумм $\sum_{i=1}^m a_i$ и $\sum_{j=1}^n b_j$.

Если $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то вводится под номером $(m + 1)$ фиктивный поставщик с поставкой $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$.

Если же $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то вводится $(n + 1)$ -й фиктивный потребитель с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$.

С введением фиктивного поставщика в транспортной таблице дополнительно появляются n рабочих клеток (дополнительная строка), если же добавлен фиктивный потребитель, то возникает дополнительно m рабочих клеток (дополнительный столбец). Тут же возникает проблема: какие цены будут присвоены этим клеткам? Прежде всего очевидно, что фиктивная строка или фиктивный столбик должны быть нейтральны по отношению к процедуре оптимального выбора плановых перевозок. Нейтральность может быть обеспечена тем, что все цены в фиктивных клетках выбираются одинаковыми. А чтобы эти цены при поставках в фиктивные клетки не влияли на значения целевой функции, их берут все равными нулю, т.е. для фиктивного поставщика $c_{m+1,1} = 0, \dots, c_{m+1,j} = 0, \dots, c_{m+1,n} = 0$. Если же добавлен фиктивный потребитель, то $c_{1,n+1} = 0, \dots, c_{i,n+1} = 0, \dots, c_{m,n+1} = 0$.

После того как мы имеем или обеспечили закрытость решаемой задачи, приступаем к построению опорного плана. Итак, пусть задача имеет размер

$m \cdot n$ и является закрытой, т.е. $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. В этом случае общее число

неизвестных равно $m \cdot n$, а количество описывающих линейно независимых уравнений равно $(m + n - 1)$. Следовательно, базисных переменных, т.е.

заполненных клеток в транспортной матрице, должно быть $m + n - 1$. Имеется целый ряд приемов по построению первого опорного плана. Некоторые из этих приемов носят формальный характер и не ориентируются на цены перевозок конкретно рассматриваемой задачи.

На конкретном примере рассмотрим два приема: северо-западный и двойного предпочтения.

Пусть задана следующая задача:

Таблица 7.1.

Потр. Пост.	$b_1 = 80$	$b_2 = 90$	$b_3 = 110$	$b_4 = 80$
$a_1 = 120$	2	3	4	1
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
$a_2 = 140$	3	2	1	3
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
$a_3 = 100$	4	1	2	4
	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

Сначала проверяем, является ли заданная задача закрытой или нет. Находим суммы

$$\sum_{i=1}^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 120 + 140 + 100 = 360, \quad \sum_{j=1}^4 b_j = 80 + 90 + 110 + 80 = 360. \quad \text{Так как суммы}$$

совпадают, т.е. $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j$, то заданная задача закрытая и можно

приступать к ее решению. Решение задачи состоит в том, что значения 12 переменных $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{34}$ должны быть найдены такими, чтобы общая стоимость перевозок $z = 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + \dots + 2x_{33} + 4x_{34}$ была минимальной. Другими словами, надо в 12-мерном пространстве переменных найти точку с такими координатами $x_{11}^0, x_{12}^0, \dots, x_{34}^0$, чтобы в этой точке общая цена перевозок z была минимальной. Из теории задач линейного программирования нам известно, что оптимальную точку надо искать среди угловых точек многогранника допустимых решений. Для закрытой транспортной задачи угловые точки множества допустимых решений должны иметь не более $(m + n - 1)$ положительных координат (если задача не вырожденная, то угловая точка имеет ровно $m + n - 1$ положительных координат). Те приемы построения опорного плана, которые мы сейчас покажем, как раз и обеспечивают нам выход в угловую точку области допустимых решений.

Северо-западный прием построения опорного плана. Согласно этому приему формирование величин перевозок начинается с с.-з. уголка таблицы, т.е. с клетки x_{11} . По этому приему прежде всего распределяется товар первого поставщика. Причем первый поставщик сначала предельно возможно

удовлетворяет первого потребителя. Затем, если у поставщика товар еще остался, он предельно возможно удовлетворяет второго потребителя и так далее. Опишем прием для нашего примера. Первый поставщик имеет товар $a_1 = 120$. Первому потребителю требуется товар $b_1 = 80$, т.к. $a_1 > b_1$, имеется полная возможность предельно удовлетворить первого потребителя. Принимаем $x_{11} = 80$. После такого решения у первого поставщика остается еще товар в 40 единиц. Так как первый поставщик должен теперь предельно возможно позаботиться о втором потребителе, то принимаем $x_{12} = 40$. После этого решения нам ясно, что у первого поставщика товар исчерпан и уже $x_{13} = 0$ и $x_{14} = 0$. Приступаем к распределению товара второго поставщика. Всего второй поставщик имеет резерв в 140 единиц. Так как первый потребитель полностью получил товар от первого поставщика, то $x_{21} = 0$. Второму потребителю еще нужна поставка в 50 единиц. Эту поставку обеспечит второй поставщик, если взять $x_{22} = 50$. Далее с очевидностью берется $x_{23} = 90$, и второй поставщик выбывает из рассмотрения. Следовательно, x_{24} уже имеет нулевое значение. Наконец, начинается распределение товара третьего поставщика. Первому и второму потребителям товар уже не нужен, третьему посылается недостающий товар $x_{33} = 20$, а четвертому - необходимый остаток $x_{34} = 80$. В результате получаем следующее распределение поставок (табл. 7.2).

Обратим внимание, что при $m = 3$ и $n = 4$ мы как раз имеем нужное количество существенно заполненных клеток $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Заметим, что в клетках с нулевыми поставками мы 0 не ставим. Нулевые поставки проставляются в клетках таблицы лишь в том случае, если число заполнений меньше, чем $(m + n - 1)$. Причем нулей ставится ровно столько, сколько недостает до нужного числа заполнений $(m + n - 1)$. Для постановки дополнительных нулей есть специальные правила, что мы оговорим в дальнейшем. И еще заметим, что табл. 7.2 соответствует стоимость перевозок $z = 2 \cdot 80 + 3 \cdot 40 + 2 \cdot 50 + 1 \cdot 90 + 2 \cdot 20 + 4 \cdot 80 = 830$ денежных единиц.

Таблица 7.2.

Потр. Пост.	$b_1 = 80$	$b_2 = 90$	$b_3 = 110$	$b_4 = 80$
$a_1 = 120$	2 80	3 40	4	1
$a_2 = 140$	3	2 50	1 90	3
$a_3 = 100$	4	1	2 20	4 80

При использовании с.-з. приема мы никакого внимания не обращали на цены перевозок. Рассмотрим на нашем примере использование приема двойного

предпочтения, который уже сориентирован на учет цен перевозок. Прием реализуется так. Сначала делаем пометки (например, знаком ▼) в тех клетках строк, в которых наблюдается самая меньшая цена по строке. Затем обходим таблицу по столбикам и делаем такие же пометки в клетках, в которых самая маленькая цена по столбикам. В табл. 7.1 в первой строке самая маленькая цена c_{14} . Эту клетку помечаем знаком ▼. Во второй строчке самая маленькая цена c_{23} . И эту клетку метим. В третьей строке самая маленькая цена c_{32} , что и отмечается. Далее таблицу обходим по столбикам и тоже метим прежним значком те клетки, для которых самая маленькая цена по столбцу. В первом столбике это клетка с ценой c_{11} , во втором столбике - с ценой c_{32} , в третьем – c_{23} , в четвертом - c_{14} . В результате получаем табл. 7.3.

Таблица 7.3.

Потр. Пост.	$b_1 = 80$	$b_2 = 90$	$b_3 = 110$	$b_4 = 80$
$a_1 = 120$	2 ▼	3	4	1 ▼ ▼
$a_2 = 140$	3	2	1 ▼ ▼	3
$a_3 = 100$	4	1 ▼ ▼	2	4

Видно, что после такой работы некоторые клетки получили по две отметки, некоторые по одной, а целый ряд клеток вовсе не имеет пометок. Дальнейшее распределение делается сначала предельно возможно по клеткам с двумя отметками, потом - с одной, а затем делается добалансировка задачи до $(m + n - 1)$ заполнений. Заполнения организуем при прохождении таблицы слева направо и сверху вниз. Обходя клетки с двойными отметками, получим $x_{14} = 80$, $x_{23} = 110$, $x_{32} = 90$. Затем начинаем обходить клетки с одной отметкой. У нас это клетка x_{11} . Но этой клетке требуется товар в 80 единиц, но т.к. первая база уже отправила товар $x_{14} = 80$, то нам остается назначить $x_{11} = 40$. Далее делается добалансировка задачи. Первый поставщик товар полностью отдал. У второго поставщика остался товар в 30 единиц, и он посылается первому потребителю, т.к. другим потребителям товар уже не нужен. Итак, $x_{21} = 30$. И, наконец, берем $x_{31} = 10$. Это то, что осталось у третьего поставщика и еще требуется первому потребителю. Получаем табл. 7.4 с нужным количеством заполненных клеток $m + n - 1 = 6$.

Таблица 7.4.

Потр. Пост.	$b_1 = 80$	$b_2 = 90$	$b_3 = 110$	$b_4 = 80$
$a_1 = 120$	2 40	3	4	1 80
$a_2 = 140$	3 30	2	1 110	3
$a_3 = 100$	4 10	1 90	2	4

Подсчитаем цену перевозок, соответствующую этой таблице:

$$z = 2 \cdot 40 + 1 \cdot 80 + 3 \cdot 30 + 1 \cdot 110 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 90 = 490.$$

В табл. 7.2 и 7.4 получены различные опорные планы для одной и той же транспортной задачи. Однако опорный план табл. 7.4 более привлекателен, т.к. имеет меньшую цену. Однако мы все равно не знаем, является ли план перевозок табл. 7.4 оптимальным или нет. Для обеспечения оптимального поиска будем использовать метод потенциалов, который является разновидностью симплекс-метода, приспособленной для решения транспортной задачи. Перед тем как перейти к рассмотрению метода потенциалов, рассмотрим еще один пример построения опорного плана, когда заполнений получается меньше нужного, т.е. меньше $(m + n - 1)$. Пусть в приводимом ниже примере закрытой задачи уже реализован северо-западный прием по построению опорного плана (табл. 7.5).

Таблица 7.5.

Потр. Пост.	$b_1 = 40$	$b_2 = 50$	$b_3 = 110$	$b_4 = 40$
$a_1 = 90$	2 40	5 50	3	1
$a_2 = 80$	3	1	2 80	4
$a_3 = 70$	4	2	1 30	5 40

Из-за наличия частичных балансов, т.е. когда сумма некоторых a_i равна сумме некоторых b_j , в таблице получилось пять заполнений. Должно быть $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ заполнений. Возникает вопрос: в какую же клетку поставить одно недостающее заполнение, отмечаемое числом 0 (нуль). Этот нуль надо поместить так, чтобы можно было, начав с какой-нибудь заполненной клетки и делая переходы от заполнения к заполнению вдоль строки или вдоль

столбика, побывать во всех заполненных клетках. В нашем примере нуль помещать не следует лишь в клетке (2, 4) переменной x_{24} . В любой из остальных пустых клеток можно поместить 0.

Поместим нуль в клетке (2,2), тогда рассматриваемая задача с первым опорным планом примет вид:

Таблица 7.6.

Потр. Пост.	$b_1 = 40$	$b_2 = 50$	$b_3 = 110$	$b_4 = 40$
$a_1 = 90$	2	5	3	1
	40	50		
$a_2 = 80$	3	1	2	4
		0	80	
$a_3 = 70$	4	2	1	5
			30	40

В этой таблице тем самым подчеркнуто, что переменная $x_{22} = 0$ является базисной. Клетка переменной x_{22} будет считаться заполненной. Переменные x_{13} , x_{14} , x_{21} , x_{24} , x_{31} , x_{32} , как и переменная x_{22} , равны нулю, но в отличие от x_{22} они являются свободными переменными по своему качественному участию в процессе решения.

Опорный план в табл. 7.6 получен без учета цен перевозок, этому опорному плану соответствует общая стоимость перевозок в 720 денежных единиц. Является полученный опорный план оптимальным или нет - мы не знаем. На этот вопрос при решении транспортной задачи нам ответит метод потенциалов, к рассмотрению которого мы и переходим.

Пусть задача имеет закрытый вид (или приведена к закрытому виду) и для нее построен опорный план, тогда для получения оптимального плана перевозок можно применить метод потенциалов. Порядок решения по методу потенциалов следующий:

1. Присваиваются потенциалы (числа) строкам (u_i , $i = 1, 2, \dots, m$) и столбцам (v_j , $j = 1, 2, \dots, n$). Потенциалы присваиваются в силу цен c_{kl} заполненных клеток x_{kl} . Для каждой заполненной клетки должно выполняться равенство

$$u_k + v_l = c_{kl} \quad (k = \overline{1, m}; l = \overline{1, n}). \quad (7.1)$$

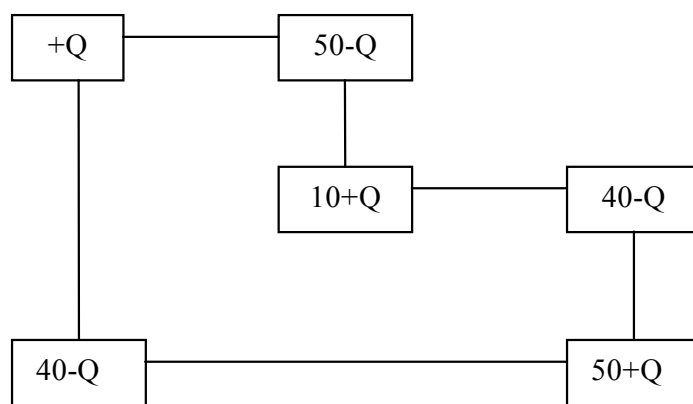
Т.к. заполненных клеток ($m + n - 1$) штук, а неизвестных потенциалов ($m + n$), то один потенциал выбираем произвольно, а остальные находим из указанных уравнений (7.1).

2. Для пустых клеток, соответствующих свободным (небазисным) переменным, вычисляются оценки оптимальности

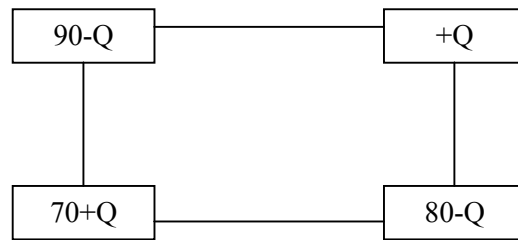
$$\bar{c}_{pq} = u_p + v_q - c_{pq}.$$

С помощью оценок $\bar{c}_{pq}$ определяется оптимальность или неоптимальность рассматриваемого плана перевозок. Именно, если все $\bar{c}_{pq} \leq 0$, то рассматриваемый план перевозок оптимальный и решение прекращается. Если же имеется хоть одна относительная оценка $\bar{c}_{pq} > 0$, то план перевозок не оптимальный и его следует улучшить.

3. Пусть рассматриваемый план перевозок не оптимальный, т.е. имеются положительные относительные оценки. Тогда берется неблагоприятная клетка (одна из неблагоприятных) и для нее строится цикл пересчета, согласно которому потом делается перераспределение намеченных перевозок. Цикл строится в виде ломаной замкнутой линии, отрезки которой идут либо вдоль столбика, либо вдоль строки. В одном из углов ломаной претендующая на товар неблагоприятная клетка, а в остальных углах клетки заполненные, т.е. при построении цикла мы исходим из претендующей клетки и возвращаемся в нее по ломаной, но повороты мы можем делать только в клетках заполненных (соответствующих базисным переменным). Пусть неблагоприятная клетка претендует на товар Q . Чтобы не произошел разбаланс в таблице, надо в переходах по циклу по очереди прибавлять и отнимать Q к имеющимся перевозкам. Так как углов чётное количество, в половине клеток Q прибавится, а в другой половине - отнимется. Обход цикла начинают по часовой стрелке или против с претендующей клетки, помещая туда товар Q , затем из соседней клетки вычитают Q , затем прибавляют и т.д. Сама величина Q выбирается так, чтобы одна из клеток опустошалась, но ни одна из поставок не стала бы отрицательной. Для этого Q надо выбрать равным наименьшему уменьшаемому из клеток, в которых Q вычитается. На следующих рис. 7.1 и 7.2 покажем примеры циклов и правило вычисления.

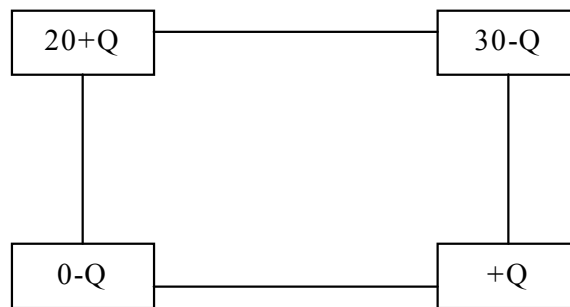


a) $Q = \min [50; 40; 40] = 40$

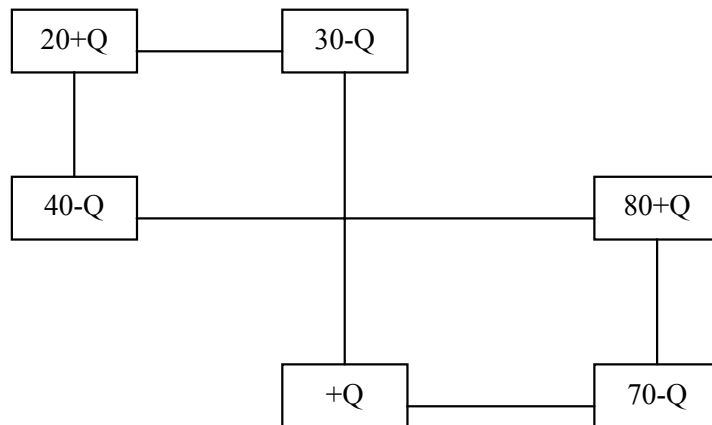


$$Q = \min [80; 90] = 80$$

Рис. 7.1.



в) $Q = \min [0; 30] = 0$



б) $Q = \min [70; 40; 30] = 30$

Рис. 7.2.

Из рис. 7.2 а) ясно, что $Q = 40$. При этом опустошаются две клетки. Но надо, чтобы взаимно пустой стала лишь одна клетка. Поступают так: одну из опустошающихся клеток делают пустой в новой таблице, а в другой опустошающейся клетке ставят нуль. Эта клетка считается в новой таблице базисной (заполненной). В случае, показанном на рис. 7.2 в) $Q = 0$, при этом нуль «перекочует» в претендующую клетку.

4. После пересчета по циклу возвращаются в п. I алгоритма. И так до тех пор, пока в рассматриваемой таблице более не будет положительных оценок $\bar{C}_{pq}$.

Проиллюстрируем применение метода потенциалов для решения транспортной задачи.

Пример 1. Решим транспортную задачу, для которой опорный план уже построен (табл. 7.6). У нас $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}$ - базисные переменные, клетки этих переменных заполнены (хотя бы нулем, как клетка x_{22}). Ориентируясь на цены заполненных клеток, составляем уравнения для определения потенциалов исходной табл. 7.6.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_1 + v_2 = 5, \\ u_2 + v_2 = 1, \\ u_2 + v_3 = 2, \\ u_3 + v_3 = 1, \\ u_3 + v_4 = 5. \end{cases} \quad (7.2)$$

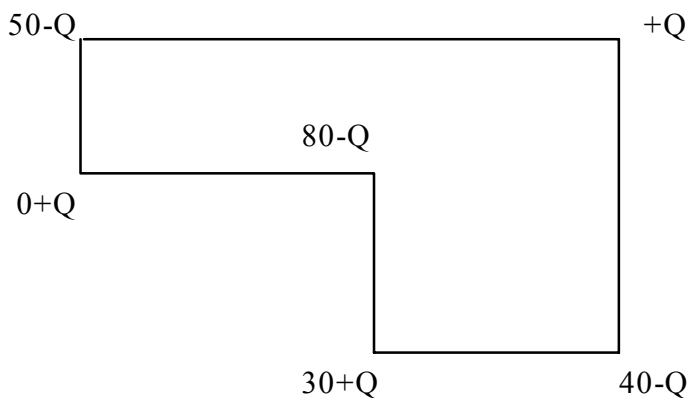
Записано 6 уравнений, в которых содержится 7 неизвестных – $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4$. Чтобы определить потенциалы из уравнений (7.2), надо один из потенциалов принять равным произвольному числу. Например, возьмем $u_1 = 0$. Тогда из (7.2) определяем остальные потенциалы: $v_1 = 2, v_2 = 5, u_2 = -4, v_3 = 6, u_3 = -5, v_4 = 10$.

Табл. 7.7 повторяет исходную табл. 7.6, но с информацией о найденных потенциалах. В этой же таблице отражены и остальные расчеты по алгоритму метода потенциалов.

Таблица 7.7.

Потр. Пост.	$b_1 = 40$	$b_2 = 50$	$b_3 = 110$	$b_4 = 40$	u_i
$a_1 = 90$	2 40	5 50	3 $\bar{C}_{13} = 0 + 6$	1 $\bar{C}_{14} = 0 + 10 = 0$	$u_1 = 0$
$a_2 = 80$	3 $\bar{C}_{21} = -4 + 2 - 3 = -5$	1 0	2 80	4 $\bar{C}_{24} = -4 + 10 = 6$	$u_2 = -4$

$a_3 = 70$	4 $\bar{C}_{31} = -5 + 2 - 4 = -7$	2 $\bar{C}_{32} = -5 + 5 - 2 = -2$	1 30	5 40	$u_3 = -5$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 5$	$v_3 = 6$	$v_4 = 10$	



$$Q = \min [40; 80; 50] = 40.$$

Для пересчета выбирается клетка $x_{14} = Q$ и для нее формируется цикл пересчета.

Итак, перевозка x_{14} была равна нулю, а становится равной $x_{14} = Q = 40$. Осуществив пересчет по циклу, получим табл. 7.8.

Таблица 7.8.

Потр. / Пост.	$b_1 = 40$	$b_2 = 50$	$b_3 = 110$	$b_4 = 40$	u_i
$a_1 = 90$	2 40	5 10	3 40	1 40	$u_1 = 0$
$a_2 = 80$	3 $\bar{C}_{21} = -4 + 2 - 3 = -5$	1 40	2 40	4 $\bar{C}_{24} = -4 + 1 - 4 = -7$	$u_2 = -4$
$a_3 = 70$	4 $\bar{C}_{31} = -5 + 2 - 4 = -7$	2 $\bar{C}_{32} = -5 + 5 - 2 = -2$	1 70	5 $\bar{C}_{34} = -5 + 1 - 4 = -8$	$u_3 = -5$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 5$	$v_3 = 6$	$v_4 = 1$	

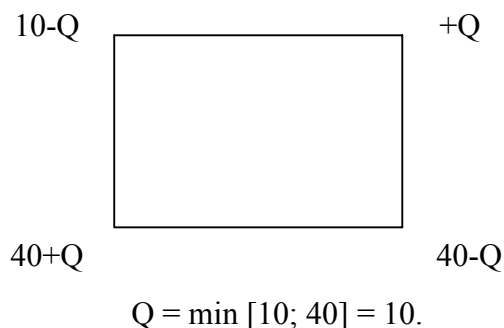
Для расчета потенциалов табл. 7.8 составляем систему уравнений:

$$u_1 + v_1 = 2, \quad u_2 + v_2 = 1,$$

$$u_1 + v_2 = 5, \quad u_2 + v_3 = 2,$$

$$u_1 + v_4 = 1, \quad u_3 + v_3 = 1.$$

Взяв $u_1 = 0$, находим $v_1 = 2$, $v_2 = 5$, $v_4 = 1$, $u_2 = -4$, $v_3 = 6$, $u_3 = -5$. Значения потенциалов и остальные расчеты фиксируем в табл. 7.8. Неблагоприятный результат получается только для клетки x_{13} , т.к. $\bar{C}_{13} = 6 - 3 > 0$. Цикл пересчета показан в таблице. Подсчитаем Q :



Клетка x_{12} будет опустошаться, а клетка x_{13} получит товар в 10 единиц. Изменит свои значения x_{22} и x_{23} . После реализации цикла пересчета получаем табл. 7.9.

Таблица 7.9.

Потр. Пост.	$b_1 = 40$	$b_2 = 50$	$b_3 = 10$	$b_4 = 40$	u_i
$a_1 = 90$	2 40	5 $\bar{C}_{12} = 0 + 2 - 5 = -3$	3 10	1 40	$u_1 = 0$
$a_2 = 80$	3 $\bar{C}_{21} = -1 + 2 - 3 = -2$	1 50	2 30	4 $\bar{C}_{24} = -1 + 1 - 4 = -4$	$u_2 = -1$
$a_3 = 70$	4 $\bar{C}_{31} = -2 + 2 - 4 = -4$	2 $\bar{C}_{32} = -2 + 2 - 2 = -2$	1 70	5 $\bar{C}_{34} = -2 + 1 - 5 = -6$	$u_3 = -2$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 2$	$v_3 = 3$	$v_4 = 1$	

Среди относительных оценок табл. 7.9 уже нет положительных, т.е. получена таблица назначения оптимальных перевозок, при которых общая стоимость перевозок будет минимальной:

$$z_{\min} = 80 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 = 330.$$

Заметим, что для таблицы 7.6 стоимость перевозок была равна 720.

Следовательно, получено существенное снижение общей цены перевозок по сравнению с первоначально намеченным планом.

§ 8. ЗАДАЧИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Среди оптимизационных плановых задач все большее значение приобретают такие, в которых необходимо экстремизировать удельные экономические показатели, т.е. например такие, как себестоимость, рентабельность и т.п. Но в таких случаях допустимые условия могут ничем не отличаться от допустимых условий обычной линейной задачи, а вот целевая функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой стоят линейные формы от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ - искомых планов выпуска интересующих нас товаров. Например, рентабельность выпуска этих товаров может быть представлена в виде следующей дробно-линейной функции:

$$r = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n}{d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n},$$

где r - рентабельность, x_j - искомый план выпуска j -го товара, c_j - прибыль от реализации единицы товара j , d_j - затраты на производство единицы товара j ($j = \overline{1, n}$).

Общую постановку задачи дробно-линейного программирования приведем в следующем виде: найти такие значения переменных $x_1, \dots, x_n$, которые бы отвечали следующим условиям:

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (8.1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (8.2)$$

и приносили нужный экстремум (максимум или минимум в зависимости от экономического смысла критерия) целевой функции

$$\varphi = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \quad (8.3)$$

Задача (8.1) – (8.3) является задачей нелинейного программирования.

Воспользовавшись некоторыми преобразованиями переменных, мы задачу (8.1) – (8.3) приведем к линейному виду, что нам позволит использовать симплексный метод для ее решения.

Если вся совокупность допустимых решений рассматриваемой задачи совместна, то (8.1) – (8.2) выделяют в n -мерном пространстве переменных $x_1, \dots, x_n$ выпуклое многогранное множество, которое мы обозначим через Ω . Числитель целевой функции (8.3) обозначим через φ_1 , знаменатель - через φ_2 . Полагаем, что в допустимой области Ω знаменатель $\varphi_2 = \sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0 \neq 0$. Сделав такое предположение, мы тем самым считаем, что в области допустимых решений Ω знаменатель целевой функции сохраняет постоянство знака. Не нарушая общности рассуждений, можно считать знаменатель положительным ($\varphi_2 > 0$), т.к. в случае отрицательности φ_2 знак минус можно отнести к числителю.

Задачу (8.1)- (8.3) мы ниже перепишем в новых переменных, которые будут обозначены через $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Для этого полагаем

$$\varphi_2 = \sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0 = \frac{1}{y_0} \quad (8.4)$$

и

$$y_j = y_0 x_j \quad (j = \overline{1, n}). \quad (8.5)$$

Тогда в новых переменных задача (8.1)-(8.3) примет вид

$$y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad y_0 \geq 0, \quad (8.6)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad (8.7)$$

$$\sum_{j=1}^n d_j y_j + d_0 y_0 = 1, \quad (8.8)$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^n c_j y_j + c_0 y_0 \rightarrow \text{extr.} \quad (8.9)$$

По отношению к новым переменным y_j задача (8.6) – (8.9) уже является задачей линейного программирования, которую можно решать с помощью симплексного метода. Приведем дополнительные пояснения к получению записей (8.6)-(8.9). Начнем с целевой функции. В исходном виде целевая функция имеет

$$\text{вид } \varphi = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0}.$$

Так как мы переобозначили знаменатель целевой функции φ_2 через $\frac{1}{y_0}$, то вправе записать

$$\varphi = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\varphi_1}{1/y_0} = \varphi_1 y_0 = \left(\sum_{j=1}^n c_j x_j + c_0 \right) y_0 = \sum_{j=1}^n c_j x_j y_0 + c_0 y_0.$$

Но в силу (8.5) $x_j y_0 = y_j$.

Поэтому для целевой функции получаем

$$\varphi = \sum_{j=1}^n c_j x_j y_0 + c_0 y_0 = \sum_{j=1}^n c_j y_j + c_0 y_0,$$

что как раз и совпадает с записью (8.9). А теперь поясним получение остальных записей (8.6)-(8.8). В исходной задаче имеем требования $y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$, поэтому, учитывая подстановку (8.5), т.е. $y_j = y_0 x_j$, и то, что $y_0 = \frac{1}{\varphi_2}$ и по допущению $\varphi_2 > 0$, можно считать справедливыми требования

$y_j = y_0 x_j = \frac{x_j}{\varphi_2} \geq 0$, т.е. $y_j \geq 0$, а это и есть условия (8.6). Для получения условий

(8.7) умножим равенства (8.2) слева и справа на величину y_0 , получим

$$\left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right] y_0 = b_i y_0$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_0 - b_i y_0 = 0.$$

Делая в силу (8.5) замену $x_j y_0 = y_j$, получаем запись (8.7), т.е. $\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0$.

И еще в условиях эквивалентной задачи мы должны учесть, что переменная y_0 подчинена равенству

$$\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0 = \frac{1}{y_0}$$

или

$$\sum_{j=1}^n d_j x_j y_0 + d_0 y_0 = 1.$$

А учитывая замену (8.5), получаем $\sum_{j=1}^n d_j y_j + d_0 y_0 = 1$, т.е. запись (8.8). Эта запись

как раз и отражает ту закономерность, которой должна отвечать величина y_0 в эквивалентной задаче.

Преобразование задачи дробно-линейного программирования к виду (8.6)-(8.9) и последующее симплексное решение проиллюстрируем на следующем примере:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \end{cases} \\ \varphi = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \max. \end{array} \right\} \quad (8.10)$$

В задаче (8.10) условия неотрицательности сохраняем, а остальные ограничения с помощью балансирующих переменных $x_3 \geq 0$ и $x_4 \geq 0$ преобразуем в уравнения. Тогда получаем

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \end{cases} \\ \varphi = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \max. \end{array} \right\} \quad (8.11)$$

Этот вид задачи уже является аналогичным виду (8.1) – (8.3). Для знаменателя целевой функции φ вводим новое обозначение $x_1 + 2x_2 + 1 = \frac{1}{y_0}$.

Если еще ввести новые переменные $y_j = y_0 x_j \quad (j = \overline{1,4})$, то согласно вышеизложенной методике для задачи (8.11) можно получить линейный аналог

$$\begin{cases} y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_0 \geq 0, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 - 2y_0 = 0, \\ 2y_1 + y_2 + y_4 - 6y_0 = 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_0 = 1, \\ \varphi = 2y_1 - y_2 \rightarrow \max. \end{cases} \quad (8.12)$$

Задача (8.12) уже является задачей линейного программирования и, если с помощью третьего уравнения исключить y_0 из первого и второго уравнений, то мы получим задачу

$$\begin{cases} y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_0 \geq 0, \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 2, \\ 8y_1 + 13y_2 + y_4 = 6, \\ y_1 + 2y_2 + y_0 = 1, \\ \varphi - 2y_1 + y_2 = 0, \quad \varphi \rightarrow \max, \end{cases} \quad (8.13)$$

в которой в качестве базисных переменных удобно использовать переменные y_3, y_4, y_0 . В записи задачи (8.13) целевая функция переписана в том же виде, что и остальные уравнения, т.е. слева размещены все переменные, а справа – свободный член. Полученную задачу (8.13) решаем с помощью симплексных таблиц:

Б	С	1	2	-	0		
Б				1			
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_0	
		1	2	3	4	0	
y_3	0	2	3	2	1		
y_4	0	6	8	1	0		
y_0	0	1	2	3	0		
$\varphi_j - c_j$	0	2	-	1	0		
y_1	2	2	1	2	1		
y_4	0	/3	0	/3	/3		
y_0	0	/3	2	0	2	-	
$\varphi_j - c_j$	4	0	7	2			
	/3		/3	/3			

В первой таблице для ведущего столбика y_1 имеем $\min\left(\frac{2}{3}, \frac{6}{8}, \frac{1}{1}\right) = \frac{2}{3}$, что соответствует 1-й строке, она станет разрешающей.

Во второй таблице уже получен оптимальный результат $Y_{\text{опт}} = \left(\frac{2}{3}; 0; 0; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $\phi_{\text{max}} = \frac{4}{3}$. Учитывая, что $y_0 = \frac{1}{3}$, получаем следующий ответ в исходных переменных: $x_1 = \frac{y_1}{y_0} = \frac{2/3}{1/3} = 2$; $x_2 = \frac{y_2}{y_0} = 0$; $x_3 = \frac{y_3}{y_0} = 0$; $x_4 = \frac{y_4}{y_0} = \frac{2/3}{1/3} = 2$.

Итак, $X_{\text{опт}} = (2, 0, 0, 2)$, $\phi_{\text{max}} = \frac{4}{3}$. Или для исходного задания задачи (8.10)

$x_1^{\text{опт}} = 2$, $x_2^{\text{опт}} = 0$ и $\phi_{\text{max}} = \frac{4}{3}$.

Примечание. В таблицах проводилось решение на максимум.

§ 9. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА ВЫПУСКА ТОВАРОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕНЫ ОТДЕЛЬНОГО ТОВАРА.

Ниже приводятся образцы решения задачи с параметром в целевой функции и задачи с параметром в правых частях условий-ограничений.

Решение примера с параметром в целевой функции:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, & x_2 &\geq 0; \\ (*) \begin{cases} x_1 + x_2 &\leq 5, \\ x_1 + x_2 &\geq 3; \end{cases} \\ z &= -tx_1 + \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}t\right)x_2 \rightarrow \min; t \in [-1, 3]. \end{aligned}$$

Вводя дополнительные балансовые переменные $x_3 \geq 0$ и $x_4 \geq 0$ неравенства (*) преобразуем в уравнения, получая тем самым канонический вид нашей задачи

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, & x_2 &\geq 0, & x_3 &\geq 0, & x_4 &\geq 0; \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 + x_2 &- x_4 = 3; \end{cases} \\ z &= -tx_1 + \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}t\right)x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

В первом уравнении переменную x_3 можно взять в качестве базисной переменной, а вот во втором уравнении из-за знака минус при x_4 эта переменная в

обычной симплексной схеме решения не может быть использована в качестве базисной переменной. Поэтому мы во второе уравнение введем искусственную базисную переменную $x_5 \geq 0$. Для решения по схеме М-метода искусственная базисная переменная войдет в целевую функцию с достаточно большим положительным коэффициентом М. Задача принимает вид:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 5, \\ x_1 + x_2 & - x_4 + x_5 = 3; \end{cases}$$

$$z = -tx_1 + \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}t\right)x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + Mx_5 \rightarrow \min.$$

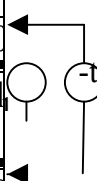
По известным уже нам правилам симплекс-метода полученную задачу отобразим в первую симплексную таблицу (таблица 9.1) и будем решать с помощью М-метода. Этот метод реализуется в два этапа. На первом этапе М-метода мы стремимся искусственные базисные переменные перевести в ранг свободных, т.е. чтобы они автоматически становились равными нулю. На втором этапе на оптимум уже решается каноническая задача (т.е. исходная без искусственных переменных). Заметим, что балансовые переменные мы не считаем искусственными, они остаются в нашем решении до конца.

В нашей таблице 9.1 имеется лишь одна искусственная переменная – это x_5 . После ее перехода в ранг свободных переменных начнется решение исходной задачи.

В столбиках A_j $(m + 2)$ -й целевой строки содержатся коэффициенты при М для относительных данциговских оценок, соответствующих переменным x_j задачи. По признакам неоптимальности в этой строке начинается первый этап минимизации целевой функции z .

Таблица 9.1.

№ п/п	Б	C_B	В	-t	- $5/2+1/2t$	0	0	М
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	5	1	1	1	0	0
2	A_5	M	3	1	1	0	-	1
m	$z_j - c_j$		0	t	$5/2 - 1/2t$	0	0	0
+1								
m			3	1	1	0	-	0
+2							1	



Имеем дело с первым базисным решением $\bar{X}_{B_1} = (0, 0, 5, 0, 3)$.

В табл 9.1 признак неоптимальности на минимум имеет место в столбиках A_1 и A_2 . Пусть столбик A_1 взят ведущим в первой симплексной операции, т.е. в базис будет вводиться вектор A_1 . Для определения вектора, выводимого из базиса

(т.е. для определения разрешающей строки) находим симплексный минимум для столбика $A_1: \min\left(\frac{5}{1}; \frac{3}{1}\right) = 3$, что соответствует 2-й строке (вектор A_5 с искусственной базисной переменной будет выводиться из базиса). 2-я строка становится разрешающей. На пересечении ведущего столбика и разрешающей строки имеем дело с разрешающим элементом. В нашей табл. 9.1 разрешающий элемент равен 1.

Для перехода к следующей таблице надо совершить процедуры по Гауссу-Жордану. Сейчас у нас будет цель - исключить переменную x_1 из всех строк, кроме 2-й (разрешающей). Для исключения x_1 из 1-й строки разрешающая строка умножается на «-1» и прибавляется к 1-й строке. Так как разрешающий элемент равен единице, то вторая строка переписывается без изменений. Для исключения x_1 из строки $m+1$ разрешающая строка умножается на «-t» и прибавляется к $(m+1)$ -й строке. И наконец, разрешающая строка умножается на «-1» и прибавляется к $(m+2)$ -й строке.

В результате этих процедур по Гауссу-Жордану мы получим таблицу 9.2.

Таблица 9.2.

№ п/п	Б	C Б	В	-t	- 5/2+t/2			0	M
				A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	3	4
1	A ₃	0	2	0	0			1	-
2	A ₁	- t	3	1	1			1	-
m +1	z _j -c _j		- 3t	0	5/2- 3/2t			t	-
m +2			0	0	0			0	-
z _j -c _j при t=-1			3	0	4			1	-
								1	-M

-5/2+3/2t

4

1

1

1

Этой таблице соответствует базисное решение $\bar{X}_{b_2} = (3, 0, 2, 0, 0)$.

И так как искусственная переменная x_5 стала равна нулю, мы от расширенной задачи возвращаемся к исходной. При этом $(m+2)$ -ю строку и столбик A_5 не будем учитывать в последующих таблицах. Однако у нас все же добавится строка значений относительных данциговских оценок при исследуемом фиксированном значении параметра t .

В таблице 9.2. взято для исследования значение левого конца отрезка допустимых значений параметра $t \in [-1, 3]$, т.е. взято $t=-1$. При этом значении параметра наблюдается признак неоптимальности по столбику A_2 , который и берется ведущим, т.е. вектор условий A_2 будет вводится в базис. Но в столбике A_2 может быть разрешающим лишь элемент «1» во 2-й строке. А это означает, что

вектор A_1 будет выводиться из базиса. Совершив процедуры по Гауссу-Жордану, получим табл. 9.3.

Таблица 9.3.

№ п/п	Б	C_B	В	-t	-	0	0
				A_1	A_2		A_4
1	A_3	0	2	0	0		1
2	A_2	-	3	1	1		-1
m +1	$z_j - c_j$		-	-	0		$5/2 - 1/2t$
	$(z_j - c_j) \text{ при } t=-1$		-9	-4	0		3

Получено базисное решение $\bar{X}_{B_3} = (0, 3, 2, 0)$, которое при $t=-1$ не является оптимальным, т.к. в столбике A_4 мы имеем неблагоприятную относительную оценку «3». Столбик A_4 будет ведущим. Разрешающим элементом будет первый элемент «1» столбика A_4 .

По методу Гаусса-Жордана переходим к таблице 9.4. Необходимые множители для реализации метода таковы: первая строка умножается на 1 и прибавляется ко второй строке; первая строка умножается на $(-5/2+t/2)$ и прибавляется к третьей строке; первая строка умножается на (-3) и прибавляется к последней строке.

Таблица 9.4.

№ п/п	Б	C_B	В	-t	-	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_4	0	2	0	0	1	1
2	A_2	-	5	1	1	1	0
m +1	$z_j - c_j$		-	-	0	-	0
	$(z_j - c_j) \text{ при } t=-1$		-15	-4	0	-3	0
$z_j - c_j \text{ при } t=5/3$		-25/3		0	0	-5/3	0

В таблице 9.4 добавлена для исследования новая дополнительная строка, что будет прокомментировано ниже. Таблице же соответствует оптимальное при $t=-1$ базисное решение $\bar{X}_{B_4}^{\text{опт при } t=-1} = (0,5,0,2)$. Сразу же возникает вопрос: при каких еще значениях $\bar{X}_{B_4}$ останется оптимальным. Это, очевидно, будет при всех t , когда относительные оценки таблицы 9.4 будут неположительные, т.е. когда будет выполняться неравенство:

$$\begin{cases} -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}t \leq 0 \text{ (столбик } A_1), \\ -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}t \leq 0 \text{ (столбик } A_3). \end{cases}$$

Из первого неравенства имеем $t \leq \frac{5}{3}$, из второго $t \leq 5$. Для удовлетворения обоих неравенств t должно быть меньше меньшего, т.е. $t \leq \frac{5}{3}$. Эта граница продиктована столбиком A_1 .

Итак, при $t \in [-1, \frac{5}{3}]$ $\bar{X}_{B_4} = (0,5,0,2)$ будет оставаться оптимальным.

Для оценки задачи при $t = \frac{5}{3}$ в табл. 9.4 добавлена строка относительных оценок при этом значении t . Видно, что по нулевой оценке в столбце A_1 мы имеем признак наличия других оптимальных решений. Столбик A_1 берется ведущим, в нем выбирается единственный возможный разрешающий элемент и делаем пересчет к табл. 9.5, в которой строка $(z_j - c_j)$ при $t=-1$ уже исключается. По Гауссу-Жордану вторая строка табл. 9.4 умножается на $(5/2 - 3/2t)$ и прибавляется к строке $(m+1)$.

Таблица 9.5

№ п/п	Б	C _Б	В	-t	- 5/2+1/2t	0	0
				A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
1	A ₄	0	2	0	0	1	1
2	A ₁	-t	5	1	1	1	0
m+1	z _j -c _j		-5t	0	5/2- 3/2t	-t	0
(z _j -c _j) при t=5/3			-25/3	0	0	-5/3	0

Получено новое оптимальное базисное решение (оптимальная угловая точка) при значении параметра $t = \frac{5}{3}$: $\bar{X}_{B_5}^{\text{опт}} = (5,0,0,2)$. Это решение остается

оптимальным и при других значениях t , что определяется из требований неположительности относительных данциговских оценок

- по столбику A_2 : $\frac{5}{2} - \frac{3}{2}t \leq 0 \Rightarrow t \geq \frac{5}{3}$,

- по столбику A_2 : $-t \leq 0 \Rightarrow t \geq 0$,

оба неравенства выполняются при $t \geq \frac{5}{3}$. Итак, точка $\bar{X}_{B_5} = (5, 0, 0, 2)$ остается

оптимальной при $t \geq \frac{5}{3}$. Т.к. у нас диапазон параметра задачи $t \in [-1; 3]$, то

$\bar{X}_{B_5}$ остается оптимальной при $t \in \left[\frac{5}{3}; 3\right]$. И еще: в таблице 9.5 при $t = \frac{5}{3}$

относительная оценка целевой функции в столбике A_2 становится равной нулю, что свидетельствует о возможных других оптимальных базисных решениях. Но если столбик A_2 взять ведущим в табл. 9.5, то мы вернемся к предыдущей таблице 9.4. Исследование окончено.

Можно привести синтезированный ответ:

1) при $t \in \left[-1; \frac{5}{3}\right]$ оптимальное базисное решение $\bar{X}_1^{\text{опт}} = \bar{X}_{B_4} = (0, 5, 0, 2)$ и

$$z = -\frac{25}{2} + \frac{5}{2}t;$$

2) при $t \in \left[\frac{5}{3}; 3\right]$ оптимальное базисное решение $\bar{X}_2^{\text{опт}} = \bar{X}_{B_5} = (5, 0, 0, 2)$ и $z = -5t$;

3) при $t = \frac{5}{3}$ оптимальный результат на отрезке $\bar{X}_1^{\text{опт}} \bar{X}_2^{\text{опт}}$, т.е. в любой точке

$$\bar{X}^{\text{опт}} = \gamma \bar{X}_1^{\text{опт}} + (1 - \gamma) \bar{X}_2^{\text{опт}} = \gamma(0, 5, 0, 2) + (1 - \gamma)(5, 0, 0, 2), \text{ где } 0 \leq \gamma \leq 1.$$

При этом на отрезке $z_{\min} = -\frac{25}{3}$.

Задачу с параметром в правой части ограничений также рассмотрим на конкретном примере:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 - 2\mu, \\ x_1 + x_2 \leq 4 + \mu; \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \mu \in (-\infty, +\infty).$$

Вводя неотрицательные балансовые переменные x_3 и x_4 , преобразуем ограничения задачи к каноническому виду:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 - 2\mu, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 + \mu; \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \mu \in (-\infty, +\infty).$$

Для решения задачи без параметра по обычной схеме симплексного метода

нам надо было бы в первое уравнение ввести неотрицательную искусственную базисную переменную. Но так как справа в уравнении имеется параметр, то достаточно само уравнение слева и справа умножить на «-1», тогда x_3 в первом уравнении предстанет с коэффициентом «+1». Переменную x_3 можно будет формально взять в качестве базисной переменной в первом уравнении.

Тогда в целом задача примет следующий канонический вид с выделенными базисными переменными x_3 и x_4 :

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}),$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 = -6 + 2\mu, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 + \mu; \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min.$$

Так как целевая функция не зависит от параметра μ , то исследование начнем с того, что с помощью симплекс-метода добьемся получения признака оптимальности, а затем с помощью двойственного симплекс-метода, сохраняя признак оптимальности, исследуется возможность наступления допустимых по неотрицательности оптимальных решений в трансформируемой в зависимости от μ области допустимых планов.

Канонизированный пример отображаем в симплексной таблице 9.6.

Таблица 9.6.

№ п/п	Б	С Б	В	2	-1	0	0
				А	А	А	А
				1	2	3	4
1	A_3	0	-	-3	-2	1	0
			$6+2\mu$				
2	A_4	0	$4+\mu$	1	1	0	1
m +1	$z_j - c_j$		0	-2	1	0	0

Таблице 9.6 соответствует базисное решение $\bar{X}_{B_1} = (0, 0, -6 + 2\mu, 4 + \mu)$.

По столбцу A_2 в строке m+1 мы наблюдаем признак неоптимальности. Пусть столбик A_2 будет ведущим. В этом столбике лишь во второй строке стоит элемент, который может быть разрешающим. Итак, вектор A_2 вводится в базис, а вектор A_4 выводится из базиса. Совершая процедуры по Гауссу-Жордану с помощью выделенной разрешающей строки, получаем таблицу 9.7.

Таблица 9.7.

№ п/п	Б	С _Б	В	2	-1	0	0
				A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
1	A ₃	0	2+4μ	-1	0	1	2
2	A ₂	-1	4+μ	1	1	0	1
m +1	z _j -c _j		-4-μ	-3	0	0	-1

Во второй симплексной таблице нашего примера получен признак оптимальности. $\bar{X}_{B_2} = (0, 4 + \mu, 2 + 4\mu, 0)$ - этот оптимальный результат будет допустимым при неотрицательности всех его компонент, т.е. при таких μ ,

которые удовлетворяют неравенствам $2 + 4\mu \geq 0 \Rightarrow \mu \geq -\frac{1}{2}$;
 $4 + \mu \geq 0 \Rightarrow \mu \geq -4$.

Оба неравенства выполняются при $\mu \geq -\frac{1}{2}$. Граница продиктована первой строкой таблицы 9.7, которая и станет разрешающей в рамках двойственного симплекс-метода. Так как в этой строке лишь один отрицательный элемент «-1» (стоит в столбике A₁), то он становится разрешающим. С помощью 1-й разрешающей строки табл 9.7 производится пересчет к табл 9.8.

Таблица 9.8.

№ п/п	Б	С _Б	В	2	-1	0	0
				A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
1	A ₁	2	-2-4μ	1	0	-1	-2
2	A ₂	-1	6+5μ	0	1	1	3
m +1	z _j -c _j		-10-13μ	0	0	-3	-7

В таблице 9.8 признак оптимальности сохраняется для полученного базисного решения $\bar{X}_{B_3} = (-2 - 4\mu, 6 + 5\mu, 0, 0)$. Результат этот будет оптимальным и допустимым при μ , подчиняющимся неравенствам:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 - 4\mu \geq 0 \Rightarrow \mu \leq -\frac{1}{2} \\ 6 + 5\mu \geq 0 \Rightarrow \mu \geq -\frac{6}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{6}{5} \leq \mu \leq -\frac{1}{2}.$$

При таких μ $\bar{X}_{B_3}$ будет допустимым и оптимальным.

Выше мы уже получили, что при $\mu \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ оптимальным и допустимым будет базисное решение $\bar{X}_{B_2}$. Остается доисследовать возможности оптимальных результатов при $\mu < -\frac{6}{5}$. Граница $\mu = -\frac{6}{5}$ продиктована второй строкой табл. 9.8. Но в этой строке нет ни одного отрицательного элемента, который мог бы стать разрешающим в схеме двойственного симплекс-метода. Следовательно, при $\mu < -\frac{6}{5}$ мы не можем получить допустимых решений.

Подытожим полученные результаты по примеру с параметром в правых частях ограничений.

При $\mu < -\frac{6}{5}$ допустимых решений не существует.

При $-\frac{6}{5} \leq \mu \leq -\frac{1}{2}$ имеем оптимальное решение $\bar{X}_{B_3} = (-2 - 4\mu, 6 + 5\mu, 0, 0)$ и при этом $z = -10 - 13\mu$.

При $\mu \geq -\frac{1}{2}$ имеем оптимальное решение $\bar{X}_{B_2} = (0, 4 + \mu, 2 + 4\mu, 0)$ и при этом $z = -4 - \mu$.

Разумеется, что при $\mu = -\frac{1}{2}$ $\bar{X}_{B_3}$ и $\bar{X}_{B_2}$ совпадают и равны $(0, 7/2, 0, 0)$ и соответственно $z_{\min}(\mu = -\frac{1}{2}) = -7/2$.

С помощью приемов параметрического программирования можно, в частности, производить анализ устойчивости оптимального плана задачи при условиях возможного изменения цены единицы каждого из изделий.

Такой параметрический подход особенно уместен при вырожденности задачи, т.е. когда по оптимальному плану рекомендуется выпуск не всего возможного ассортимента продукции.

Этот анализ мы проведем на следующем конкретном примере:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 36, \\ x_1 + x_2 \leq 16, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 42; \end{cases}$$

$$z = 9x_1 + 6x_2 \rightarrow \max.$$

Сначала приводим задачу к каноническому виду:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 36, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 42; \end{cases}$$

$$z = 9x_1 + 6x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max.$$

Затем с помощью симплекс-метода определяем оптимальное решение и исследуем устойчивость этого решения в зависимости от отдельно изменяемой цены 1-го (x_1) или 2-го (x_2) товара. Причем исследование будем делать с помощью варьiruемого параметра для каждой из цен.

Таблица 9.9. Симплексное решение:

№ п/п	Б	С _Б	В	9	6	0	0	0
				A	A	A	A	A
				1	2	3	4	5
1	A	0	3	1	3	1	0	0
	3		6					
2	A	0	1	1	1	0	1	0
	4		6					
3	A	0	4	3	2	0	0	1
	5		2					
m +1	z _j -c _j		0	-	-6	0	0	0
				9				

В таблице 9.9 зафиксирован канонический вид задачи. Этой таблице соответствует базисное решение

$$\bar{X}_{B_1} = (0, 0, 36, 16, 42).$$

Пусть A_1 - ведущий столбик в табл. 9.9.

Определяем симплексный минимум $\min\left(\frac{36}{1}; \frac{16}{1}; \frac{42}{3}\right) = 14$, что соответствует 3-й строке. Она будет разрешающей.

С помощью процедур по Гауссу-Жордану переходим к таблице 9.10.

Таблица 9.10.

№ п/п	Б	С _Б	В	9	6	0	0	0
				A	A	A	A	A
				1	2	3	4	5
1	A	0	2	0	7/3	1	0	-
	3		2					1/3
2	A	0	2	0	1/3	0	1	-
	4							1/3
3	A	9	1	1	2/3	0	0	1
	1		4					/3
m +1	z _j -c _j		1	0	0	0	0	3
			26					

Мы видим по строке (m + 1) новой таблицы, что получен оптимальный результат $\bar{X}_{B_2}^{\text{опт}} = (14, 0, 22, 2, 0)$ и $z_{\max} = 126$.

Согласно этому результату надо выпускать 1-й товар в количестве $x_1 = 14$, а второй товар не выпускать, т.к. $x_2 = 0$.

В силу того, что $x_3 = 22$, $x_4 = 2$ и $x_5 = 0$, при реализации оптимального плана $\bar{X}^0 = (x_1^0 = 14; x_2^0 = 0)$ у нас останутся не реализованными 22 единицы первого ресурса и 2 единицы 2-го ресурса. Третий ресурс будет использован полностью ($x_5 = 0$).

Просматривая еще $(m + 1)$ -ю строку оптимальной таблице 9.10 видим, что по столбику внебазисной переменной A_2 данциговская относительная оценка равна «0». Это означает, что имеются и другие оптимальные решения. Но мы займемся исследованием на устойчивость лишь полученного решения $x^0 = (14; 0)$.

Именно нами будет исследоваться устойчивость от возможной вариации цен.

Сначала исследование проведем по цене 1-го товара, т.е. пусть для цены этого товара введен варьирующий параметр t_1 (т.е. $t_1 = \Delta c_1$) и цена предстает в записи $c_1 + t_1 = 9 + t_1$.

Это варьирование учтем в уже полученной оптимальной таблице 9.10.

Таблица 9.11 в строках 1, 2, 3 столбиков от В и A_1 , до A_5 копирует все, что получено в таблице 9.10, а вот в обрамлении таблицы цена 1-го товара предстает в виде $(9 + t_1)$ и в целевой строке сделан новый расчет относительных оценок.

Таблица 9.11

№ п/п	В	С Б	В	9 + t_1	6	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	22	0	$7/3$	1	0	- $1/3$
2	A_4	0	2	0	$1/3$	0	1	- $1/3$
3	A_1	9 + t_1	14	1	$2/3$	0	0	$1/3$
m +1	$z_j - c_j$		126 + $14t_1$	0	$2/3 t_1$	0	0	$3 + 1/3 t_1$

В целевой строке табл. 9.11 получено:

- для столбика

$$B \rightarrow z_B = (C_B, B) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 + t_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} \right) = 126 + 14t_1;$$

- для столбика

$$\begin{aligned} A_2 \rightarrow z_2 - c_2 &= (C_B, A_2) - c_2 = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 + t_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right) - 6 = \frac{2}{3}(9 + t_1) - 6 = \frac{2}{3}t_1; \end{aligned}$$

- для столбика

$$A_5 \rightarrow z_5 - c_5 = (C_B, A_5) - c_5 =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 + t_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right) - 0 = 3 + \frac{1}{3} t_1.$$

Чтобы найденное решение $\bar{X}_{B_2}^{\text{опт}}$ оставалось оптимальным, надо, чтобы относительные данциговские оценки во внебазисных столбиках A_2 и A_5 оставались неотрицательными, т.е. чтобы параметр t_1 удовлетворял неравенствам

$$\begin{cases} \frac{2}{3} t_1 \geq 0 \Rightarrow t_1 \geq 0, \\ 3 + \frac{1}{3} t_1 \geq 0 \Rightarrow t_1 \geq -9. \end{cases}$$

В итоге должно быть $t_1 \geq 0$.

Т.к. 1-я цена равна $9 + t_1$, то диапазон устойчивости по 1-й цене :

$$9 \leq c_1 < \infty.$$

Аналогичное в анализе продельвается и для второй цены. Копируется таблица 9.10, но с новым обрамлением для цены 2-го товара. Именно эта цена считается равной

$$c_2 + t_2 = 6 + t_2.$$

Делается также новый расчет элементов $(m + 1)$ -й строки. Получаем таблицу 9.12.

Таблица 9.12

№ п/п	Б	С	В	9	6 + t_2	0	0	0
				A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
1	3	0	22	0	7 /3	1	0	- 1/3
2	4	0	2	0	1 /3	0	1	- 1/3
3	1	9	14	1	2 /3	0	0	1/3
m +1	$z_j - c_j$		126	0	- t_2	0	0	3

Элементы целевой строки (относительные данциговские оценки) для табл. 9.12 равны:

Для столбика

$$A_2 \rightarrow z_2 - c_2 = (C_B, A_2) - c_2 =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right) - (6 + t_2) = 6 - 6 - t_2 = -t_2;$$

Для столбика

$$\begin{aligned} A_5 \rightarrow z_5 - c_5 &= (C_B, A_5) - c_5 = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right) - 0 = 3. \end{aligned}$$

Видно, что зависимость от t_2 имеет место лишь по столбику A_2 .

Для сохранения признака оптимальности должно быть соблюдено неравенство $(-t_2) \geq 0$ или $t_2 \leq 0$. А т.к. цена 2-го товара равна $6 + t_2$, то c_2 ограничено сверху первоначально заданной ценой $c_2 = 6$.

Итак, диапазон устойчивости равен $-\infty < c_2 \leq 6$. В силу того, что цена не может быть отрицательной, имеем реальный диапазон устойчивости:

$$0 \leq c_2 \leq 6.$$

Вывод. Оптимальный план выпуска товаров $x^0 = (14, 0)$ остается оптимальным, если фиксирована цена $c_2 = 6$ и $9 \leq c_1 < +\infty$, или если фиксирована цена $c_1 = 9$ и $0 \leq c_2 \leq 6$.

§ 10. ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Среди экономических задач оптимального планирования особое место занимают задачи, в которых все (или частично) планируемые товары могут выражаться лишь в целых числах. Конечно, если речь идет о массовом или серийном производстве, то признак целочисленности по ходу оптимизационного решения может быть игнорирован за счет округления компонент найденного оптимального решения. Но во многих случаях, особенно при планировании в уникальных ситуациях, округление либо не приносит оптимального результата, либо приводит даже к такому ответу, который не удовлетворяет условиям задачи.

Плановую целочисленную задачу линейного программирования можно поставить следующим образом: найти такие значения переменных x_j ($j = \overline{1, n}$), которые удовлетворяют следующим условиям :

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}); \quad (10.1)$$

$$x_j - \text{целые}, j = \overline{1, K}, K \leq n; \quad (10.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq a_{i0}, \quad i = \overline{1, m} \quad (10.3)$$

и приносят требуемый экстремум целевой функции

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j. \quad (10.4)$$

Если в условии (10.2) $K = n$, то мы имеем дело с полностью целочисленной задачей, если же $K < n$, то задача (10.1) - (10.4) является частично целочисленной.

В зависимости от содержания задачи целевая функция (10.4) или максимизируется, или минимизируется. Модель поставленной задачи отличается от модели задачи линейного программирования только наличием дополнительного условия (10.2).

Для решения целочисленных задач используются две группы методов: методы отсечения и комбинаторные методы. Мы рассмотрим методы отсечения. Суть этих методов состоит в том, что, например с помощью симплекс метода решается заданная задача. Если при этом мы получаем вектор-решение с целыми координатами, то решение задачи окончено. Если же необходимой целочисленности нет, то нам по тому или иному алгоритму надо будет строить отсечение, согласно которому отсекался бы полученный нецелочисленный результат, но в области оставались бы все допустимые точки с целыми координатами. Технически это делается по-разному.

Рассмотрим алгоритм решения полностью целочисленной задачи.

- Умножением каждого из неравенств (10.3) на необходимое число добиваемся, чтобы в системе (10.3) все коэффициенты и свободные члены стали целыми числами.

- Приведя рассматриваемую задачу к каноническому виду, осуществляем симплексное решение задачи. Если оптимальное решение будет иметь все целые координаты, то решение задачи окончено. Если же некоторые координаты (хотя

бы одна) дробные, то строится отсечение. При построении отсечения используется понятие дробной части числа.

Если для числа b обозначить наибольшее целое число, не превосходящее b , через $[b]$, то дробной частью числа b называется разность $b - [b]$, которую мы обозначим через β . Например, пусть $b = -3,7$, тогда $[b] = -4$ и $\beta = -3,7 - (-4) = 0,3$; пусть $b = -0,3$, тогда $[b] = -1$ и $\beta = -0,3 + 1 = 0,7$; $b = 2,3$, тогда $[b] = 2$ и $\beta = 2,3 - 2 = 0,3$. Усвоив понятие дробной части числа, можно осваивать дальнейшие пункты алгоритма.

- Итак, пусть среди координат оптимального решения имеются дробные. Выберем ту из них, дробная часть которой самая большая. Пусть это будет координата $x_s = b_s$, соответствующая S -й строке таблицы, в которой получен оптимальный, но не целочисленный результат. В силу коэффициентов этой строки и будет построено отсечение. Для строки с b_s справедлива следующая общая запись:

$$\sum_K b_{SK} x_K = b_s. \quad (10.5)$$

Для всех чисел b_{SK} и b_s определяем их дробные части β_{SK} и β_s . Тогда отсечение примет вид следующего неравенства:

$$-\sum_K b_{SK} x_K \leq -\beta_s \quad (10.6)$$

или с введением дополнительной балансирующей переменной запишется в виде уравнения

$$-\sum_K \beta_{SK} x_K + \xi_1 = -\beta_s, \quad (10.7)$$

которое как раз и будет добавляться в последнюю таблицу для продолжения решения. Переменная ξ_1 уже будет $(n + 1)$ -й переменной нашей задачи. Эта переменная будет взята в качестве базисной и для нее будет введен дополнительный столбик. Введение указанной строки как раз делает недопустимым полученный результат в расширенном пространстве переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1)$. Ведь в этом решении, если считать все свободные переменные равными нулю, имеем $\xi_1 = -\beta_s < 0$, но ξ_1 введена с условием своей неотрицательности.

- По отношению к новой таблице с дополнительно введенной строкой применяются симплексные процедуры. Причем введенную строку выбирают в качестве разрешающей, а разрешающий элемент - по принципу двойственного симплекс-метода.

- Если в очередной таблице опять некоторые компоненты ответа будут дробными, то будет введено дополнительное отсечение с новой дополнительной переменной ξ_2 . И так далее до получения на некоторой итерации ответа с полностью целочисленными координатами.

В заключение рассмотрим хотя бы один пример решения полностью целочисленной задачи. Пусть x_1 и x_2 - искомые переменные, на которые накладывается требование целочисленности. Пусть x_1 и x_2 должны отвечать следующим ограничениям:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

и приносить минимум целевой функции

$$Z = -x_1 - x_2.$$

Так как в неравенствах коэффициенты и свободные числа суть целые числа, то мы сразу же приводим нашу задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_2 + x_4 = 2, \\ Z = -x_1 - x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

Здесь переменные x_3, x_4 - балансирующие и их тоже можно считать целочисленными. Отобразим нашу задачу в табл. 10.1.

Таблица 10.1.

Б	C _Б	В	-1	-1	0	0
			A ₁	A ₂		
A ₃	0	5	3	2	1	0
A ₄	0	2	0	1	0	1
z _j - c _j		0	1	1	0	0

Этой таблице соответствует базисное решение (0, 0, 5, 2), которое отвечает требованиям целочисленности, но не является оптимальным. Наметив разрешающий элемент, делаем пересчет к новой табл. 10.2.

Таблица 10.2

Б	C _Б	В	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
A ₃	0	1	3	0	1	-2
A ₂	-1	2	0	1	0	1
z _j - c _j		-2	1	0	0	-1

Табл. 10.2 соответствует то же целочисленное решение (0, 2, 1, 0), но оно опять-таки не является оптимальным. Наметив разрешающий элемент, делаем пересчет к табл. 10.3.

Таблица 10.3

Б	С _Б	В	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
A ₁	-1	1/3	1	0	1/3	-2/3
A ₂	-1	2	0	1	0	1
z _i - c _j		-7/3	0	0	-1/3	-1/3

Итак, в табл. 10.3 получен оптимальный результат $x = (1/3, 2, 0, 0)$. К сожалению, первая компонента этого ответа не отвечает требованию целочисленности. Поэтому нам придется вводить отсечение. Для базисной переменной x_1 в первой строке табл. 10.3 мы имеем следующее уравнение:

$$x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 = \frac{1}{3}.$$

По отношению к этому уравнению, т.е. по отношению к первой строке табл. 10.3, мы будем вводить отсечение. Дробная часть коэффициента при x_1 равна 0, при x_2 - тоже равна 0, при x_3 дробная часть равна 1/3, при x_4 дробная часть равна 1/3.

Дробная часть свободного члена первой строки равна 1/3. Учитывая это, в силу (10.7) получаем дополнительное уравнение

$$-0 \cdot x_1 - 0 \cdot x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \xi_1 = -\frac{1}{3},$$

введение которого в табл. 10.3 приводит к табл. 10.4.

Таблица 10.4

Б	С _Б	В	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A _{ξ1}
A ₁	-1	1/3	1	0	1/3	-2/3	0
A ₂	-1	2	0	1	0	1	0
A _{ξ1}	0	-1/3	0	0	-1/3	-1/3	1
z _i - c _j		-7/3	0	0	-1/3	-1/3	0

В расширенном пространстве переменных $x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1$ в соответствии с табл.

10.4 мы имеем дело с решением $(1/3, 2, 0, 0, -1/3)$, которому соответствует признак оптимальности, но которое не является допустимым из-за отрицательности пятой компоненты. Строка A_{ξ_1} выбирается в качестве разрешающей. В этой строке согласно принципам двойственного симплекс-метода можно в качестве разрешающего элемента взять либо $(-1/3)$ в столбце A_3 или $(-1/3)$ в столбце A_4 . Пусть в качестве разрешающего элемента в табл. 10.4 взят элемент $(-1/3)$ в столбце A_3 . Симплексный пересчет приводит нас к табл. 10.5.

Таблица 10.5

Б	C _Б	В	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A _{ξ1}
A ₁	-1	0	1	0	0	-1	1
A ₂	-1	2	0	1	0	1	0
A ₃	0	1	0	0	1	1	-3
z _j - c _j		-2	0	0	0	0	0

Этой таблице уже соответствует оптимальный целочисленный ответ $\bar{X}_{\text{цч}}^{\text{опт}} = (0, 2, 1, 0)$. При этом $z_{\min} = -2$. Кстати, если бы мы в качестве разрешающего элемента в табл. 10.4 взяли элемент $(-1/3)$ из столбца A_4 , то пришли бы также к оптимальному решению $(1, 1, 0, 0)$.

§ 11. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР

Пусть рассматривается матричная игра

$$A = \left\{ \begin{array}{c} a_{11} a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{i1} a_{i2} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mj} \dots a_{mn} \end{array} \right\}, \quad (11.1)$$

в которой так называемый строчный игрок имеет m различных стратегий (m строк), а столбцевой - n стратегий (n столбцов), причем каждое число a_{ij} ($i=1, m; j=1, n$) - это платеж строчному игроку, если строчный выбрал i -ю стратегию, а столбцевой j -ю стратегию. Ясно, что если строчный игрок выбрал i -ю строку (стратегию), столбцевой j -й столбец (стратегию) и при этом $a_{ij}=0$, то это ничейный результат, т.е. ни один из игроков не получает какого-либо выигрыша. Если a_{ij} положительное число, то в выигрыше строчный игрок. Если же a_{ij} - отрицательное число, то в выигрыше столбцевой игрок и он получает выигрыш $[-a_{ij}]$.

Решение игры состоит в поиске оптимальных стратегий для каждого из

игроков. Поскольку элементы матрицы A - это платежи строчному игроку, то строчный игрок является максимизирующим в выборе своей строки, а столбцевой – минимизирующим в выборе столбца. Но это не значит, например, что строчный игрок ориентируется на i -ю строку (стратегию), в которой находится самый большой элемент матрицы a_{is} . Ведь предполагается, что противник (т.е. в данном случае столбцевой игрок) столь же разумен и выбирает в качестве своей стратегии не s -й столбик, а другой какой-либо p -й столбик и элемент a_{tp} будет даже проигрышным для строчного игрока. Учитывая сказанное, строчный игрок сначала в каждой строке находит минимальный элемент, а потом выбирает ту строку для реализации, в которой находится самый большой элемент из минимальных. Величина этого элемента будет гарантированным выигрышем для строчного игрока. Итак, строчный игрок для каждой i -й строки определяет

$$\min_{j \in \overline{1, n}} a_{ij} = \alpha_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

а затем находит максимальный элемент из α_i ($i = \overline{1, m}$). Пусть этим элементом оказался элемент из k -й строки, т.е.

$$\max_{i \in \overline{1, m}} \alpha_i = \alpha_k = \alpha.$$

Тогда строчному игроку ясно, что если он будет ориентироваться на выбор k -й строки, то ему обеспечен выигрыш не менее $\alpha = \alpha_k$. Кстати, эту величину α в теории матричных игр называют нижней ценой игры, заданной матрицей A . В силу сказанного для нижней цены α справедлива следующая синтезирующая запись:

$$\max_{i \in \overline{1, m}} \min_{j \in \overline{1, n}} a_{ij} = \alpha.$$

Столбцевой игрок (т.е. игрок, имеющий право выбирать столбцы) поступает столь же разумно. Понимая, что элементы a_{ij} матрицы A суть платежи строчному игроку, столбцевой игрок в каждом своем столбике j находит максимальный элемент β_j :

$$\max_{i \in \overline{1, m}} a_{ij} = \beta_j \quad (j = \overline{1, n}),$$

а затем выбирает тот столбик, которому соответствует наименьшее из чисел β_j ($j \in \overline{1, n}$). Пусть таким столбиком оказался l -й, т.е.

$$\min_{j \in \overline{1, n}} \beta_j = \beta_l = \beta.$$

Таковыми своими действиями столбцевой игрок не позволит получить строчному выигрыш, превышающий $\beta_l = \beta$. Величину β называют верхней ценой игры, причем можно записать

$$\min_{j \in \overline{1, n}} \max_{i \in \overline{1, m}} a_{ij} = \beta.$$

В теории игр строго доказано, что всегда имеет место соотношение

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij},$$

то есть $\alpha \leq \beta$.

Особый класс составляют те игры, для которых величины максимина и минимакса совпадают, т.е. когда $\alpha = \beta$. Говорят, что в таких случаях игра имеет седловую точку. Если $\alpha = \alpha_k$ и $\beta = \beta_l$, то в качестве седловой точки выступает элемент a_{kl} платежной матрицы A . Или говорят, что a_{kl} - седловой элемент. В

матричной игре седловых точек (элементов) может быть более одной (одного). Рассмотрим матричную игру

$$A = \begin{Bmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & -5 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 7 & -3 & 5 & -1 & 6 \end{Bmatrix}.$$

В этой игре строчный игрок имеет 4 стратегии (строки), столбцовой – 5 стратегий (столбцов). Строчный игрок определяет свои минимально возможные выигрыши при выборе каждой из строк:

$$\min_{j \in (1,5)} a_{1j} = -5 = a_{15} = \alpha_1,$$

$$\min_{j \in (1,5)} a_{2j} = -6 = a_{24} = \alpha_2,$$

$$\min_{j \in (1,5)} a_{3j} = 3 = a_{32} = \alpha_3,$$

$$\min_{j \in (1,5)} a_{4j} = -3 = a_{42} = \alpha_4.$$

Соответственно находим

$$\max_{i \in (1,4)} \min_{j \in (1,5)} a_{ij} = \max_{i \in (1,4)} \alpha_i = \max[-5, -6, 3, -3] = 3 = \alpha_3.$$

Итак, нижняя цена игры

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 3 = \alpha_3 = a_{32}.$$

Столбцовой игрок определяет свои максимальные проигрыши в столбцах:

$$\max_{i \in (1,4)} a_{i1} = 7 = a_{41} = \beta_1,$$

$$\max_{i \in (1,4)} a_{i2} = 3 = a_{32} = \beta_2,$$

$$\max_{i \in (1,4)} a_{i3} = 5 = a_{43} = \beta_3,$$

$$\max_{i \in (1,4)} a_{i4} = 6 = a_{34} = \beta_4,$$

$$\max_{i \in (1,4)} a_{i5} = 6 = a_{45} = \beta_5,$$

а затем ориентируется на такой столбик (стратегию), чтобы строчный выиграл как можно меньше. Для этого находится

$$\min_{j \in (1,5)} \max_{i \in (1,4)} a_{ij} = \min_{j \in (1,5)} \beta_j = \min[7, 3, 5, 6, 6] = 3 = \beta_2.$$

Итак, верхняя цена игры

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 3 = \beta_2 = a_{32}.$$

Для рассматриваемой игры мы можем констатировать совпадение максимина и минимакса, т.е. $\alpha = \beta = \alpha_3 = \beta_2 = a_{32}$. По определению элемент a_{32} будет называться седловым. В нашей игре мы имеем одну седловую точку. В общем случае игра может не иметь седловых точек или иметь более одной седловой точки.

Если игра имеет седловую точку, например a_{kl} , то решение игры состоит в выборе так называемых чистых стратегий: строчному игроку следует выбирать k -ю строку (стратегию), а столбцовому l -й столбец (стратегию). В противном случае строчный игрок всегда может поступить так, что он получит более высокий выигрыш или по крайней мере не меньший чем a_{kl} , а столбцовой игрок может

поступить так, что он проиграет меньше или по крайней мере не больше чем a_{kl} .

Следовательно, если игра имеет седловые точки, то все ее решение сводится к поиску этих точек. Выбор строчки и столбика, отвечающих любому из седловых платежных элементов, как раз и будет оптимальным решением. Если седловая точка одна, то игра имеет единственное оптимальное решение, выражаемое чистыми стратегиями игроков. Если же мы имеем s седловых точек, то соответственно имеем s оптимальных решений (т.е. s пар выборов строки и столбца).

Рассмотрим игру без седловых точек. В этом случае верхняя и нижняя цены игры не совпадают, т.е. $\alpha < \beta$. Такая игра становится уже интересной в азартно-состязательном смысле, т.е. такую игру интересно проводить в серии партий. (Отдельная партия состоит в том, что строчный называет некоторую стратегию v , а столбцовой - μ -ю стратегию и соответственно строчному идет платеж $a_{v\mu}$). При проведении серии партий возникает вопрос о том, насколько часто следует пользоваться игрокам своими стратегиями. Обозначим через p_i - вероятность выбора i -й строки строчным игроком и q_j - вероятность выбора j -го столбца столбцовым игроком. Задача состоит в определении таких значений p_i ($i \in \overline{1, m}$) для строчного игрока и таких q_j ($j \in \overline{1, n}$) для столбцового игрока, чтобы строчному игроку в среднем за одну партию получить выигрыш более α , а столбцовому игроку проигрывать менее β . Этот проигрыш-выигрыш назовем ценой игры и обозначим через v , причем $\alpha < v < \beta$. С помощью введенных вероятностей выбора стратегий матричную игру можно свести к паре двойственных задач линейного программирования.

Итак, рассматриваем платежную матрицу (11.1) размерности $m \times n$ без седловой точки. Будем считать все элементы этой матрицы неотрицательными. Если это условие не выполняется, то ко всем элементам матрицы прибавляем одно и то же достаточно большое число k , переводящее платежи в область неотрицательных значений. При этом сущность решения задачи не изменится и лишь цена игры увеличится на величину k . Итак, можно считать, что цена игры $v > 0$.

Наборы вероятностей выбора каждой стратегии для строчного и столбцового игроков будем называть смешанными стратегиями этих игроков: $p^0 = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ - для строчного и $q^0 = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ - для столбцового игрока. При этом для дальнейшего следует не забывать, что $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$ и $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$.

Применение строчным игроком оптимальной смешанной стратегии гарантирует ему выигрыш не меньше цены игры v , причем это вне зависимости от стратегий столбцового игрока. Пусть, например, столбцовой игрок в серии партий все время применяет j -ю чистую стратегию (выбирает j -й столбик матрицы A), а строчный игрок применяет оптимальную смешанную стратегию $p^0 = (p_1, p_2, \dots, p_m)$. Тогда средний выигрыш строчного игрока будет $v_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \dots + a_{ij}p_i + \dots + a_{mj}p_m$ при любом $j \in \overline{1, n}$. Так как в рассматриваемой ситуации имеются в виду оптимальность поведения строчного игрока и неоптимальность повтора чистой j -й стратегии в сериях партий, то $v_j \geq v$ ($j \in \overline{1, n}$), где v - цена игры, соответствующая оптимальному поведению игроков. Сказанное позволяет нам

зафиксировать следующие неравенства:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{i1}p_i + \dots + a_{m1}p_m \geq v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{i2}p_i + \dots + a_{m2}p_m \geq v, \\ \dots \\ a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \dots + a_{ij}p_i + \dots + a_{mj}p_m \geq v, \\ \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{in}p_i + \dots + a_{mn}p_m \geq v. \end{cases} \quad (11.2)$$

Разделив левые и правые части этих неравенств на $v > 0$ и введя обозначения

$\frac{p_i}{v} = x_i$ ($i = \overline{1, m}$), из (11.2) получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{i1}x_i + \dots + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{i2}x_i + \dots + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \dots \\ a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{ij}x_i + \dots + a_{mj}x_m \geq 1, \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{in}x_i + \dots + a_{mn}x_m \geq 1, \end{cases} \quad (11.3)$$

где $x_i \geq 0$, так как

$$p_i \geq 0 \text{ и } v > 0. \quad (11.4)$$

Учитывая, что $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$ и имея в виду введенные обозначения $x_i = \frac{p_i}{v}$, можно считать, что переменные x_i подчиняются условию

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{p_1}{v} + \frac{p_2}{v} + \dots + \frac{p_m}{v} = \frac{1}{v} \underbrace{(p_1 + p_2 + \dots + p_m)}_{=1} = \frac{1}{v}.$$

А так как строчный игрок максимизирует цену игры, то $\frac{1}{v}$ минимизируется и получается естественная целевая функция в линейной форме

$$f = x_1 + x_2 + \dots + x_m \rightarrow \min \quad (11.5)$$

Записи (11.3), (11.4), (11.5) составляют некоторую задачу линейного программирования: найти такие значения $x_1, \dots, x_m$, которые отвечают условиям

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq 1 \end{cases}$$

и приносят минимум целевой функции

$$f = x_1 + x_2 + \dots + x_m.$$

Теперь полагаем, что в сериях партий столбцовой игрок поступает оптимальным образом, т.е. ориентируется на применение оптимальной смешанной стратегии $q^0 = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, а строчный игрок неоптимальным образом использует чистые стратегии. Тогда по аналогии с (11.2) получаем

[illegible]

Разделив обе части этих неравенств на $v > 0$ и введя обозначения $\frac{q_j}{v} = y_j (j = \overline{1, n})$, получим

[illegible]

где все $y_i \geq 0$ ($j=\overline{1,n}$), так как $q_j \geq 0$ и $v > 0$. Как и в рассуждениях для строчного игрока, имеем $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$. Тогда, учитывая обозначения $\frac{q_j}{v} = y_j$, получим

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{q_1}{v} + \frac{q_2}{v} + \dots + \frac{q_n}{v} = \frac{1}{v}(q_1 + q_2 + \dots + q_n) = \frac{1}{v}.$$

Но столбцевой игрок заинтересован в минимизации цены игры v , поэтому в интересах столбцевого игрока мы получаем целевую линейную форму

$$\varphi = y_1 + y_2 + \dots + y_n \rightarrow \max.$$

Здесь получается задача линейного программирования: определить такие значения y_j ($j=1, n$), которые бы удовлетворяли условиям

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_n \geq 0,$$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{y}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{y}_2 + ... + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{y}_n \leq 1, \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{y}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{y}_2 + ... + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{y}_n \leq 1, \\ \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{y}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{y}_2 + ... + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{y}_n \leq 1 \end{cases}$$

и приносили бы максимум целевой функции

$$\Phi = y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

Видно, что задачи линейного программирования, полученные для строчного

и столбцового игроков, составляют пару двойственных задач. В силу выводов теории двойственности для любой игровой задачи получим

$$f_{\min} = \varphi_{\max} = v.$$

По отношению к полученной паре двойственных задач может быть применен симплексный метод решения. Покажем это на примере.

Пусть задана следующая матричная игра:

$$A = \begin{Bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{Bmatrix}.$$

Для исследования на наличие седловой точки в рассматриваемой игре определяем максимин и минимакс:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{Bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\min} a_{11} = -2 \\ \phantom{\begin{Bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{Bmatrix}} \rightarrow a_{22} = -2 \\ \phantom{\begin{Bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{Bmatrix}} \rightarrow a_{33} = -4 \end{array} \right\} \max \min a_{ij} = -2 = \begin{cases} a_{11}, \\ a_{22}. \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \max \\ a_{11} = 3 \quad a_{32} = 1 \quad a_{13} = 5 \end{matrix}}_{\min \max a_{ij} = 1 = a_{32}}$$

Так как $\max \min a_{ij} < \min \max a_{ij}$, игра не имеет седловых точек и представляет интерес для определения смешанных стратегий. Нижняя цена игры $\alpha = -2$, верхняя цена $\beta = 1$.

Так как матрица A заданной игры имеет отрицательные элементы, то переходим к эквивалентной игре

$$A^{\circ} = A + K = \begin{Bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{Bmatrix},$$

где число k определяется по правилу

$$k = \max_{\substack{i,j \\ a_{ij} < 0}} |a_{ij}| = 4 = |a_{33}|.$$

Итак, получаем

$$A^{\circ} = \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 5 & 2 & 7 \\ 7 & 5 & 0 \end{Bmatrix}.$$

С помощью вычисления максимина и минимакса определяем цену эквивалентной игры $v^{\circ} \in [2, 5]$.

В силу выше приведенных рассуждений составляем линейную модель игровой задачи в переменных, учитывающих интересы столбцового игрока:

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 9y_3 \leq 1, \\ 5y_1 + 2y_2 + 7y_3 \leq 1, \\ 7y_1 + 5y_2 \leq 1, \end{cases}$$

$$\Phi = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max.$$

Введением неотрицательных балансирующих переменных y_4, y_5, y_6 приводим задачу к каноническому виду:

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0; \quad (11.6)$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 9y_3 + y_4 = 1, \\ 5y_1 + 2y_2 + 7y_3 + y_5 = 1, \\ 7y_1 + 5y_2 + y_6 = 1, \end{cases} \quad (11.7)$$

$$\Phi - y_1 - y_2 - y_3 = 0, \quad (11.8)$$

где $\Phi \rightarrow \max$.

Решение задачи (11.6) – (11.8) представлено в таблицах 11.1-11.3.

Таблица 11.1

Итерации /п	Базис	$\bar{C}_B$	$\bar{B}$	1	1	1	0	0	0
				$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$
1	$\bar{A}_4$	0	1	2	3	9	1	0	0
2	$\bar{A}_5$	0	1	5	2	7	0	1	0
3	$\bar{A}_6$	0	1	7	5	0	0	0	1
+1	$\Phi_j - c_j$		0	-1	-1	-1	0	0	0

$\bar{A}_3$ - ведущий столбик, $\min(1/9, 1/7) = 1/9$, 1-я строка разрешающая.

Таблица 11.2

Итерации /п	Б	$\bar{C}_B$	$\bar{B}$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$
1	$\bar{A}_3$	1	1/9	2/9	3/9	1	1/9	0	0
2	$\bar{A}_5$	0	2/9	31/9	-3/9	0	-7/9	1	0
3	$\bar{A}_6$	0	1	7	5	0	0	0	1
+1	$\Phi_j - c_j$		1/9	-7/9	-6/9	0	1/9	0	0

$\bar{A}_2$ - ведущий столбик, $\min(1/9 : 3/9, 1/5) = \min(1/3, 1/5) = 1/5$, 3-я строка разрешающая.

Таблица 11.3

И /п	Б	$\bar{C}_B$	$\bar{B}$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$
1	$\bar{A}_3$	1	$\frac{2}{45}$	$-\frac{11}{45}$	0	1	$\frac{1}{9}$	0	$-\frac{3}{45}$
2	$\bar{A}_5$	0	$\frac{13}{45}$	$\frac{17}{6/45}$	0	0	$-\frac{7}{9}$	1	$\frac{3}{45}$
3	$\bar{A}_2$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	1	0	0	0	$\frac{1}{5}$
+1	$\Phi_j - c_j$	$\frac{11}{45}$	$\frac{7}{45}$	0	0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{6}{45}$	
						x_1	x_2	x_3	

В таблице 11.3 обнаруживается признак получения максимального результата для целевой функции Φ , поэтому мы можем вписать оптимальные результаты для переменных y_i :

$$y_1 = 0, y_2 = 1/5, y_3 = 2/45, y_4 = 0, y_5 = 13/45, y_6 = 0.$$

При этих оптимальных значениях переменных $\Phi_{\max} = 11/45$.

По полученным результатам находим оптимальную цену эквивалентной игры и оптимальные стратегии столбцевого игрока:

$$v_{\text{опт}}^3 = \frac{1}{\Phi_{\max}} = \frac{45}{11}; \quad q_j = y_j v_{\text{опт}}^3$$

и именно

$$q_1 = y_1 v_{\text{опт}}^3 = 0; \quad q_2 = y_2 v_{\text{опт}}^3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{45}{11} = \frac{9}{11}; \quad q_3 = y_3 v_{\text{опт}}^3 = \frac{2}{45} \cdot \frac{45}{11} = \frac{2}{11}.$$

Итоговая таблица 11.3 несет информацию и о значении двойственных переменных, т.е. переменных, оценивающих оптимальное поведение строчного игрока. Значения переменных x_1, x_2, x_3 вычитываются из указанных стрелками клеток целевой (m+1)-й строки. У нас получилось $x_1 = 1/9, x_2 = 0, x_3 = 6/45 = 2/15$. И на основании уже этих данных определяем оптимальные стратегии строчного игрока:

$$p_1 = x_1 v_{\text{опт}}^3 = \frac{1}{9} \cdot \frac{45}{11} = \frac{5}{11}; \quad p_2 = x_2 v_{\text{опт}}^3 = 0 \cdot \frac{45}{11} = 0; \quad p_3 = x_3 v_{\text{опт}}^3 = \frac{6}{45} \cdot \frac{45}{11} = \frac{6}{11}.$$

Итак, определены оптимальные смешанные стратегии для игроков:

$$p^0 = \left(\frac{5}{11}, 0, \frac{6}{11} \right) \text{ - строчного;}$$

$$q^0 = \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11} \right) \text{ - столбцевого.}$$

При этом $v_{\text{опт}}^3 = \frac{45}{11} = 4 \frac{1}{11}$. Возвращаясь к исходной игре, получаем

$$\text{оптимальную цену } v_{\text{опт}} = v_{\text{опт}}^3 - k = \frac{45}{11} - 4 = \frac{1}{11}.$$

И еще рассмотрим маленький пример. Пусть игра задана матрицей

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & -4 \end{Bmatrix}$$

Делаем необходимые расчеты для определения максимина и минимакса

$$\begin{aligned} \min_j a_{1j} &= -1 = a_{12}, & \max_i a_{i1} &= 5 = a_{31}, \\ \min_j a_{2j} &= -5 = a_{24}, & \max_i a_{i2} &= 6 = a_{32}, \\ \min_j a_{3j} &= 3 = a_{33}, & \max_i a_{i3} &= 3 = a_{33}, \\ \min_j a_{4j} &= -4 = a_{45}, & \max_i a_{i4} &= 5 = a_{14} = a_{44}, \\ & & \max_i a_{i1} &= 5 = a_{31}, \\ \max_i \min_j a_{ij} &= 3 = a_{33}; & \min_j \max_i a_{ij} &= 3 = a_{33}; \\ \max_i \min_j a_{ij} &= \min_j \max_i a_{ij} = 3 = a_{33}. \end{aligned}$$

Так как в рассматриваемой игре максимин и минимакс совпадают, то задача решается в чистых стратегиях. Именно, так как элемент a_{33} седловой, то строчному игроку следует придерживаться стратегии $i^* = 3$, а столбцовому $j^* = 3$.

Иными словами, оптимальные стратегии для строчного и столбцового игроков соответственно будут

$$\begin{aligned} p^0 &= (0, 0, 1, 0) \\ \text{и} \\ q^0 &= (0, 0, 1, 0, 0). \end{aligned}$$

§ 12. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Предварительно поясним, что метод динамического программирования применяется прежде всего к тем задачам, в которых оптимизируемый процесс (или ситуация) разворачивается в пространстве или во времени, или в том и другом.

Пусть сам процесс (ситуация) настолько сложен, что нет возможности его оптимизировать известными методами. Тогда по методу динамического программирования сложный процесс (операция, ситуация) разбивается (членится) на ряд этапов (шагов). Эта разбивка во многих случаях является естественной, но в общем случае привносится искусственно. Например, при рассмотрении какой-либо партии игры в шахматы любой ход каждого из игроков как раз и служит разбивке всей партии на отдельные шаги (этапы). А в военной операции по преследованию одной ракеты другой весь непрерывный процесс приходится искусственно разбивать на этапы, например, через каждую секунду наблюдения.

Метод динамического программирования позволяет оптимизацию всего сложного процесса заменить условной оптимизацией по каждому из этапов (шагов) с последующим синтезом оптимального управления всем процессом. При этом метод предусматривает, что условная оптимизация на отдельном шаге (этапе) делается в интересах, прежде всего, всей операции.

Для решения задачи об оптимальном распределении капиталовложений мы будем пользоваться функциональным уравнением Беллмана (американский ученый Ричард Беллман - автор метода динамического программирования). Сначала с помощью простейшей ситуации проиллюстрируем вывод функционального уравнения Беллмана, а потом на примере докажем, как использовать это уравнение для решения интересующей нас задачи.

Начнем с оптимального распределения выделенных капиталовложений в сумме K между двумя предприятиями. Плановые отделы предприятий на основе своих расчетов сформировали функции дохода $q(x)$ для предприятия Π_1 и $h(x)$ - для предприятия Π_2 . Функции эти означают, что если первое или второе предприятие получит капиталовложение и размере x , то первым предприятием будет получен доход $q(x)$, а вторым $h(x)$, причем величина x может принимать непрерывные или известные дискретные значения от 0 до K .

Итак, пусть предприятию Π_1 выделены капиталовложения в сумме x , тогда предприятию Π_2 выделяется сумма $K - x$. В этом случае от первого предприятия будет получен доход $q(x)$, а от второго - $h(K - x)$. Если капиталовложения K были выделены на один плановый период, то общий доход от двух предприятий составит $R(K, x) = q(x) + h(K - x)$. Очевидно, что x и соответственно $K - x$ надо выбирать такими, чтобы $R(K, x)$ приняло свое максимальное значение, которое мы обозначим через $F(K)$:

$$F(K) = \max_{0 \leq x \leq K} R(K, x) = \max_{0 \leq x \leq K} [q(x) + h(K - x)].$$

Эта запись является как бы остовом для более полных записей функционального уравнения Беллмана.

Усложним нашу задачу, распределив капиталовложения на два плановых периода (два этапа). Пусть изначально решено первому предприятию Π_1 выделить сумму x , а второму $K - x$. В целом доход получался бы равным $R(K, x) = q(x) + h(K - x)$. Если мы будем иметь в виду, что капиталовложения распределяются на 2 периода (2 этапа), то на первом предприятии остаток капиталовложений составит αx , где $0 \leq \alpha < 1$, а на втором - $\beta(K - x)$, где $0 \leq \beta < 1$. Соответственно доходы за второй период составят $q(\alpha x)$ - по первому предприятию и $h[\beta(K - x)]$ - по второму. Оптимизацию по методу динамического программирования, как правило, начинают с конечного этапа. Поэтому начнем со второго этапа, обозначив F_1 максимально возможный доход от двух предприятий на втором этапе. Получим

$$F_1(\alpha x + \beta(K - x)) = \max_{0 \leq x \leq K} [q(\alpha x) + h(\beta(K - x))].$$

Затем к рассмотренному последнему (в нашем случае второму) этапу как бы пристраиваем предшествующий (у нас первый) этап и находим максимальный доход от двух этапов вместе:

$$F_2(K) = \max_{0 \leq x \leq K} \{q(x) + h(K - x) + F_1(\alpha x + \beta(K - x))\}.$$

Аналогичным образом для n этапов получаем

$$F_n(K) = \max_{0 \leq x \leq K} \{q(x) + h(K - x) + F_{n-1}(\alpha x + \beta(K - x))\},$$

где F_{n-1} - целевая функция, дающая наилучший результат за последние $(n - 1)$ этапы. Полученное функциональное уравнение Беллмана носит рекуррентный характер, т.е. связывает значение F_n со значением F_{n-1} .

В более общем начертании уравнение Беллмана имеет вид

$$F_n(K) = \max_{0 \leq x \leq K} \{ \varphi(x) + F_{n-1}(\gamma x) \},$$

где $0 \leq \gamma \leq 1$, F_{n-1} - максимальный доход за $(n - 1)$ последних этапов, F_n - максимальный доход за все n этапов.

Проиллюстрируем на примере, как, пользуясь функциональным уравнением Беллмана, оптимально распределить капиталовложения $K = 200$ тыс.грн. четырем предприятиям на единый плановый период, если известны функции дохода каждого предприятия $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$, $q_4(x)$, выраженные в относительных единицах прироста продукции. Здесь под x понимается величина капиталовложения, выделяемого отдельному предприятию.

Пусть исходные данные представлены в табл. I.

Капиталовложения x , тыс. грн.	Прирост выпуска продукции (в относительных единицах)			
	$q_1(x)$	$q_2(x)$	$q_3(x)$	$q_4(x)$
0	0	0	0	0
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
$K = 200$	140	122	130	142

В конечном счете все наши расчеты сведутся к перебору всевозможных вариантов распределения капиталовложений $K = 200$ тыс.грн. между четырьмя предприятиями. Так как мы имеем данные лишь по отдельным дискретным значениям выделения капиталовложений ($x = 50, 100, 150, 200$ тыс.грн.), то количество вариантов конечно и легко просчитываемое. Например, если 200 тыс.грн. распределить поровну по 50 тыс.грн. каждому из предприятий, то получим (как видно из таблицы) общий прирост продукции $q_1(50) + q_2(50) + q_3(50) + q_4(50) = 25 + 30 + 36 + 28 = 119$.

Очевидно, что возможны и другие варианты распределения, обеспечивающие соответствующий прирост продукции. Поиск оптимального варианта распределения капиталовложений организуем с помощью функциональных уравнений Беллмана. Предварительно еще заметим, что если предприятию капиталовложения не выделяются, т.е. $x = 0$, то прироста продукции нет, т.е. $q_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Методика нашего расчета будет состоять в том, что мы сначала (как бы на первом этапе) рассмотрим наилучший эффект от одного предприятия, затем от двух предприятий вместе, потом - от трех, и наконец - на последнем этапе - от всех четырех предприятий. Начнем рассмотрение с первого предприятия, с его функцией прироста продукции $q_1(x)$. Обозначим через $F_1(c)$ максимальный прирост продукции на отдельно взятом первом предприятии, если ему выделить капиталовложения c . Будем считать

$$F_1(c) = \max_{0 \leq x \leq c} q_1(x) = q_1(c),$$

т.к. предполагается монотонный рост прироста продукции в зависимости от выделяемых капиталовложений, т.е. из неравенства $c_2 > c_1$ вытекает $q_1(c_2) \geq q_1(c_1)$. Следовательно, для отдельно взятого первого предприятия мы вправе записать

$$\begin{aligned} F_1(50) &= q_1(50) = 25, \\ F_1(100) &= q_1(100) = 60, \\ F_1(150) &= q_1(150) = 100, \\ F_1(K=200) &= q_1(200) = 140. \end{aligned}$$

Переходим ко второму этапу расчетов. Теперь необходимо определить наилучшее распределение капиталовложений, если они выделяются 1-му и 2-му предприятиям. При этом учитываем наилучший эффект от выделения капиталовложений 1-му предприятию. Обозначим $F_2(c)$ наибольший прирост продукции от распределения капиталовложений c между 1-м и 2-м предприятиями. Согласно методике Беллмана запишем

$$F_2(c) = \max_{0 \leq x \leq c} [q_2(x) + F_1(c - x)].$$

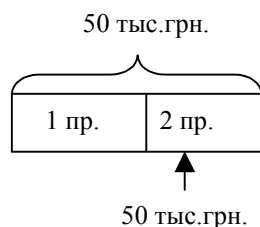
Произведем расчеты по этой формуле для возможных выделяемых капиталовложений, т.е. для 50, 100, 150, 200 тыс.грн.:

$$F_2(50) = \max_{0 \leq x \leq 50} [q_2(x) + F_1(50 - x)].$$

Поскольку согласно данным таблицы аргумент x может принимать лишь некоторые дискретные значения, то на отрезке изменения переменной x от 0 до 50 возможны лишь 2 значения: 0 и 50, поэтому

$$\begin{aligned} F_2(50) &= \max_{0 \leq x \leq 50} [q_2(x) + F_1(50 - x)] = \\ &= \max[q_2(0) + F_1(50 - x); q_2(50) + F_1(0)] = \\ &= \max[0 + 25; 30 + 0] = 30. \end{aligned}$$

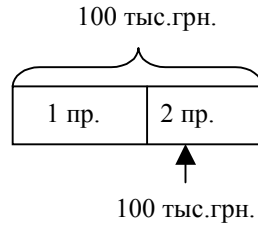
Под знаком максимума подчеркнут тот член, который приносит максимум $F_2(50)$. Это $q_2(50) + F_1(0)$ в качественном изображении. Он означает, что второму предприятию следует выделить капиталовложения 50 тыс.грн., первому предприятию не выделять капиталовложения. Этот факт мы проиллюстрируем следующей условной диаграммой:



В том случае, если первым двум предприятиям выделяется 50 тыс.грн., то их следует полностью отдать 2-му предприятию. В такой ситуации предполагается, что $K - 50 = 200 - 50 = 150$ тыс.грн. каким-то образом распределены между 3-м и 4-м предприятиями. При подсчете $F_2(50)$ мы как бы оцениваем возможную гипотезу о выделении 50 тыс.грн. 1-му и 2-му предприятиям. Аналогичным образом определяем F_2 от других значений выделяемых капиталовложений. Именно

$$\begin{aligned}
F_2(100) &= \max_{0 \leq x \leq 100} [q_2(x) + F_1(100 - x)] = \\
&= \max[q_2(0) + F_1(100); q_2(50) + F_1(50); q_2(100) + F_1(0)] = \\
&= \max[0 + 60; 30 + 25; 70 + 0] = 70.
\end{aligned}$$

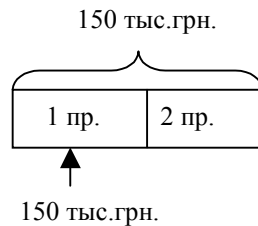
Наилучшему эффекту соответствует диаграмма распределения:



При распределении 100 тыс. грн. между 1-м и 2-м предприятиями следует все 100 тыс. грн. выделить второму предприятию. При этом прирост продукции составит 70 относительных единиц.

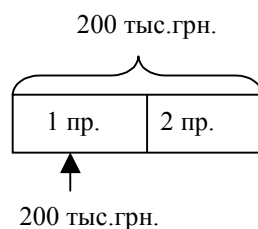
$$\begin{aligned}
F_2(150) &= \max_{0 \leq x \leq 150} [q_2(x) + F_1(150 - x)] = \\
&= \max[q_2(0) + F_1(150); q_2(50) + F_1(100); \\
&\quad q_2(100) + F_1(50); q_2(150) + F_1(0)] = \\
&= \max[0 + 100; 30 + 60; 70 + 25; 90 + 0] = 100.
\end{aligned}$$

Видно, что при выделении 150 тыс.грн. 1-му и 2-му предприятиям следует все 150 тыс.грн. отдать 1-му предприятию:



$$\begin{aligned}
F_2(200) &= \max_{0 \leq x \leq 200} [q_2(x) + F_1(200 - x)] = \\
&= \max[q_2(0) + F_1(200); q_2(50) + F_1(150); \\
&\quad q_2(100) + F_1(100); q_2(150) + F_1(50); q_2(200) + F_1(0)] = \\
&= \max[0 + 140; 30 + 100; 70 + 60; 90 + 25; 122 + 0] = 140.
\end{aligned}$$

Диаграмма распределения:



Переходим к третьему этапу, когда надо будет определить наилучшие варианты распределения капиталовложений, если они будут выделяться 1-му, 2-

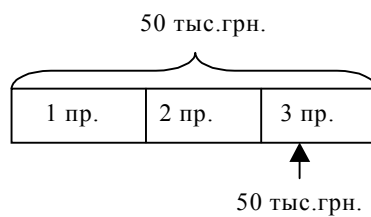
му и 3-му предприятиям вместе. Рассчитывая наилучший эффект для этого этапа $F_3(c)$, мы будем опираться на полученные значения для F_2 . Именно

$$F_3(c) = \max_{0 \leq x \leq c} [q_3(x) + F_2(c - x)].$$

Конкретные расчеты дадут следующее:

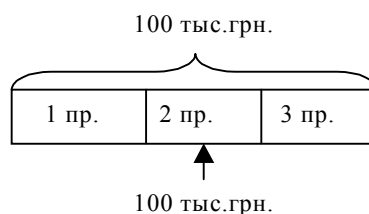
$$\begin{aligned} F_3(50) &= \max_{0 \leq x \leq 50} [q_3(x) + F_2(50 - x)] = \\ &= \max[q_3(0) + F_2(50 - x); q_3(50) + F_2(0)] = \\ &= \max[0 + 30; 36 + 0] = 36 \end{aligned}$$

при диаграмме распределения



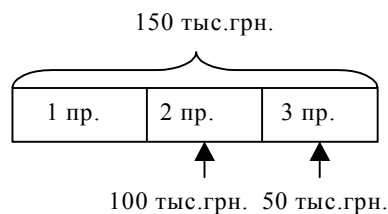
$$\begin{aligned} F_3(100) &= \max_{0 \leq x \leq 100} [q_3(x) + F_2(100 - x)] = \\ &= \max[q_3(0) + F_2(100); q_3(50) + F_2(50); q_3(100) + F_2(0)] = \\ &= \max[0 + 70; 36 + 30; 64 + 0] = 70. \end{aligned}$$

Максимальный эффект приносит член $q_3(0) + F_2(100)$, который означает, что третьему предприятию капиталовложения выделять не следует, а первым двум надо выделить 100 тыс.грн. Как их распределить между 1-м и 2-м предприятиями, это уже решено ранее, когда мы подсчитывали $F_2(100)$ и показывали соответствующую диаграмму распределения. Именно там было решено все 100 тыс.грн. отдать 2-му предприятию. Следовательно, итоговая диаграмма для $F_3(100)$ будет такой:



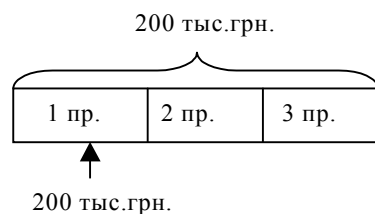
$$\begin{aligned} F_3(150) &= \max_{0 \leq x \leq 150} [q_3(x) + F_2(150 - x)] = \\ &= \max[q_3(0) + F_2(150); q_3(50) + F_2(100); \\ &\quad q_3(100) + F_2(50); q_3(150) + F_2(0)] = \\ &= \max[0 + 100; 36 + 70; 64 + 30; 95 + 0] = 106. \end{aligned}$$

Согласно члену $q_3(50) + F_2(100)$, принесшему максимальный эффект, следует при распределении 150 тыс.грн. между первыми тремя предприятиями отдать 50 тыс.грн. 3-му предприятию, а 100 тыс.грн. распределить так, как это решено при подсчете $F_2(100)$. Там было решено 100 тыс.грн. отдать 2-му предприятию. Итоговая диаграмма для рассматриваемого случая будет иметь вид:



$$\begin{aligned}
 F_3(200) &= \max_{0 \leq x \leq 200} [q_3(x) + F_2(200 - x)] = \\
 &= \max[q_3(0) + F_2(200); q_3(50) + F_2(150); \\
 &\quad q_3(100) + F_2(100); q_3(150) + F_2(50); q_3(200) + F_2(0)] = \\
 &= \max[0 + 140; 36 + 100; 64 + 70; 95 + 30; 130 + 0] = 140.
 \end{aligned}$$

Максимальный член $q_3(0) + F_2(200)$ предписывает в случае выделения 200 тыс.грн. первым трем предприятиям третьему предприятию капиталовложений не выделять, а выделять их 1-му и 2-му предприятиям. Но по расчету $F_2(200)$ мы можем увидеть, что все 200 тыс.грн. предписывается отдать 1-му предприятию. Диаграмма распределения согласно расчету $F_3(200)$ имеет вид



распределить капиталовложения уже между всеми четырьмя предприятиями. Необходим расчет $F_4(c)$:

$$F_4(c) = \max_{0 \leq x \leq c} [q_4(x) + F_3(c - x)].$$

На этом этапе нам уже нет смысла рассчитывать $F_4(50)$, $F_4(100)$, $F_4(150)$, а достаточно сразу определить $F_4(K) = F_4(200)$, т.к. под знаком максимума в формуле для $F_4(c)$ уже нет F_4 , рассчитываемого от долей капиталовложений K . Итак,

$$\begin{aligned}
 F_4(200) &= \max_{0 \leq x \leq 200} [q_4(x) + F_3(200 - x)] = \\
 &= \max[q_4(0) + F_3(200); q_4(50) + F_3(150); \\
 &\quad q_4(100) + F_3(100); q_4(150) + F_3(50); q_4(200) + F_3(0)] = \\
 &= \max[0 + 140; 28 + 106; 56 + 70; 110 + 36; 142 + 0] = 146.
 \end{aligned}$$

Максимальный член $q_4(150) + F_3(50)$ информирует нас о том, что четвертому

любой точке допустимой области. Существенно отличаются и методы решения нелинейных задач. Рассмотрим лишь некоторые подходы к решению этих задач.

Прежде всего также справедлив графический подход при решении простейших задач нелинейного программирования. Так, если аргументами задачи являются переменные x_1 и x_2 , то сначала на плоскости этих переменных строится область допустимых решений, а затем с помощью уровней целевой функции $f(x_1, x_2)$ определяется оптимальная точка в области. Например, пусть надо определить такие значения x_1 и x_2 , которые бы отвечали условиям

$$\begin{cases} x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 4 \leq 0, \\ x_1 \geq 2, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (13.3)$$

и обеспечивали бы максимум целевой функции

$$f = -x_1^2 + x_2.$$

На рис. 13.1 представлено полное графическое решение этой задачи. Прокомментируем это решение. Область допустимых решений выделяется тремя неравенствами (13.3).

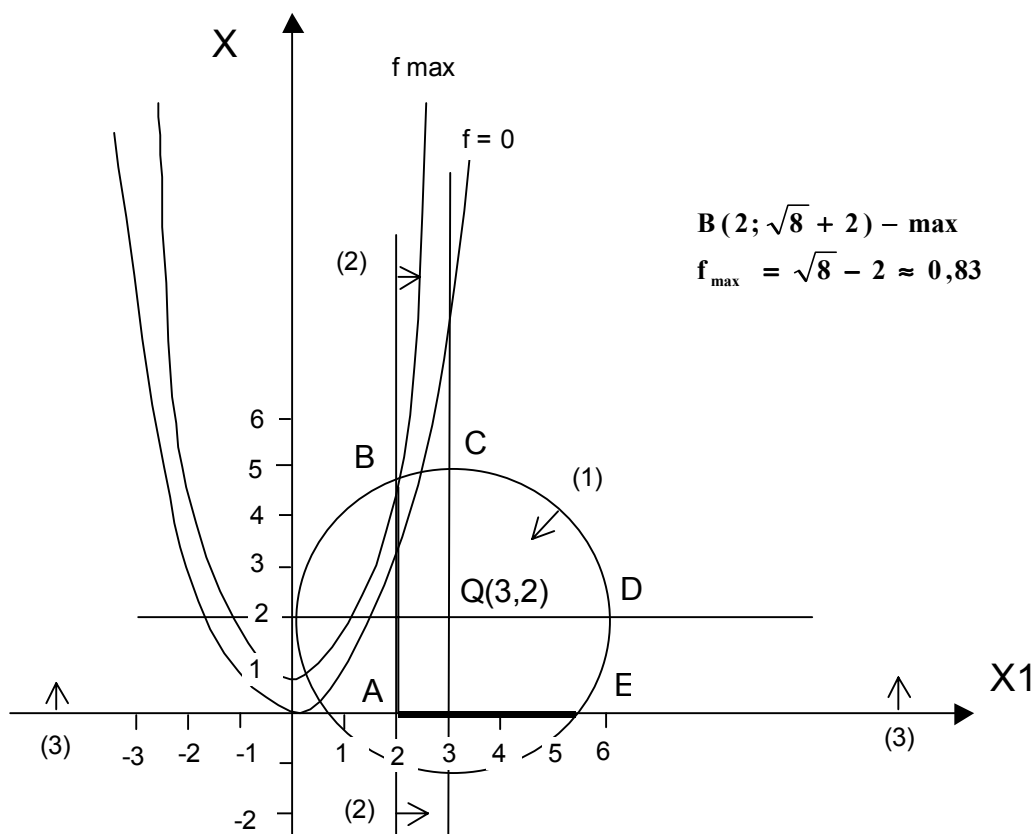


Рис.13.1

В левой части первого неравенства $x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 4 \leq 0$ нетрудно выполнить приведение к полным квадратам. Для этого достаточно учесть, что $x_2^2 - 4x_2 + 4 = (x_2 - 2)^2$, а к выражению $x_1^2 - 6x_1$ прибавить и отнять число 9. В результате получаем

$$(x_1^2 - 6x_1 + 9 - 9) + (x_2^2 - 4x_2 + 4) \leq 0$$

или

$$(x_1^2 - 6x_1 + 9) - 9 + (x_2^2 - 4x_2 + 4) \leq 0,$$

или

$$(x_1 - 3)^2 - 9 + (x_2 - 2)^2 \leq 0$$

и окончательно

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 9.$$

Видно, что границей этого неравенства является окружность $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 = 9$ с центром в точке (3, 2) и радиусом $r = 3$. Центр этой окружности обозначим через Q. Путем простейшего контроля, например, с помощью подстановки координат точки Q(3, 2) в первое неравенство (13.3), можно установить, что круг будет допустимой зоной для первого ограничения. Границей второго неравенства $x_1 \geq 2$ является вертикальная прямая $x_1 = 2$. Согласно второму неравенству допускается вся полуплоскость от границы (2). Границей третьего неравенства $x_2 \geq 0$ является ось x_1 , причем третье неравенство допускает все точки полуплоскости, лежащей выше оси x_1 . В итоге все три неравенства в качестве области допустимых решений выделяют часть круга ABCDE.

Для определения оптимальной точки надо на чертеже построить уровни целевой функции, т.е. кривые вида $f = \text{const}$ или $-x_1^2 + x_2 = \text{const} = c$. Пусть $c = 0$, тогда линией уровня будет парабола $-x_1^2 + x_2 = 0$ или $x_2 = x_1^2$. На рис. 13.1 эта парабола помечена отметкой $f = 0$. При увеличивающейся константе c параболы уровни перемещаются вверх. Поэтому из чертежа видно, что максимум наступает в точке В. Для определения точных координат точки В достаточно решить систему уравнений, составленную из границ (1) и (2), т.е.

$$\begin{cases} x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 4 = 0, \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x_1 = 2$, $x_2 = \sqrt{8} + 2$. Итак, $B = (2; \sqrt{8} + 2)$. Подставляя координаты оптимальной точки В в целевую функцию, получаем $f_{\max} = \sqrt{8} - 2 \approx 0,83$.

В нелинейном программировании для решения многих задач используется градиентный подход. Имеется целый ряд градиентных методов, сущность которых состоит в поиске оптимального результата с помощью градиента целевой функции - вектора, указывающего направление максимального возрастания цели для рассматриваемой точки. В общем случае процедура поиска совершается в итеративном режиме от первоначально выбранной точки к точкам с лучшим показателем. Пусть, например, Ω - область допустимых решений рассматриваемой задачи, а итеративный процесс расчетов начинается с точки $A(x_{1A}, x_{2A}, \dots, x_{nA})$, $A \in \Omega$. Пусть градиент целевой функции $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\text{grad}_A f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_A.$$

И пусть из точки А мы перемещаемся в некоторую точку В с координатами

$$\begin{cases} x_{1B} = x_{1A} + h \frac{\partial f}{\partial x_1} \bigg|_A, \\ x_{2B} = x_{2A} + h \frac{\partial f}{\partial x_2} \bigg|_A, \\ \dots\dots\dots \\ x_{nB} = x_{nA} + h \frac{\partial f}{\partial x_n} \bigg|_A. \end{cases} \quad (13.4)$$

Здесь h - постоянный или переменный параметр, определяющий величину шага перехода.

Подставляя полученные в (13.4) координаты точки В в целевую функцию (13.2), нетрудно проверить, произошло ли улучшение результата. Но еще важнее проверить, не является ли уже оптимальной новая точка. Если оптимальная точка содержится внутри допустимой области, а цель суть непрерывная гладкая функция, то критерием попадания в оптимальную точку будет обращение в нуль координат вектора - градиента (или с заданной точностью приближение к нулевому значению). При этом движение к оптимальной точке либо совершается с одинаковым малым шагом на каждой итерации, либо с подбираемым шагом, обеспечивающим на каждой итерации неухудшаемый результат при переходе к очередной точке. Эти случаи перехода соответственно проиллюстрированы на рис. 13.2, а и б. Если же экстремум целевой функции наступает на границе (рис. 13.3), то критерием оптимальности будет с достаточной степенью достигнутая коллинеарность вектора - градиента целевой функции и вектора - градиента границы, на которой наступает искомый экстремум. Поиск экстремума начат в точке $A_1 \in \Omega$.

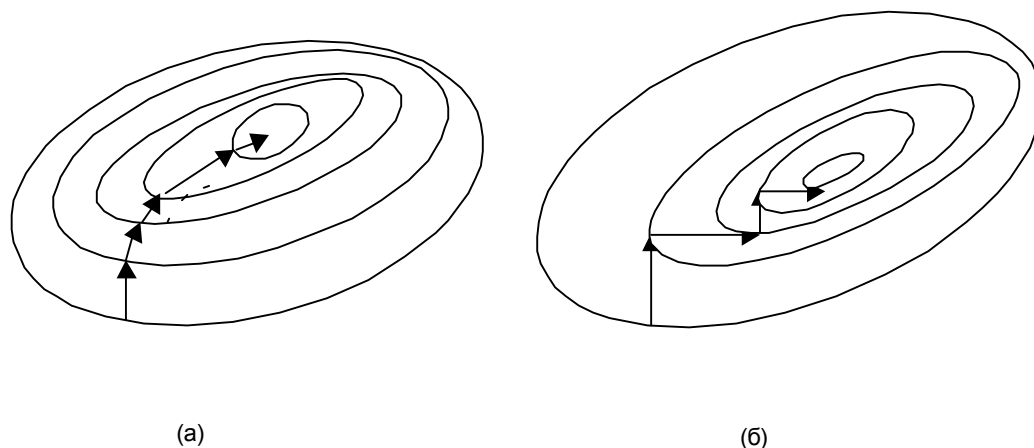


Рис.13.2

Далее, сначала делается переход по градиенту целевой функции, а затем возврат в область Ω по градиенту к нарушенной границе $O_2 O_3$ области Ω . На рис. 13.3 показано так, что A_i с нечетными индексами принадлежат области Ω , а точки A_i с четными индексами не принадлежат Ω . По мере приближения к оптимальной

точке Q направления рабочих градиентов сближаются. Поэтому идеальным критерием остановки процесса будет коллинеарность градиента цели и градиента нарушенной границы.

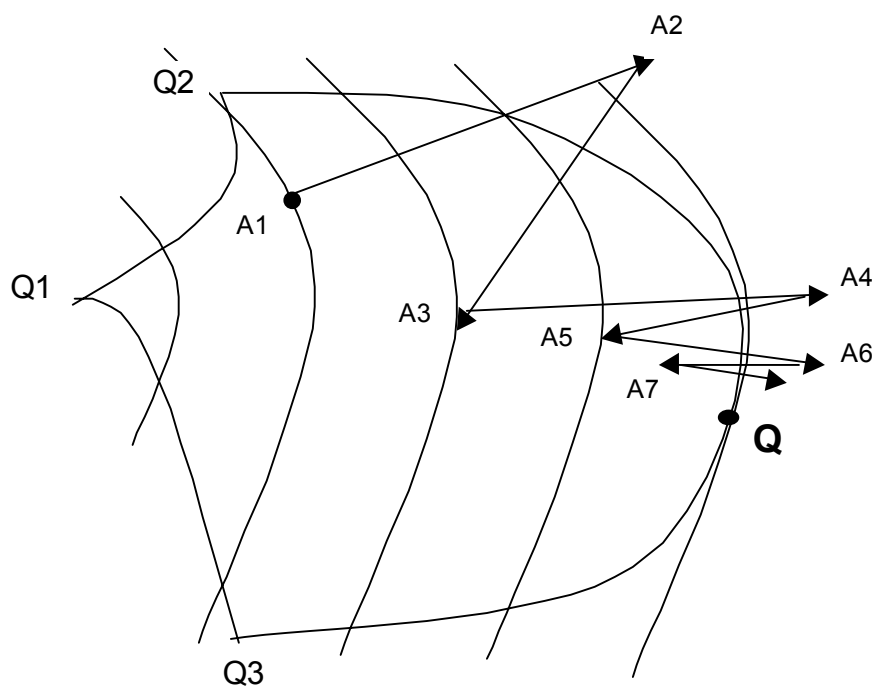


Рис.13.3