

А. Породников, В. Породников

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ



**Справочное пособие
для экономистов**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Д. Породников

А.В. Породников

Математические методы и модели

(справочное пособие для экономистов)

**У т в е р ж д е н о
на заседании кафедры
математики и математических
методов в экономике
Протокол № 7 от 16.03.2000**

Донецк 2000 г.

Авторы:

В.Д. Породников

А.В. Породников



Книга представляет собой практическое справочное пособие по активному применению основ математической рыночной экономики: экономики предприятий и фирм, макроэкономики, межотраслевого баланса, линейного программирования. Содержит пакет таких моделей количественного анализа экономики, как функции потребления, производственные функции, динамические и статистические модели «затраты - выпуск», модели роста.

Для экономистов, статистиков, преподавателей и студентов вузов.

Рецензенты: ***В.В. Баклан*** канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой математических методов в экономике Донецкого института туристического бизнеса, ***С.Н. Иванов*** канд. экон. наук, доцент кафедры математики и математических методов в экономике Донецкого государственного университета.

© Донецкий госуниверситет, 2000

© Породников В.Д., Породников А.В., 2000

ПРЕДИСЛОВИЕ

Справочное пособие написано в основном на материалах читаемых курсов для студентов экономических специальностей.

Создание справочника "Математические методы и модели" для студентов-экономистов было обусловлено тем, что современные требования для написания курсовых и дипломных работ по экономической теории предполагают более высокий уровень формализации, чем это было принято до перехода на новые учебные планы в украинской высшей школе. В то же время справочник может быть эффективно использован для реализации программ математической подготовки бакалавров, специалистов и магистров.

Краткие теоретические сведения, приведенные в начале глав, носят справочный характер. Они необходимы для повторения отдельных математических разделов и способствуют лучшему пониманию предложенных моделей.

Модели, родственные по принципу применения, сгруппированы. Для отдельных групп дается подробная процедура использования на практике.

Авторы стремились расположить модели и задачи в определенной последовательности, удобной для самостоятельной работы. Большое внимание при этом уделено принципиальным моментам, существенным для нахождения способа решения задач. Второстепенные логические звенья в решении задач иногда опущены.

Не следует рассматривать все приведенные модели и методы решения задач как завершенные образцы, которым необходимо строго следовать при выполнении конкретных заданий. В некоторых задачах дается только основная идея применения.

Авторы допускают, что изложение материалов справочника, так и по содержанию не лишено недостатков и с благодарностью примут указанные замечания и предложения.

ВВЕДЕНИЕ

Любое экономическое исследование всегда предполагает объединение теории (экономической модели) и практики (статистических данных). Мы предполагаем использование предложенных теоретических моделей для описания наблюдаемых процессов при наличии соответствующих статистических данных. И хотим предостеречь от формального использования этого справочного материала, так как многие проблемы на этом пути еще остаются нерешенными. К ним относится проблема модификации или адаптации существующих математических методов, методологии и методики их применения с учетом свойств социально-экономических данных, так как условия и предположения, использованные математиками при разработке этих методов и выполняющиеся с разумной строгостью в других приложениях, для социально-экономических данных чаще нарушаются, чем выполняются. Ограниченная возможность переноса математических приемов исследования порождает методологические ошибки двоякого рода: отрицание приложимости сложившегося математико-статистического аппарата в социально-экономических исследованиях и представление, будто один и тот же метод без каких-либо модификаций аппарата или методики применения способен равно удовлетворительно описывать явления различной природы. Поэтому, наряду с модификацией существующих методов, требуется разработка нового математического аппарата, методологии и методики анализа, ориентированных на социально-экономическую информацию, и прежде всего на нечисловые данные. Непосредственно к названным выше проблемам примыкают проблемы интерпретации и устойчивости статистических выводов в условиях возможных колебаний исходных данных и нарушения предпосылок, использованных при разработке моделей и т. д.

В справочнике содержится набор основных экономических моделей, необходимых для экономического исследования. Это методы, которые покрывают почти все составные части современной экономической науки: микро- и макроэкономику, эконометрию, теорию межотраслевых связей, теорию управления и оптимального планирования. При этом предполагается, что связанные с этими моделями вопросы содержательного характера обсуждаются в основных экономических курсах и полностью скоординированы с читаемым курсом "Математика для экономистов". Здесь имеются в виду главы и разделы по теории потребительского выбора, производственным функциям, задачам оптимизации производства, моделированию экономической динамики, статистическому оцениванию макроэкономических зависимостей.

Наконец, некоторые модели, приведенные в справочнике, посвящены частным математическим методам, особенно широко и непосредственно применяемым в различных разделах экономической теории. Это методы анализа эластичности, связи суммарных, средних и предельных величин, оценивание и анализ уравнений линейной регрессии.

Основные сведения и понятия о математических методах в экономике

Термин «*модель*», использованный нами, как известно, чрезвычайно многозначен. Мы будем понимать под моделью любое формальное описание связей между определенными символами.

Математическая модель - это абстракция реального мира, в которой интересующие исследователя отношения между реальными элементами заменены подходящими отношениями между математическими категориями. Эти отношения, как правило, представлены в форме уравнений и (или) неравенств между показателями (переменными), характеризующими функционирование моделируемой реальной системы. Искусство построения математической модели состоит в том, чтобы совместить как можно большую лаконичность в ее математическом описании с достаточной точностью модельного воспроизводства именно тех сторон анализируемой реальности, которые интересуют исследователя.

Экономическая модель. Для изучения различных экономических явлений экономисты используют их упрощенные формальные описания, называемые экономическими моделями. Примерами экономических моделей являются модели потребительского выбора, модели фирмы, модели экономического роста, модели равновесия на товарных, факторных и финансовых рынках и многие другие. Строя модели, экономисты выявляют существенные факторы, определяющие исследуемое явление, и отбрасывают детали, несущественные для решения поставленной проблемы. Формализация основных особенностей функционирования экономических объектов позволяет оценить возможные последствия воздействия на них и использовать такие оценки в управлении.

Примерные этапы построения экономической модели:

- Формулируются предмет и цели исследования.
- В рассматриваемой экономической системе выделяются структурные или функциональные элементы, соответствующие данной цели, выявляются наиболее важные качественные характеристики этих элементов.
- Словесно, качественно описываются взаимосвязи между элементами модели.
- Вводятся символические обозначения для учитываемых характеристик экономического объекта и формализуются, насколько возможно, взаимосвязи между ними. Тем самым, формулируется математическая модель.
- Проводятся расчеты по математической модели и анализ полученного решения.

Следует различать математическую структуру модели и ее содержательную интерпретацию. Современная экономическая теория, как на микро-, так и на макроуровне, включает как естественный, необходимый элемент математические модели и методы. Использование математики в экономике позволяет, во-первых, выделить и формально описать наиболее важные, существенные связи экономических переменных и объектов: изучение столь сложного объекта предполагает высокую степень абстракции. Во-вторых, из четко сформулированных исходных данных и соотношений методами дедукции можно получать выводы, адекватные изучаемому объекту в той же мере, что и сделанные предпосылки. В-третьих, методы математики и статистики позволяют индуктивным путем получать новые знания об объекте: оценивать форму и параметры зависимостей его переменных, в наибольшей степени соответствующие имеющимся наблюдениям. В-четвертых, использование языка математики позволяет точно и

компактно излагать положения экономической теории, формулировать ее понятия и выводы. Наконец, развитие микроэкономики, макроэкономики, прикладных дисциплин связано с более высоким уровнем их формализации. Основу для этого заложил прогресс в области прикладной математики - теории игр, математического программирования, математической статистики.

Математическая модель экономического объекта

Так как модель - это условный образ объекта, в данном случае экономического, построенный для упрощения его исследования, то на основании принципов построения экономической модели строится математическая модель, которая наполняется информацией, и по ней проводятся необходимые расчеты. Отметим один немаловажный факт, что одни и те же математические модели и методы могут быть использованы для решения различных экономических задач, однако, экономическая ситуация, описываемая моделью, экономическая интерпретация модели и результатов расчета совершенно различны.

Основными элементами математической модели являются: экзогенные и эндогенные переменные, параметры, виды зависимостей экономических переменных и их описание, уравнения, тождества, неравенства и их системы.

Вначале при построении математической модели нужно определить индексы, экзогенные и эндогенные переменные и параметры. Потом необходимо описать *экзогенные переменные*, те, которые задаются вне модели, они известны заранее, и *параметры* - это коэффициенты уравнений модели. Часто экзогенные переменные и параметры в моделях не разделяют.

Далее вводятся обозначения для *эндогенных* переменных, тех, которые определяются в ходе расчетов по модели и заранее не известны.

После описания переменных и параметров, переходят к формализации условий задачи, к описанию ее допустимого множества и целевой функции (если таковая имеется). Допустимое множество - это совокупность всех вариантов состояний, исследуемого объекта. Оно, обычно, описывается с помощью неравенства (системы неравенств). Если модель является оптимизационной, то наряду с ограничениями должна быть выписана целевая функция, т.е. максимизируемая или минимизируемая величина, отражающая интересы принимающего решение субъекта.

Трудности и предостережения

Многочисленность взаимосвязанных факторов при исследовании экономических явлений приводит к тому, что зависимости между экономическими показателями в конкретных условиях приобретают вид корреляционных связей. Математическая формулировка таких зависимостей более сложна, усложняется и проведение соответствующих математических преобразований. Это также приводит к дополнительной трудности использования математических методов в экономических исследованиях.

Исследователю, использующему математические методы в анализе экономических процессов и явлений в их развитии, необходимо учитывать, что объективные экономические законы не вечны, что они возникают, изменяются и отмирают вместе с изменением общественно-производственных отношений и условий. Модификация

объективных экономических законов возможна и в пределах одной и той же общественно экономической формации.

Количественное описание экономических законов средствами математики и статистики требует использования более сложного математического инструментария и в большинстве случаев оказывается более сложной задачей, чем описание законов природы.

Особую трудность вызывает неполнота экономической модели. По своему определению любая экономическая модель абстрактна и, следовательно, неполна, поскольку, выделяя наиболее существенные факторы, определяющие закономерности функционирования рассматриваемого экономического объекта, она абстрагируется от других факторов, которые, несмотря на свою относительную малость, все же в совокупности могут определять не только отклонения в поведении объекта, но и само его поведение. Так, в простейшей модели спроса считается, что величина спроса на какой-либо товар определяется его ценой и доходом потребителя. На самом же деле на величину спроса оказывает также влияние ряд других факторов: вкусы и ожидания потребителей, цены на другие товары, воздействие рекламы, моды и так далее. Обычно предполагают, что все факторы, не учтенные явно в экономической модели, оказывают на объект относительно малое результирующее воздействие в интересующем нас аспекте. Состав учтенных в модели факторов и структура самой модели могут быть уточнены в ходе совершенствования модели.

При применении математических методов в экономике в конкретных расчетах нельзя обойтись без использования статистического материала как источника конкретных численных значений рассматриваемых величин. Особенно это относится к тем работам, которые рассчитаны на непосредственное использование в хозяйственной практике. Перед исследователем всегда стоит не только задача построения экономико-математической модели, адекватно описывающей ту или иную экономическую систему или процесс, но и задача ее наполнения фактическими данными, статистической конкретизации этой модели. Составление ряда математических формул и схем, образующих модель, которые корректны, численно разрешимы и обоснованы в теоретико-экономическом отношении, является необходимым и важным этапом в экономико-математических исследованиях. Но не менее ответственным и важным этапом является сбор научной статистической информации, ее обработка и сводка с целью получить параметры для системы математических формул, образующих модель, заполнить статистическим материалом эти формулы, наполнить их экономическим содержанием. Без этого математические формулы и модели могут оказаться бесплодными и бесполезными.

В связи с этим перед исследователем встают трудности, связанные с особенностями самого экономического статистического материала. Экономический статистический материал, отражающий условия существования и развития экономических систем (предприятие, отрасль и т. д.), изменяется вместе с изменением этих условий. Иногда имеющийся материал очень быстро становится устаревшим, непригодным для расчета параметров в экономико-математической модели. Довольно часто еще до окончания сводки статистической информации и проведения вычислительных работ для получения статистических параметров, необходимых для экономико-математической модели, некоторые из них заметно изменяются вследствие изменения экономических и технологических условий, на базе которых они были определены, и их использование для практических расчетов становится сомнительным. Необходимость учитывать изменения экономических параметров и показателей между

периодом статистического наблюдения и сбора информации и периодом их использования в экономико-математических моделях является дополнительной трудностью при проведении экономико-математических исследований.

Исследователи экономико-математических проблем, которые ограничиваются только составлением моделей, останавливаются на полпути, причем половина пути, которую они прошли, отнюдь не самая трудная его часть. Трудоемкая и кропотливая статистическая работа, необходимая для определения численных значений параметров моделей, часто является камнем преткновения в экономико-математических исследованиях. Трудоемкость предварительной статистической работы, связанной со сбором и обработкой статистической информации и приданием ей формы, позволяющей использовать ее в математических построениях, значительно увеличивают сложность проведения экономико-математических исследований, и ее нельзя недооценивать.

Из всего сказанного отнюдь не следует, что применение математики в исследовании экономических явлений и процессов - дело малоперспективное и проблематичное.

Вне всякого сомнения, оно способствует развитию экономической теории, отраслевых экономических наук, статистики и планирования и приносит большой экономический эффект при решении практических экономических задач, связанных с улучшением организации производства и использования производственных ресурсов. Из сказанного следует, что экономика - трудное поле приложения математики. Это в некоторой степени объясняет тот факт, что экономико-математические методы, несмотря на их всеобщее признание, пока все же относительно медленно внедряются в практику экономических исследований.

Основная цель

Основной целью изучения модели - это получить новые знания об объекте, либо определить наилучшие решения в той или иной ситуации. А это, в свою очередь, определяет роль математических моделей в экономической теории и принятии решений. Экономико-математические модели позволяют выявить особенности функционирования экономического объекта и на основе этого предсказывать будущее поведение объекта при изменении каких-либо параметров. Предсказание будущих изменений, например, повышение обменного курса, ухудшение экономической конъюнктуры, падение прибыли может опираться лишь на интуицию. Однако при этом могут быть упущены, неправильно определены или неверно оценены важные взаимосвязи экономических показателей, влияющие на рассматриваемую ситуацию. В модели все взаимосвязи переменных могут быть оценены количественно, что позволяет получить более качественный и надежный прогноз.

Для любого экономического субъекта возможность прогнозирования ситуации означает, прежде всего, получение лучших результатов или избежание потерь.

Основные типы моделей

В справочнике рассмотрены некоторые математические модели, используемые в экономике, которые можно подразделить на классы по ряду признаков. Это относится, прежде всего, к особенностям моделируемого объекта, цели моделирования и используемого инструментария: модели макро- и микроэкономические, теоретические и прикладные, оптимизационные и равновесные, статические и динамические.

- ◆ **Микроэкономические** модели описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики, либо поведение отдельной такой составляющей в рыночной среде. Вследствие разнообразия типов экономических элементов и форм их взаимодействия на рынке, микроэкономическое моделирование занимает основную часть экономико-математической теории. Наиболее серьезные теоретические результаты в микроэкономическом моделировании в последние годы получены в исследовании стратегического поведения фирм в условиях олигополии с использованием аппарата теории игр.
- ◆ **Макроэкономические** модели описывают экономику как единое целое, связывая между собой укрупненные материальные и финансовые показатели: ВВП, потребление, инвестиции, занятость, процентную ставку, количество денег и другие.
- ◆ **Теоретические** модели позволяют изучать общие свойства экономики и ее характерных элементов дедукцией выводов из формальных предпосылок.
- ◆ **Прикладные** модели дают возможность оценить параметры функционирования конкретного экономического объекта и сформулировать рекомендации для принятия практических решений.
- ◆ К прикладным моделям относятся, прежде всего, **эконометрические** модели, оперирующие числовыми значениями экономических переменных и позволяющие статистически значимо оценивать их на основе имеющихся наблюдений.
- ◆ **Равновесные** модели занимают особое место в моделировании рыночной экономики. Они описывают такие состояния экономики, когда результирующая всех сил, стремящихся вывести ее из данного состояния, равна нулю. В нерыночной экономике неравновесие по одним параметрам (например, дефицит) компенсируется другими факторами (черный рынок, очереди и т.п.). Равновесные дескриптивные модели - описательны.
- ◆ В нашей стране долгое время преобладал нормативный подход в моделировании, основанный на оптимизации. **Оптимизация** в теории рыночной экономики присутствует в основном на микроуровне (максимизация полезности потребителем или прибыли фирмой); на макроуровне результатом рационального выбора поведения экономическими субъектами оказывается некоторое состояние равновесия.
- ◆ В моделях **статических** описывается состояние экономического объекта в конкретный момент или период времени.
- ◆ **Динамические** модели включают взаимосвязи переменных во времени. В статических моделях обычно зафиксированы значения ряда величин, являющихся переменными в динамике, например, капитальных ресурсов, цен и т.п. Динамическая модель не сводится к простой сумме ряда статических, а описывает силы и взаимодействия в экономике, определяющие ход процессов в ней. Динамические модели обычно используют аппарат дифференциальных и разностных уравнений, вариационного исчисления.

- ♦ **Детерминированные модели** предполагают жесткие функциональные связи между переменными модели. Стохастические модели допускают наличие случайных воздействий на исследуемые показатели и используют инструментарий теории вероятностей и математической статистики для их описания.

Замечания и выводы

Условно можно разграничить круг вопросов и задач математической экономики и эконометрики.

Математическая экономика - раздел экономической науки, занимающийся анализом свойств и решений математических моделей экономических процессов. В некоторых случаях эти модели могут рассматриваться как часть математической теории на стыке с экономической наукой. Математическая экономика отделяется обычно от эконометрики, занимающейся статистической оценкой и анализом экономических зависимостей и моделей на основе изучения эмпирических данных. В математической экономике исследуются теоретические модели, основанные на определенных формальных предпосылках (линейность, выпуклость, монотонность и т.п. зависимости, конкретные формулы взаимосвязи величин). Математическая экономика, вообще говоря, не занимается изучением степени обоснованности того, что данная зависимость имеет тот или иной вид (например, что величина потребления является линейной возрастающей функцией дохода), - это оставляется для эконометрики. Задачей математической экономики является изучение вопроса о существовании решения модели, условиях его не отрицательности, стационарности, наличия других свойств. Это обычно осуществляется, как и в математике, путем дедуктивного получения следствий (теорем) из априорно сделанных предпосылок (аксиом).

Разумеется, предметная область, методология и инструментарий экономической науки не исчерпываются подходами математической экономики и эконометрики - обычно в экономических исследованиях используются также методы качественного анализа, индуктивные, эвристические подходы, перемежающиеся с элементами математической экономики и эконометрики. Таким образом, математическая экономика выступает и как самостоятельный раздел экономической науки, и как один из ее инструментов. При этом разделы математической экономики, исследовавшиеся ранее в чисто теоретическом плане, все больше становятся теоретической базой и элементами прикладных исследований.

Среди моделей математической экономики можно выделить два крупных класса - *модели равновесия* в экономических системах и *модели экономического роста*. Модели равновесия (например, модель Эрроу-Дебре, модель "затраты - выпуск" В. Леонтьева) помогают исследовать состояния экономических систем, в которых равнодействующая всех внешних сил равна нулю. Это, вообще говоря, статические модели, в то время как экономическая динамика описывается с помощью моделей роста (модель Харрода - Домара, модель Солоу, модели магистрального типа и др.). Ключевым моментом исследования моделей роста является анализ и отыскание траекторий стационарного роста (роста с постоянными, в том или ином смысле, структурными характеристиками), к выходу, на которые обычно стремится описываемая моделью экономическая система.

Исследование траекторий стационарного роста является одновременно базой для анализа более сложных типов роста и связующим звеном с моделями экономического равновесия (поскольку отыскание такой траектории равнозначно отысканию меняющегося вполне определенным образом равновесного состояния). Значительный вклад в теорию роста внесли работы фон Неймана, Солоу, Гейла, Моришимы и др.

Эконометрика - наука, исследующая количественные закономерности и взаимозависимости в экономике при помощи методов математической статистики. Существуют различные варианты определения эконометрики. От чрезмерно расширенных (при которых к эконометрике относят все, что связано с измерениями в экономике) до узко инструментально-ориентированных (при которых под эконометрикой понимают определенный набор математико-статистических средств, позволяющих верифицировать модельные соотношения между анализируемыми экономическими показателями и оценивать неизвестные значения параметров в этих соотношениях на базе исходных экономических данных). Но основа этих методов - корреляционно-регрессионный анализ. В буквальном переводе этот термин означает «измерения в экономике» и поэтому формально отвечает упомянутому выше расширительному толкованию (сравните с биометрикой, наукометрикой, астрометрией и т.п.). Однако ныне устоялся и широко распространен более ограниченный взгляд на содержание и назначение эконометрики. Этот взгляд, в частности, отражен в следующем определении.

Эконометрика - это самостоятельная научная дисциплина, объединяющая совокупность теоретических результатов, приемов, методов и моделей, предназначенных для того, чтобы на базе

- (i) экономической теории,
- (ii) экономической статистики,
- (iii) математико-статистического инструментария

придавать конкретное количественное выражение общим (качественным) закономерностям, обусловленным экономической теорией.

Эконометрические модели и методы сейчас - это не только мощный инструментарий для получения новых знаний в экономике, но и широко применяемый аппарат для принятия практических решений в прогнозировании, банковском деле, бизнесе.

1. МИКРОЭКОНОМИКА

Микроэкономика - основа всей современной экономической науки. Ее главная тема - выяснение того, как принимают решения и ведут себя субъекты хозяйственной деятельности - отдельные потребители (домашние хозяйства) и производители (предприятия), имеющие специфические стимулы (интересы) и руководствующиеся определенными принципами; как устанавливаются на рынке цены на различные блага и услуги и как исходя из цен, осуществляется распределение ресурсов. Микроэкономике иногда называют «теорией цен», поскольку ее предметом является механизм распределения ресурсов, главными индикаторами которого выступают цены.

В центре внимания микроэкономического анализа - достижение равновесия между спросом и предложением на рынке посредством цен. Спрос и предложение определяются производством и потреблением, за которыми, в свою очередь, стоят индивидуальные планы потребления и производства. Первые состоят из отдельных потребителей, преследующих цель максимизировать полезный эффект потребления. Планы производства разрабатывают предприятия, стремящиеся максимизировать прибыль. Необходимые предпосылки микроэкономического анализа — предположения о существовании свободного рынка и о рациональном характере поведения индивидов.

1.1. ПОТРЕБЛЕНИЕ

1.1.1. Кривые безразличия

Индивиды потребляют различные потребительские стоимости (блага и услуги), чтобы в ответ на возникающие у них разнообразные желания получить полезный эффект, или, иными словами, удовлетворить эти желания. Основой изучения личного потребления (индивидуальных потребителей и домашних хозяйств) служат *кривые безразличия*.

Кривая безразличия — это все планы потребления, которые находятся в отношениях безразличия с рассматриваемым планом потребления.

Пусть $U = U(Y_1, Y_2)$ - функция, или, иначе говоря, индекс полезности, которую можно получить от потребления благ, заданных вектором (Y_1, Y_2) - план потребления, то кривая безразличия это набор значений (Y_1, Y_2) , которые приводят к одному и тому же значению U (множество уровня) (табл. 1).

Таблица 1

№ п/п	Название модели	Функция	Обозначения	Примечания
1	Кривые безразличия			
1.1	С полным возмещением благ	$U = b_1 Y_1 + b_2 Y_2$	b_1, b_2 - положительные параметры	Анализ деятельности производственных отраслей
1.2	Неоклассическая модель полезности	$U = Y_1^{b_1} Y_2^{b_2}$, где $b_1 + b_2 \leq 1$	b_1, b_2 - положительные параметры	
1.3	Модель с полным взаимодополнением благ	$U = \min\left(\frac{Y_1}{b_1}, \frac{Y_2}{b_2}\right) \Leftrightarrow$ $U = u : \begin{cases} Y_1 \geq b_1 u; \\ Y_2 \geq b_2 u. \end{cases}$	b_1, b_2 - положительные параметры	Анализ деятельности производственных отраслей или производственных способов
1.4	Модель замещающе-дополняющего типа	$U = u_1 + u_2 \begin{cases} Y_1 \geq b_1 u_1 + c_1 u_2; \\ Y_2 \geq b_2 u_1 + c_2 u_2. \end{cases}$	b_1, b_2, c_1, c_2 - положительные параметры	Анализ деятельности производственных отраслей или производственных способов

1.1.2. Предельная полезность и предельная норма замещения

Численное дифференцирование

Основными понятиями теории потребления являются предельная полезность и предельная норма замещения. Пусть $U = U(Y_1, Y_2)$ - функция полезности. Достижимый при фиксированном уровне потребления первого блага и незначительном изменении уровня потребления второго блага прирост функции полезности называется *предельной полезностью* (marginal utility) второго блага. Дифференцирование функции полезности по одной из переменных, т. е. вычисление частной производной $\frac{\partial U}{\partial Y_i}$, дает нам предельную

полезность i -го блага. При сокращении потребления первого блага на $-dY_1$ для поддержания прежнего уровня полезности необходимо увеличить потребление второго блага на величину dY_2 , осуществив, таким образом, замещение первого блага вторым. Отношение, отражающее эту замену, называется *предельной нормой замещения* (marginal rate of substitution: MRS) потребительских благ.

Таким образом:

$$MRS = -\frac{dY_2}{dY_1} \Big|_{U=const}.$$

Учитывая, что точки $A = (Y_1, Y_2)$ и $B = (Y_1 + dY_1, Y_2 + dY_2)$ лежат на одной и той же кривой безразличия (т. е. соответствуют одному уровню полезности), имеем

$$U(Y_1, Y_2) = U(Y_1 + dY_1, Y_2 + dY_2),$$

отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial Y_1} U(Y_1, Y_2) dY_1 + \frac{\partial}{\partial Y_2} U(Y_1, Y_2) dY_2 = 0.$$

С учетом последней формулы получаем окончательное выражение для MRS:

$$MRS = \frac{\partial U / \partial Y_1}{\partial U / \partial Y_2}.$$

Итак, предельная норма замещения выражается через отношение предельных полезностей. При задании конкретной формы функции полезности для вычисления предельной полезности и предельной нормы замещения совсем не обязательно использовать формулы дифференцирования. Вычислительный метод, известный под названием численное дифференцирование, позволяет с помощью персонального компьютера получить значение производной или частных производных любой функции, если, конечно, они существуют.

1.1.3. Теория потребления

Отношения предпочтения, характерные для каждого индивида, отражают посредством кривой безразличия, а условия, ограничивающие потребительское поведение, задают уравнением бюджетного ограничения. Если обозначить

рыночные цены первого и второго блага через P_1 и P_2 , а доход потребителя через IN , то для плана потребления (Y_1, Y_2) уравнение бюджетного ограничения или уравнение бюджетной прямой данного индивида будет выглядеть следующим образом:

$$P_1 Y_1 + P_2 Y_2 = IN \quad (\text{в более общем случае справедливо неравенство}).$$

Будем считать, что каждый индивид в рамках бюджетного ограничения старается распределить свой доход между различными потребительскими благами таким образом, чтобы максимизировать полезность: $U \rightarrow \max$. Соответствующий набор благ (Y_1^*, Y_2^*) называется *оптимальным планом потребления* и обычно обозначает точку касания бюджетной линии и кривой безразличия. В условиях, когда рыночные цены и доход индивида заданы извне, оптимальный план потребления индивида определяется на основе принципа максимизации полезности. Оптимальный план потребления изменяется в зависимости от цен и дохода. Этот факт в виде функции можно записать так:

$$Y_1^* = D_1(P_1, P_2, IN), \quad Y_2^* = D_2(P_1, P_2, IN).$$

Приведенные функции называют *функциями спроса домашнего хозяйства*. Они являются разновидностью функций потребления. Суть функции спроса отражена в кривых «доход-потребление» и «цены-потребление». Первая показывает, каким образом при фиксированных ценах объем потребления каждого из благ меняется в зависимости от изменения дохода. Вторая - демонстрирует, как при фиксированном доходе объем потребления каждого из благ меняется в зависимости от изменения цен (табл.2).

1.2. ПРОИЗВОДСТВО

1.2.1. Изокванты и предельная производительность

Функциям полезности и кривым безразличия, описывающим потребление, соответствуют производственные функции и *изокванты*, описывающие производство. Более того, свойства этих функций и формы кривых одинаковы.

Начнем с того, что определим производственную деятельность как процесс, в ходе которого предприятия затрачивают различные ресурсы - вещественные блага и услуги (факторы производства), например, труд и капитальное оборудование, и в результате выпускают разнообразную, ориентированную на рынок продукцию (продукты производства). Отправной точкой микроэкономической теории производства является идея о том, что технологически эффективная производственная деятельность предприятия, в ходе которой для выпуска, например, одного вида продукции Y затрачивается два вида ресурсов X_1, X_2 , может быть описана с помощью *производственной функции* $Y = f(X_1, X_2)$. Если для фиксированного выпуска Y изобразить на плоскости (X_1, X_2) все возможные сочетания необходимых ресурсов (X_1, X_2) , то

получим кривую, называемую *изоквантой*. Так же, как и для функций полезности и кривых безразличия, можно выделить по крайней мере четыре типа производственных функций и изоквант (табл.3).

Нетрудно заметить, что формы этих функций полностью совпадают с формами функций полезности. Если говорить о неоклассической производственной функции¹, то понятию предельной полезности из теории потребления в теории производства соответствует понятие *предельной производительности* ($\frac{\partial Y}{\partial X_i}$), которое является здесь одним из ключевых. Законы же убывающей предельной полезности и убывающей предельной нормы замещения потребительских благ в теории производства сформулированы как закон *убывающей предельной производительности* и закон *убывающей предельной нормы взаимного замещения ресурсов*. Первый из них гласит, что при росте затрат одного из ресурсов (первого или второго) его предельная производительность, $\frac{\partial Y}{\partial X_1}$ или $\frac{\partial Y}{\partial X_2}$, падает. Если представить этот факт в виде формулы, то мы получим

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X_i^2} < 0, \quad (i = 1, 2).$$

Предельная норма замещения (MRS) ресурсов - это предельное отношение замены первого ресурса вторым, - dX_2/dX_1 , в ситуации, когда при постоянном выпуске Y сокращение затрат первого ресурса на dX_1 компенсируется ростом затрат второго ресурса на dX_2 . Подобно теории потребления, это отношение равно отношению частных производных производственной функции, т. е. предельных производительностей ресурсов:

$$MRS = - \frac{dX_2}{dX_1} \bigg|_{Y=const} = \frac{\partial Y / \partial X_1}{\partial Y / \partial X_2}$$

Изокванты неоклассической производственной функции, также как и кривые безразличия, являются гладкими вогнутыми кривыми, а предельная норма замещения ресурсов MRS постепенно убывает.

¹ Производственная функция Кобба-Дугласа - самая известная из всех производственных функций неоклассического типа - была открыта в 20-х годах нашего века экономистом Дугласом в сотрудничестве с математиком Коббом и получила широкое применение в эмпирических исследованиях.

Подобно тому как предельная норма замещения в теории потребления равна отношению цен потребительских благ (относительной цене), в теории производства предельная норма замещения равна отношению факторных цен ресурсов. Кроме того, в микроэкономической теории производства считается, что предельная производительность труда равна цене труда (заработной плате), а предельная производительность капитала - цене услуг капитальных благ (рентным платежам).

Таблица 2

№ п/п	Название модели	Функция	Обозначения	Примечания
2	Функции полезности	$U = b_1 \ln Y_1 + b_2 \ln Y_2$	U — индекс полезности; Y_i — потребление i-го блага	
2.1	Доход-потребление	$U = b_1 \ln Y_1 + b_2 \ln Y_2$	b_1, b_2 - постоянные	Доход - потребление
2.2	Изменение предпочтения в зависимости от дохода	$U = b_1 \ln Y_1 + b_2 \ln Y_2$	b_1, b_2 - параметры; $b_1 = 0.5 + 0.05 \sin(IN/40)$	b_1 меняется в зависимости от размера дохода
2.3	Цены потребления при фиксированном доходе	$U = b_1 \ln Y_1 + b_2 \ln Y_2$	IN, P_2 - фиксированный доход и цена второго блага	
2.4	Цены потребления при фиксированном доходе	$U = b_1 \ln Y_1 + b_2 \ln Y_2$	b_1, b_2 - параметры; $b_1 = \frac{1}{\sqrt{P_1}}$	b_1 отражает важность первого блага и уменьшается по мере роста цены этого блага.

Таблица 3

№ п/п	Название модели	Функция	Обозначения	Примечания
3	Производственные модели			
3.1	С полным возмещением ресурсов	$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2$	a_1, a_2 - параметры	
3.2	Неоклассическая производственная модель Кобба-Дугласа	$Y = X_1^{a_1} X_2^{a_2}$, где $a_1 + a_2 \leq 1$	a_1, a_2 - параметры	Предельная производительность
3.3	Модель с полным взаимодополнением ресурсов	$Y = \min \left(\frac{X_1}{a_1}, \frac{X_2}{a_2} \right)$	a_1, a_2 - параметры	
3.4	Модель смешанного типа	$Y = y_1 + y_2 : X_i \geq a_i y_1 + b_i y_2,$ $(i = 1, 2)$	b_1, b_2, a_1, a_2 - параметры	

Предпосылкой для такого вывода является то, что предприятия составляют свои производственные планы (Y, X_1, X_2) , руководствуясь прежде всего принципом максимизации прибыли. Если обозначить через p , q_1 и q_2 соответственно цены продукции первого и второго ресурсов, то оптимальным производственным планом для предприятия будет решение (Y^*, X_1^*, X_2^*) задачи максимизации прибыли $\Pi = pY - q_1X_1 - q_2X_2$ при ограничении $Y = F(X_1, X_2)$. Выполнив необходимые подстановки, имеем

$$\Pi = pF(X_1, X_2) - q_1X_1 - q_2X_2.$$

Определив максимум этой функции, получим отношение для $\frac{\partial F / \partial X_1}{\partial F / \partial X_2} = \frac{q_1}{q_2}$.

1.2.2. Теория производства

Используя краткосрочную производственную функцию неоклассического типа, проиллюстрируем основы теории производства (табл.4).

Комментарии

1. Параллельные прямые линии, отражающие отношение факторных цен, q_2/q_1 , изображают на графике изоквант, называются *изокостами*.

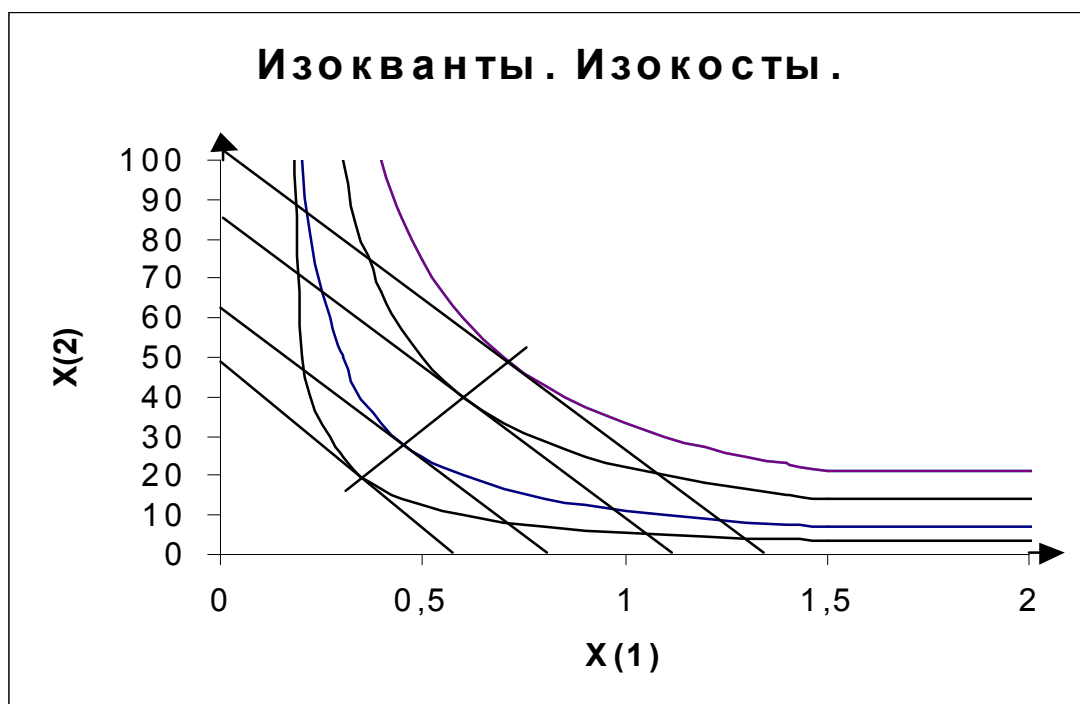


Рис. 1.2.2.1.

Траектория точек касания изоквант и изокост на рис.1.2.2.1 указывает такое сочетание ресурсов, при котором затраты, необходимые для каждого из выпусков, минимальны. Зная точку $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ пересечения этой траектории с изоквантой, соответствующей выпуску Y , можно определить объем

переменной части затрат, $q_1 \overline{X_1} + q_2 \overline{X_2}$, необходимых для выпуска Y . Если к этому объему добавить фиксированные издержки, мы получим совокупные затраты, необходимые для производства продукции. Это является схематичным описанием краткосрочной функции издержек. Таким образом, краткосрочная функция издержек производства выражает отношение затрат и выпуска для того случая, когда при минимизации издержек регулируется только их переменная часть.

2. Издержки производства на единицу выпуска, C/Y , называют *средними затратами*. Если взять производственную функцию (4) и функцию издержек (4.1), учитывая, что $dX_2/dX_1 = q_1/q_2$, после сокращения в этих формулах X_1 и X_2 получим $F(Y)$ - средние затраты. В отличие от средних затрат предельными затратами $F'(Y)$ называется производная dC/dY . Для указанных производственной функции и кривой затрат, определив точку пересечения средних затрат и предельных затрат (рис.1.2.2.2), по формуле

$$Y = AA \cdot \left(\frac{a_1}{1-A} \cdot \frac{C_0}{q_1} \right)^A$$

можно построить и *кривую предложения*, являющуюся частью кривой предельных затрат.

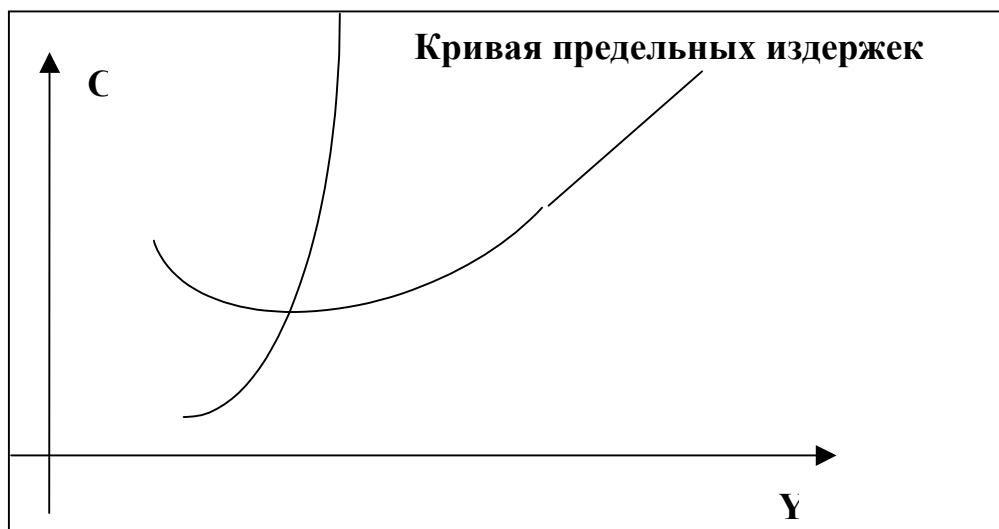


Рис. 1.2.2.2.

Таблица 4

№ п/п	Название модели	Функция	Обозначения	Примечания
4	Производственная функция	$Y = a_0 X_1^{a_1} X_2^{a_2}$ ($a_1 + a_2 < 1$)	a_i - коэффициенты; X_i - затраты i-го ресурса	Можно построить четыре изокванты
4.1	Отношение факторных цен	$C = q_1 X_1 + q_2 X_2$	С- издержки; q_i - факторная цена i-го ресурса	Отношение факторных цен q_2/q_1 (параллельные линии)
4.2	Функция издержек	$C = q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0$, где C_0 -фиксированные издержки	С- издержки; q_i - факторная цена i-го ресурса	Можно построить кривые средних и предельных затрат, и предложения
4.3	Полезны следующие функции	А) $F(X) = X_2 = \left(\frac{X_1^{*a_1} X_2^{*a_2}}{X_1^{a_1}} \right)^{1/a_1}$	(X_1^*, X_2^*) - точка касания изокванты и изокосты	
	Средние затраты	Б) $F(Y) = (q_1 \cdot \frac{A}{a_1} \left(\frac{Y}{AA} \right)^{1/A} + C_0) / Y$	$A = a_1 + a_2$; $AA = a_0 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{q_1}{q_2} \right)^{a_2}$	Издержки производства на единицу выпуска
	Предельные затраты	В) $F(Y) = \left(\frac{q_1}{a_1 \cdot AA} \left(\frac{Y}{AA} \right)^{1/A-1} \right)$	$A = a_1 + a_2$; $AA = a_0 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{q_1}{q_2} \right)^{a_2}$	Производная совокупных издержек по выпуску dC/dY

Замечание. «Краткосрочная производственная функция» описывает производственный цикл, начинающийся с момента, когда предприятие, обладающее неизменными факторами производства, начинает осуществлять на их основе производство, и заканчивающийся моментом выхода предприятия со своей продукцией на рынок. В противоположность краткосрочной функции «долгосрочная производственная функция» описывает период, достаточный для принятия и реализации решений по поводу инвестиций, наращивания (сокращения) основных производственных фондов и изменения их структуры. В долгосрочной производственной функции все без исключения факторы производства рассматриваются как переменные затраты.

1.3. РЫНОК

1.3.1. Паутинообразная модель

Рассмотрим предположение о параметрической системе цен или предпосылку, согласно которой цены выполняют функцию барометра.

Основными проблемами, с которыми мы сталкиваемся, принимая такую предпосылку, являются следующие: каким образом на рынке с совершенной конкуренцией достигается соответствие спроса и предложения, другими словами, как устанавливается равновесие, как устанавливаются рыночные цены, как определяется объем торговых операций (количество сделок). Изучим механизм рынка, т. е. процесс рыночного регулирования.

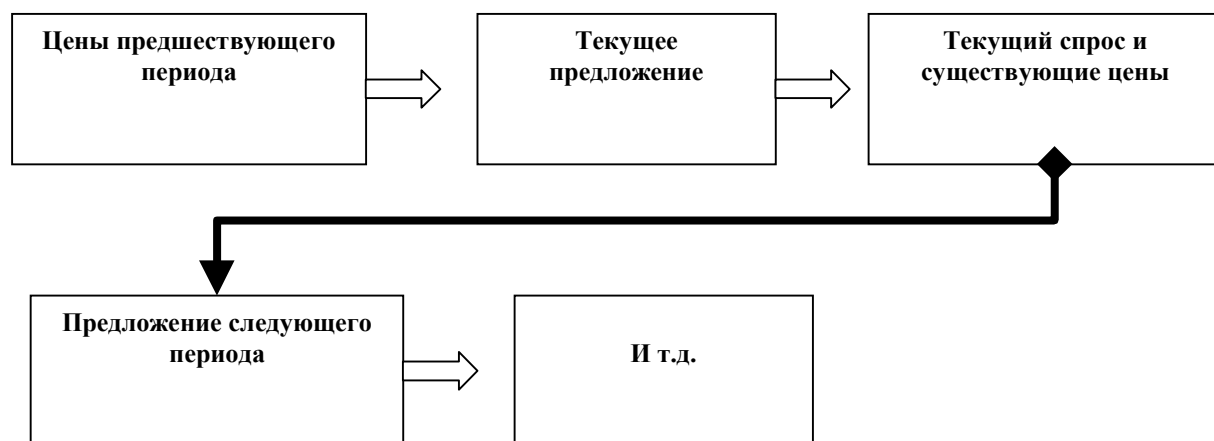
Процесс рыночного регулирования графически изображается в виде модели, которую обычно называют паутинообразной (cobweb model) (табл.5).

Комментарии. Суть паутинообразной модели заключена в следующих двух положениях:

а) Предложение реагирует на цены с некоторым лагом (отставанием во времени): иными словами, сегодняшнее предложение $S(t)^2$ определяется ценой предыдущего периода $P(t-1)$, а сегодняшний спрос $D(t)$ определяется ценой текущего периода $P(t)$.

б) Цены каждого периода $P(t)$ устанавливаются на таком уровне, чтобы уравнять спрос и предложение, т. е. на уровне, при котором $D(t) = S(t)^*$.

Приведенные положения определяют следующий порядок вычислений.



*) Напомним, что в математической экономике переменные спроса обозначают буквой **D** (от англ. Demand - спрос), а переменные предложения - посредством **S** (от англ. Supply - предложение).

Таблица 5

№ п/п	Название модели	Функция	Обозначения	Примечания
5.1	Функция спроса	$D(t) = \alpha + P(t)$	α, A - постоянные параметры; $P(t)$ - цена на момент времени t	Функция одного товара на рынке
5.2	Функция предложения	$S(t) = \beta + B \cdot P(t-1)$	β, B - постоянные параметры; $P(t-1)$ - цена предыдущего момента времени	Функция одного товара на рынке

Использование модели.

Будем считать, что на рынке одного товара функция спроса $D(t)$ и функция предложения $S(t)$ —линейные функции цены $P(t)$ на момент времени t или цены $P(t-1)$ предыдущего момента времени.

Функция спроса (5.1): $D(t) = \alpha + A P(t)$.

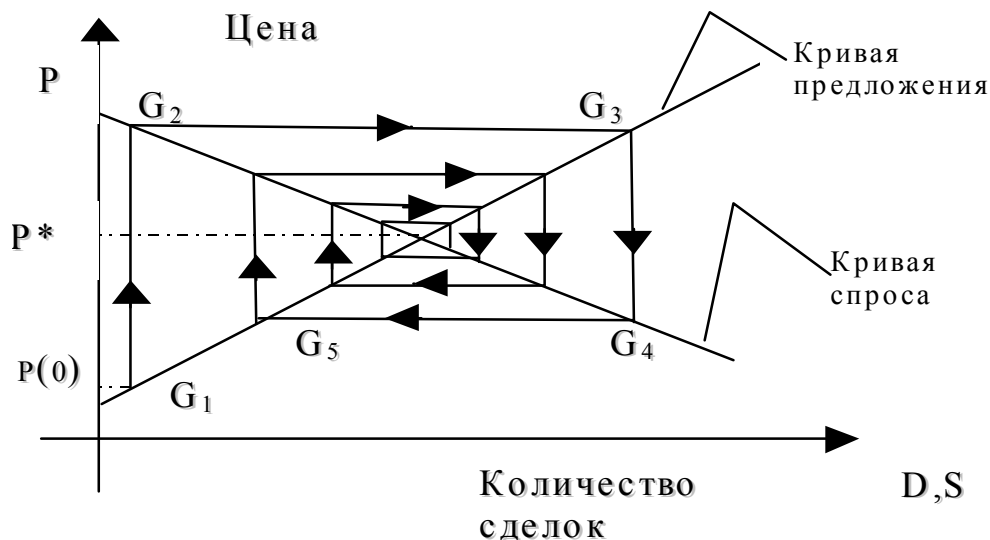
Функция предложения (5.2): $S(t) = \beta + B P(t-1)$.

Порядок построения:

- Изображает кривую спроса D и кривую предложения S на плоскости, где по оси абсцисс которой отложена цена P , а по оси ординат - количество сделок, (рис.1.3.1.).
- Вычисляют начальное предложение $S(1)$ исходя из начального значения цены $P(0)$ на момент времени $T=0$.
- Изображают маршрут «изменение цены -> изменение числа сделок», который имеет вид «паутины», повторив несколько раз процессы (i) и (ii):
 (i) определение $P(t)$ таким образом, чтобы $S(t) = S(P(t-1)) = D(t) = D(P(t))$;
 (ii) нахождение $S(t+1) = S(P(t))$, соответствующего $P(t)$, ($T = 1, 2, \dots, TT$).

Поскольку обычно кривая спроса направлена слева направо и сверху вниз (при $A < 0$), а кривая предложения - слева направо и снизу вверх (при $B > 0$), рыночная цена, которая в процессе регуляции стремится достичь величины равновесия P^* , движется попеременно то вверх, то вниз, вычерчивая соответствующую этому циклу ломаную. Если наклон кривой спроса по своей абсолютной величине больше, чем наклон кривой предложения ($|A| > |B|$), «паутина» тянется так, как изображено на рис. 1.3.1.

Рис. 1.3.1. Траектория изменения цен и количества сделок (паутина)



Если взять начальную цену $P(0)$ меньшей, чем цена равновесия P^* (которая определяется точкой пересечения кривых спроса и предложения), то для первого периода объем предложения будет соответствовать точке G_1 на горизонтальной координатной оси, а цена согласно кривой спроса установится на уровне, отмеченном точкой G_2 на вертикальной координатной оси. Во втором же периоде объем предложения достигнет точки G_3 на горизонтальной оси координат и т. д.

То есть цены и объем сделок будут сходиться к точке равновесия. В случае, когда ($|A| < |B|$), и $P(0) \neq P^*$, цены и объем сделок будут «разбегаться», изменяясь с увеличивающейся амплитудой.

Условия стабильности процесса можно легко вывести, если приравнять формулы (5.1) и (5.2) (см. табл. 5) и получить следующее линейное уравнение, где цена выступает в качестве переменной (будем считать, что $A \neq 0$):

$$P(t) = \frac{B}{A} \cdot P(t-1) + \frac{\beta - \alpha}{A} \quad (5.3)$$

Цена равновесия P^* , при которой $P(t) = P(t-1)$, согласно приведенной выше формуле, равна

$$P^* = (\beta - \alpha) / (A - B),$$

и, следовательно, условием, определяющим $P(t) \rightarrow P^*$ при $t \rightarrow \infty$ то, служат неравенства

$$1 < B/A < 1; \quad |B/A| < 1.$$

Подтверждением того, что процесс сошелся, будем считать выполнение условия $|P(t) - P(t - 1)| < \varepsilon$ для некоторого достаточно малого положительного значения ε .

Тот факт, что $P(t)$ будет отклоняться от P^* попеременно то вверх, то вниз (это происходит, когда $A < 0$, $B > 0$), явствует из переписанной с учетом обозначений $p(t) = P(t) - P^*$ и $r = |B/A| = B/(-A)$ формулы (*).

1.3.2. Модель общего равновесия

Эта модель функционирования рынка основана на теории общего равновесия. Один из основоположников микроэкономического анализа Л. Вальрас назвал эту модель процессом *нащупывания*. Аналогом процесса Вальраса может служить, например, функционирование современных рынков свежей рыбы и фондовых бирж, где «справедливый» аукционист сравнивает спрос и предложение участников рынка и, повышая или снижая цены, регулирует куплю-продажу.

Используя итеративный метод вычислений, имитируют действие рыночного механизма с помощью небольшой модели общего равновесия и изучают ее поведение.

В качестве хозяйственных субъектов, участвующих в процессе функционирования рынка, выберем два предприятия, каждое из которых, располагая одним-единственным доступным им обоим ресурсом (например, трудом), производит по одному виду продукции конечного спроса, и одного потребителя, предъявляющего этот спрос. Условимся также, что обмен осуществляется через единственного посредника - аукциониста (рис.1.3.2.):

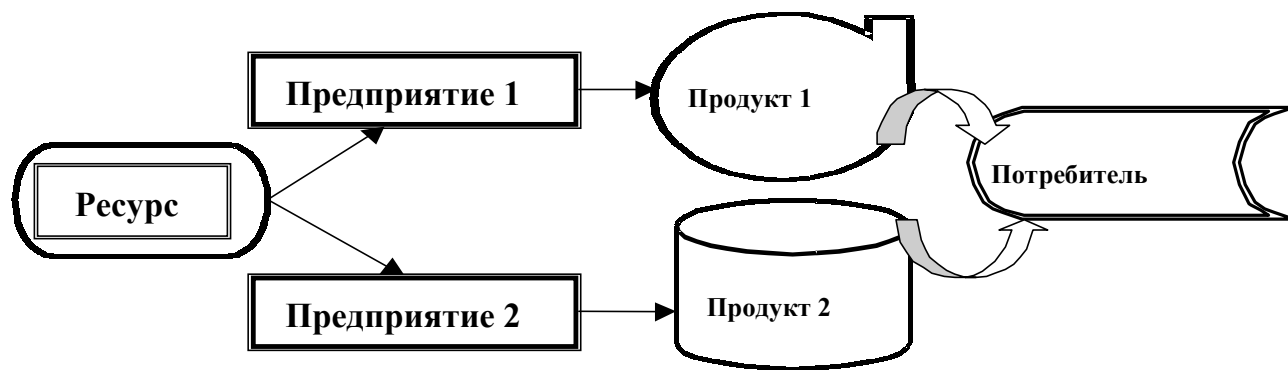


Рис. 1.3.2. Экономический цикл предприятия.

Проблема оптимального распределения ресурсов для такой экономики формулируется следующим образом:

- **Условия спроса и предложения продукции:**

$$Y_1^s = F_i(L_1^d) \geq Y_i^{d*}.$$

- **Условия спроса и предложения ресурсов:**

$$L_1^d + L_2^d \leq L^s.$$

- **Функция полезности**, максимизируемая потребителем:

$$U(Y_1^d, Y_2^d) \rightarrow \max.$$

Обозначения:

Y_1^s - объем предложения i -го продукта i -м предприятием;

Y_i^d - объем спроса со стороны потребителя на i -й продукт;

L^s - предложение ресурса (постоянная величина);

L_1^d - объем спроса на ресурс со стороны i -го предприятия;

F_i - производственная функция i -го предприятия;

U - функция полезности потребителя.

Рыночный процесс по Вальрасу (модель Эрроу-Гурвица) - это постепенное приближение к решению описанной задачи путем итеративного диалога (обмена информацией) между участниками процесса.

Этапы решения задачи

Пусть каждая итерация t будет состоять из приведенных ниже четырех шагов процесса регуляции рынка (главная программа). Кроме того, обеспечим после каждой итерации необходимый для анализа развития процесса просмотр очередного значения функции полезности, цен, размера спроса на ресурс, объема предложения продуктов производства и совокупных размеров избыточного спроса.

- Аукционист указывает i -му предприятию цену на его продукцию $P_i(t)$ и цену ресурса $W(t)$, а также сообщает потребителю цены $P_i(t)$ и цену спроса, равную предельной полезности

$$\frac{\partial U(Y_1^d, Y_2^d)}{\partial Y_i^d}(t-1), \text{ где } i = 1, 2.$$

- i -е предприятие, исходя из заданных ему цен, выбирает такое сочетание затрат и результатов производства $(L_i^d(t), Y_i^s)$, которое максимизирует его прибыль

$$\pi_i(t) = P_i(t) \cdot F_i(L_i^d(t)) - W(t) \cdot L_i^d(t),$$

и представляет это сочетание на рассмотрение аукциониста.

- Потребитель предъявляет спрос на i -й продукт следующим образом. Если на i -й продукт нет спроса или если предельная полезность потребления меньше предельных затрат, то потребитель оставляет величину спроса без изменений. В противном случае он корректирует спрос пропорционально разнице между предельной полезностью и

предельными затратами и в результате указывает соответствующую величину Y_i^d (рис. 1.3.3).

(iv) Аукционист, руководствуясь законом спроса и предложения, изменяет цены (процесс нащупывания). Если спрос на продукт превышает предложение, он поднимает цену и наоборот. Однако в том случае, если избыточный спрос отрицателен и соответствующие ему цены равны нулю, снизить цены ниже существующего уровня невозможно (что, в частности, следует и из блок-схемы рассматриваемого нами процесса).

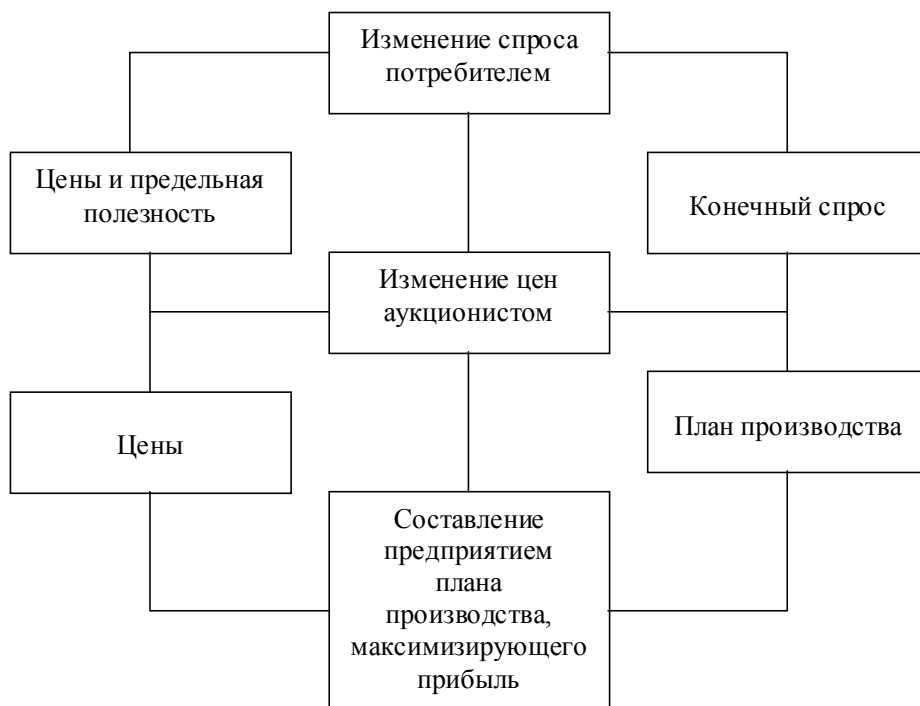


Рис. 1.3.3.

Производственная функция и функция полезности определяются следующим образом:

$$Y_i^s = C_i \cdot (L_i^d)^{a_i}, \quad (a_i < 1), \quad U = b_1 \ln Y_1^d + b_2 \ln Y_2^d$$

Обозначения:

Y_i^s - объем предложения i -го продукта;

Y_i^d - объем спроса на i -й продукт;

L^s - объем предложения ресурса;

L_i^d - объем спроса на ресурс со стороны i -го предприятия;

F_i - производственная функция i -го предприятия;

U - функция полезности потребителя;

P_i - цена i -го продукта;

W - цена ресурса;

ED - избыточный спрос;

U - значение функции полезности.

a_i, b_i, c_i - коэффициенты производственной функции и функции полезности;

$\alpha_i, \beta_i, \gamma$ - коэффициенты, регулирующие связь цен на продукты производства, спроса и цены ресурса;

Комментарии

1. Необходимым условием максимизации прибыли предприятия является:

$$P_i(t) \cdot \frac{dY_i^s(t)}{dL_i^d(t)} \leq W(t) \quad (= \text{если } L_i^d > 0),$$

при $\frac{d\pi(t)}{dL_i^d(t)} \leq 0 \quad (= \text{если } L_i^d > 0).$

Таким образом, учитывая, что $\frac{dY_i^s(t)}{dL_i^d(t)} = C_i a_i \cdot (L_i^d)^{a_i-1}$

при $L_i^d(t) > 0$

получаем
$$L_i^d(t) = \left(\frac{C_i a_i P_i(t)}{W(t)} \right)^{\frac{1}{1-a_i}}.$$

2. Поведение потребителя описывается формулой

$$Y_i^d(t) = \max \left\{ \beta \left(\frac{\partial U}{\partial Y_i^d(t-1)} - P_i(t) \right) + Y_i^d(t-1), 0 \right\}, \quad (i = 1, 2.),$$

где β - положительная корректирующая постоянная и согласно заданной форме функции

полезности
$$\frac{\partial U}{\partial Y_i^d} = \frac{b_i}{Y_i^d}.$$

3. Регуляция цен, осуществляемая на шаге (iv), описывается следующими формулами:

$$P_i(t+1) = \max \left\{ \alpha(Y_i^d(t) - Y_i^s(t)) + P_i(t), 0 \right\} \quad (i = 1, 2.),$$

$$W(t+1) = \max \left\{ \gamma(L_{11}^d(t) - L_2^d(t) - L^s) + W(t), 0 \right\} \quad (i = 1, 2.),$$

где α и γ - положительные коэффициенты коррекции.

4. Ключевое понятие процесса нащупывания - избыточный спрос, равный разнице между спросом и предложением.

5. Вычислительный алгоритм представляет собой формализацию теории общего равновесия посредством градиентного метода Эрроу-Гурвица. Слабое место этого метода - медленная скорость сходимости. Одной из сложных проблем является подбор постоянных α , β и γ , определяющих скорость сходимости процесса. Числовые значения этих постоянных следует рассматривать как предельные значения.

6. Если производственная функция и функция полезности принадлежат к неоклассическому типу, процесс коррекции спроса приобретает некоторые особенности, суть которых можно свести к следующим трем процедурам.

- ◆ а) Процесс имеет равновесное решение, которое является решением задачи оптимального распределения ресурсов (оптимальным решением).
- ◆ б) Даже если процесс начинается с произвольной неотрицательной величины, он всегда сходится к одному и тому же равновесному решению (процесс устойчив в широких пределах).
- ◆ в) Все предприятия после того, как установлены цены равновесия, составляют планы производства, основанные на полном разделении труда (оптимальные с общественной точки зрения).

1.3.3. Двухсекторная модель

В теории экономического роста, анализе внешней торговли и финансов, а также и во многих других областях часто используют одну из разновидностей модели общего равновесия - *двухсекторную* модель. Она отличается от предыдущей модели тем, что:

- а) в нее введены два вида факторов производства (капитал и труд);
- б) каждое предприятие рассматривается как отдельная отрасль;
- в) их производственные функции удовлетворяют предположению о постоянстве отдачи на единицу масштаба производства³ (такие функции называют линейно однородными функциями).

◆ ³Если взамен предположения о постоянной отдаче на единицу масштаба производства принять допущение об убывающей отдаче (в случае производственной функции типа $Y = cK^aL^b$ это означает, что $a+b < 1$), то посредством небольшого преобразования модели Эрроу-Гурвица из предыдущего параграфа легко получить модель общего равновесия с двумя продуктами и двумя факторами производства.

◆ Попытаемся объяснить правило отдачи от изменения масштаба производства на примере с одним продуктом и двумя ресурсами. Производственная функция $Y = F(K, L)$ является однородной функцией порядка m от двух переменных, K и L . Это означает, что при изменении значений K и L в λ раз значение функции изменяется в λ^m раз, т. е.

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^m F(K, L).$$

Рассматриваемое правило можно записать следующим образом:

- убывающая отдача $m < 1$;
- постоянная отдача $m = 1$;
- возрастающая отдача $m > 1$.

Рассмотрим алгоритм, имитирующий работу двухсекторной модели и отражающую этот процесс. Описывая процесс регуляции рынка, вычисляем значение функции полезности, цены, отношение капитал/труд, избыточный спрос, а затем, для наглядности, можно графически изобразить движения избыточного спроса и цен. Каждая итерация состоит из трех описываемых ниже шагов. Предполагается, что потребители или домашние хозяйства предлагают весь находящийся в их распоряжении капитал и труд (объем предложения постоянен) и получают свою часть распределяемого дохода.

1. Каждая отрасль выбирает такое соотношение капитал/труд, которое позволяет ей максимизировать прибыль на единицу затраченного труда (в двухсекторной модели оно определяется в предположении о совершенной конкуренции, исходя из отношения факторных цен, масштабов спроса на факторы производства, объемов предложения продукции).

2. Потребитель или «общество» устанавливает размер своего спроса на продукты производства таким образом, чтобы максимизировать полезность, учитывая при этом бюджетное ограничение и условия распределения дохода.

3. Цены на продукцию, рассчитываемые на базе капитала, регулируются законом спроса и предложения. В качестве производственной функции возьмем функцию Кобба-Дугласа, а в качестве функции полезности - функцию, которая использовалась в предыдущем параграфе.

$$Y_i^s = F(K_i^d, L_i^d) = C_i (K_i^d)^{a_i} \cdot (L_i^d)^{1-a_i}, \quad (0 < a_i < 1), \quad (i = 1, 2);$$

$$U = U(Y_1^d, Y_2^d) = b_1 \ln Y_1^d + b_2 \ln Y_2^d.$$

Обозначения переменных:

Y_i^s - предложения i-го продукта;

Y_i^d - спрос на i-й продукт;

L^s - предложения труда;

k^s - предложение капитала;

L_i^d - спрос на труд со стороны i-й отрасли;

K_i^d - спрос на капитал со стороны i-й отрасли;

k_i - отношение: **капитал / труд для i-й отрасли** ($k_i = \frac{K_i^d}{L_i^d}$);

k - общее отношение: **капитал / труд** ($k = \frac{K^s}{L^s}$);

R - цена услуг капитала;

U - значение функции полезности;

P_i - цена i -го продукта;

W - заработная плата;

E_i^d - избыточный спрос на i -й продукт;

a_i, b_i, c_i - коэффициенты производственной функции и функции полезности;

α_i - корректирующий коэффициент цены i -го продукта.

Комментарии. 1. Исходя из предположения о постоянстве отдачи на единицу масштаба, производственную функцию F_i можно преобразовать в функцию выпуска на единицу затраченного труда (функцию производительности):

$$f_i(k_i) = F_i(k_i, 1)$$

Следовательно, в i -й отрасли чистая прибыль π_i на единицу труда

$$\pi_i = P_i f_i(k_i) - R k_i - W,$$

откуда выводится следующее условие максимизации прибыли:

$$f'_i(k_i) = R / P_i. \quad (*)$$

Если i -я отрасль осуществляет производство в ограниченных масштабах, то чистая прибыль равна нулю. Таким образом,

$$W = P_i (f_i(k_i) - k_i f'_i(k_i)). \quad (**)$$

Согласно формулам (*) и (**) получаем

$$\frac{W}{R} = \frac{f_i(k_i)}{f'_i(k_i)} - k_i, \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{f'_2(k_2)}{f'_1(k_1)}.$$

В случае производственной функции Кобба-Дугласа имеем

$$f_i(k_i) = c_i k_i^{a_i}, \quad f'_i(k_i) = c_i \cdot a_i k_i^{a_i-1}.$$

С учетом этого

$$\frac{W}{R} = \frac{1 - a_i}{a_i} \cdot k_i, \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{a_2^{a_2}}{a_1^{a_1}} \cdot \frac{(1 - a_2)^{1-a_2}}{(1 - a_1)^{1-a_1}} \cdot \left(\frac{W}{R} \right)^{a_2 - a_1},$$

и, следовательно,

$$\frac{W}{R} = \left(\frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{a_2^{a_2}}{a_1^{a_1}} \cdot \frac{(1 - a_2)^{1-a_2}}{(1 - a_1)^{1-a_1}} \right)^{\frac{1}{a_2 - a_1}}.$$

Объем предложения i -й отрасли можно выразить как

$$Y_i^s = L_i^d \cdot f_i(k_i) = c_i \cdot k_i^{a_j} \cdot L_i^d.$$

Условие равновесия спроса и предложения на рынках труда и капитала выражается уравнениями:

$$K_1^d + K_2^d = K^s, \quad L_1^d + L_2^d = L^s$$

или

$$k_1 L_1^d + k_2 L_2^d = K^s, \quad L_1^d + L_2^d = L^s.$$

Если учесть, что $k = K^s/L^s$, то согласно приведенным выше формулам

$$L_1^d = \frac{k_2 - k}{k_2 - k_1} \cdot L^s, \quad L_2^d = \frac{k - k_2}{k_2 - k_1} \cdot L^s.$$

Таким образом, задавая k_1 и k_2 , можно вычислить **размеры спроса на труд**, а по формуле

$$K_i^d = L_i^d k_i$$

подсчитать и размер спроса на капитал.

2. Потребитель устанавливает общественный спрос (Y_1^d, Y_2^d) , стремясь максимизировать полезность U с учетом бюджетного ограничения

$$I = P_1 Y_1^d + P_2 Y_2^d, \quad \text{где } I - \text{доход.} \quad (***)$$

Доход равен сумме вознаграждений, выплачиваемых за услуги факторов производства, и задается формулой

$$I = RK^s + WL^s. \quad (*****)$$

Если подставить (***) в функцию полезности, то получим

$$U = U(Y_1^d, Y_2^d) = b_1 \ln Y_1^d + b_2 \ln Y_2^d = b_1 \ln Y_1^d + b_2 \ln \left(\frac{1}{P_2} (I - P_1 Y_1^d) \right)$$

откуда, преобразуя (****) с учетом **условия максимизации полезности** $\partial U / \partial Y_i^d = 0$, имеем

$$Y_i^d = \frac{b_i}{b_1 + b_2} \cdot (RK^s + WL^s) \cdot \frac{1}{P_i}$$

3. Процедура преобразования цен по законам спроса и предложения описывается формулой

$$p_i(t+1) = \max \{ \alpha (E_i^d(t) + p_i(t)), 0 \} \quad (i = 1, 2.),$$

где $p_i(t) = P_i / R$, $E_i^d = Y_i^d - Y_i^s$.

3. Графически можно показать динамику: откладывать по вертикальной оси координат избыточный спрос на первый продукт, а по горизонтальной оси - его цену ($p_i(t)$, $E_i^d(t)$).

2. МАКРОЭКОНОМИКА

2.1. Основные понятия в макроэкономике

2.1.1. Основные понятия в макроэкономике

В начале, несколько упрощая, рассмотрим принцип эффективного спроса, принимая следующее положение, в соответствии с которым для достаточно коротких промежутков времени, на которых уровень производственных возможностей считается заданным, национальный доход (уровень выпуска) определяется факторами, лежащими на стороне спроса.

Совокупный *эффективный спрос* определяется как сумма потребления и инвестиций. Таким образом,

$$D = C + I. \quad (2.1.1)$$

Потребительский спрос можно представить в виде

$$C = cY + A \quad (0 < c < 1), \quad (2.1.2)$$

где C - спрос, является линейной функцией от национального дохода (совокупного выпуска), Y ; а c , A - константы⁴. Коэффициент c выражает пропорцию, в которой потребление возрастает при росте дохода Y , и называется *склонностью к потреблению*. A называют *базовым потреблением*. Формулу (2.1.2) называют *линейной функцией потребления*. Для определения инвестиций воспользуемся гипотезой независимого характера инвестиций, согласно которой уровень инвестиций определяется долгосрочными ожиданиями предприятий, в известной степени независимыми от уровня доходов.

Равновесный национальный доход Y_e , отвечающий условию равенства спроса и предложения,

$$D = Y, \quad (2.1.3)$$

определяется как решение уравнения

$$Y = cY + A + I, \quad (2.1.4)$$

откуда

$$Y_e = \left(\frac{1}{1-c} \right) \cdot (I + A). \quad (2.1.5)$$

Выражение $1/(1-c)$ показывает, насколько возрастет национальный доход при заданном росте инвестиций, и поэтому называется мультипликатором инвестиций или просто мультипликатором, являющимся одним из ключевых понятий кейнсианской концепции.

Этапы исследования:

1) определяют равновесный национальный доход с использованием прямой, соответствующей формуле (2.1.3), получают значения национального дохода и мультипликатора;

2) по заданному коэффициенту склонности к потреблению c построит в плоскости (D, Y) графики, соответствующие формулам (2.1.2), (2.1.3) и (2.1.4).

⁴ Напоминаем систему обозначений: C = Consumption (потребление), I = Investment (инвестиции, вложения капитала), D = Demand (спрос).

Список переменных:

c - склонность к потреблению;

Y - национальный доход;

D - совокупный спрос,

A - базисное потребление;

I - независимый объем инвестиций;

Y_e - равновесный национальный доход.

Комментарии. 1. Определение равновесного национального дохода с помощью графика называется геометрическим определением национального дохода на основе прямой с углом наклона 45° .

2. Точка равновесия и соответствующий ей равновесный национальный доход Y_e отражают такой уровень текущей хозяйственной активности, который в определенной степени удовлетворяет домашние хозяйства и предприятия, однако не совпадает с желательным уровнем, т. е. уровнем, при котором достигается полная занятость. Равновесный национальный доход Y_e всегда меньше той величины национального дохода Y_f при которой обеспечивается полная занятость. Поэтому цель государственной политики - достижение состояния $Y_e = Y_f$ путем увеличения инвестиций I^5 .

3. Процесс «изменение объема инвестиций $\rightarrow$ изменение величины дохода», действующий через посредство мультипликатора $1/(1 - c)$, называется также мультипликативным процессом. Предположим, что некое предприятие осуществляет новые инвестиции объемом ΔI в целях расширения производства. Осуществление инвестиций означает формирование основного капитала, включающего производственные помещения, машины и оборудование, и поэтому порождает увеличение доходов на сумму, равную ΔI (первичный эффект распространения). Если из этой суммы (ΔI) домашние хозяйства сумму $c \cdot \Delta I$ направляют на приобретение потребительских товаров, то доход дополнительно увеличивается на $c \cdot \Delta I$ (вторичный эффект распространения). Этот процесс продолжается до бесконечности и в итоге приводит к общему увеличению доходов на ΔY :

$$\Delta Y = \Delta I + c\Delta I + c^2\Delta I + c^3\Delta I + \dots = (1 + c + c^2 + c^3 + \dots)\Delta I = \left(\frac{1}{1 - c} \right) \Delta I.$$

Таким образом, получаем следующую формулу:

Увеличение дохода = Мультипликатор инвестиций $\times$ Рост инвестиций.

Замечание. В случае рассмотрения сокращения товарных запасов в качестве отрицательного прироста инвестиций мы приходим к той же формуле мультипликатора, даже если расходы на потребительские и инвестиционные товары покрываются за счет товарных запасов.

⁵ Это положение согласуется с концепцией Кейнса, из которой «теоретически» следует необходимость государственного вмешательства в экономику. Роль государственного сектора при капиталистическом хозяйствовании заключается не в получении максимальных прибылей, а в демпфировании возможных депрессивных явлений в экономике и поддержании эффективного спроса.

2.1.2. Макромодель роста

Теория определения национального дохода, несмотря на то, что главный фактор, от которого зависит уровень дохода - новый инвестиционный спрос со стороны капитала, - фактор динамический, рассматривалась исходя из предположения о постоянстве производственных мощностей, т. е. в краткосрочном аспекте. Теперь включим в анализ эффект увеличения производственных мощностей благодаря инвестициям и, сосредоточив внимание на процессе накопления капитала, приведем макромодель роста и проиллюстрируем ее работу.

К числу макромоделей роста относятся модель *Харрода-Домара* (Harrod-Domar model) с фиксированными коэффициентами производства и *неоклассическая* модель (neo-classical growth model), предполагающая переменные коэффициенты производства. В каждой из этих моделей производственная функция $Y = F(K, L)$, где Y - национальный доход, K - капитал, L - труд, характеризуется неизменным эффектом масштаба (такие функции называют линейно однородными*), а в качестве центральной переменной выступает соотношение *капитал/труд*:

$$x = K/L. \quad (2.1.6)$$

Прологарифмируем обе части (2.1.6), то получим

$$\ln x = \ln K - \ln L.$$

После чего, продифференцировав это выражение по t , приходим к следующему соотношению:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{L}}{L}, \quad (2.1.7)$$

(здесь и далее $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{K} = dK/dt$, $\dot{L} = dL/dt$).

Сначала, положив $y = Y/L$ и исходя из предположения о линейной однородности производственной функции, можем записать последнюю как $y = F(K/L, 1)$. Представив правую часть этого уравнения в виде $f(x)$, получим производственную функцию вида

$$y = f(x), \quad (2.1.8)$$

где $y = Y/L$ - производительность труда, $x = K/L$ - капиталовооруженность (фондовооруженность).

Теперь примем следующие допущения:

1. Для каждого отрезка времени доля непотребленной части национального дохода, т. е. норма накопления, $s = (Y - C)/Y$, является постоянной, и для каждого отрезка времени увеличение накопленного капитала равно новому инвестиционному спросу, предъявленному на данном отрезке времени, а именно

$$I = K. \quad (2.1.9)$$

2. Рост предложения труда является постоянной величиной, равной n , что формально может быть записано как

* В случае линейно однородных производственных функций для любого $\lambda > 0$ имеем $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$. Это положение будет существенно использовано далее.

$$\dot{L}/L=n, \quad (2.1.10)$$

другими словами, n - темп прироста труда.

Исходя из сделанных допущений, получим **основное уравнение роста** макроэкономики. С учетом допущения (2) уравнение (2.1.7) переписывается следующим образом:

$$\dot{x} = x \cdot \frac{\dot{K}}{K} - nx.$$

Поскольку составляющие национального дохода - потребление и накопление, т. е. $Y = C + I$, то, принимая во внимание (2.1.9),

имеем
$$x \cdot \frac{\dot{K}}{K} = x \cdot \frac{I}{K} = \frac{Y}{L} \cdot \frac{I}{Y} = sf(x)$$

откуда получаем
$$\dot{x} = sf(x) - nx. \quad (2.1.11)$$

Уравнение (2.1.11) можно переписать как

$$\Delta x = sf(x) - nx. \quad (2.1.11')$$

Полученное выражение есть не что иное, как динамическое (разностное) уравнение, задающее равновесную траекторию роста при полной занятости. Устойчивое равновесие достигается при $\Delta x = 0$. Обозначив точку постоянного равновесия как x^* , можно получить значение темпа прироста занятости

$$n = \frac{sf(x^*)}{x^*}$$

при котором достигается равновесие. Если начальная величина x не равна x^* , то по мере приближения x к x^* траектория роста стабилизируется, а по мере удаления от x^* становится неустойчивой.

Переменные:

x - отношение «капитал/труд»;

$\Delta x (=dx/dt)$ - темп изменения отношения «капитал/труд»;

s - норма накопления;

n - прирост предложения труда.

Этапы исследования:

На фазовой диаграмме строится кривая роста (2.1.11) для неоклассической функции производительности труда, обладающей следующими свойствами: $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = \infty$, иначе говоря, на координатную плоскость $(\Delta x, x)$ наносятся точки плоскости $(\Delta x, x)$.

Комментарии

1. По графику, построенному таким образом, получим неоклассическую модель роста, которая обладает свойством устойчивости. Тогда как, харродовская модель описывает нестабильную траекторию. Дело в том, что в этой модели производственная функция имеет вид

$$Y = \min\left(\frac{K}{k}, \frac{L}{l}\right) = \begin{cases} \frac{K}{k} \left(\frac{K}{L} < \frac{k}{l}\right) \\ \frac{L}{l} \left(\frac{K}{L} \geq \frac{k}{l}\right) \end{cases}$$

Здесь величины k и l - нормальный коэффициент капиталоемкости и нормальный коэффициент трудозатрат - параметры, которые однозначно задаются технологией:

объемами основного капитала и труда, необходимыми для эффективного производства единицы продукции. Динамическая траектория роста для модели Харрода - Домара может быть построена путем внесения незначительных модификаций (потребуется изменить определение функции)

2. В формуле вида (2.1.11) не учитывается технический прогресс. Поэтому по мере возрастания x происходит уменьшение нормы прибыли на вложенный капитал π , равной $f'(x)$.

2.1.3. Модель делового цикла

Хотя в долгосрочном плане экономика обнаруживает тенденцию к постоянному росту, ее развитие складывается из волн подъемов и спадов конъюнктуры. Закономерности, связанные с волнообразным характером экономической динамики, издавна привлекали внимание экономистов, в формулировке которых эта проблема предстает как проблема делового цикла (business cycle). Рассмотрим модель делового цикла, предложенную Самуэльсоном-Хиксом, в которой механизмы колебания конъюнктуры объясняются исходя из принципа акселерации и концепции мультипликатора, рассмотренных в параграфе 2.1.1.

Ядро принципа акселерации составляет положение о том, что масштабы инвестирования зависят от прироста или темпов изменения спроса на конечную продукцию. Порождаемый последним, инвестиционный спрос кратен спросу на конечную продукцию. Степень его кратности называют фактором акселерации. В модели Самуэльсона-Хикса уравнение инвестиций, основанное на принципе акселерации при факторе акселерации, равном v , записывается так:

$$I(t) = v (Y(t - 1) - Y(t - 2)). \quad (2.1.12)$$

Закономерности в сфере потребительских расходов выразим в виде функции потребления из параграфа 2.1.1, введя в нее временной шаг продолжительностью в 1 период:

$$C(t) = aY(t - 1) + b. \quad (2.1.13)$$

В формулах (2.1.12) и (2.1.13) $v > 0$, $1 > a > 0$, $b > 0$.

Из условия равновесия спроса и предложения

$$Y(t) = C(t) + I(t) \quad (2.1.14)$$

получим динамическое уравнение

$$Y(t) = (a + v) Y(t - 1) - vY(t - 2) + b. \quad (2.1.15)$$

Список переменных:

a - склонность к потреблению;

b - базовое потребление;

v - фактор акселерации, или коэффициент инвестиций;

Исследование можно проводить в двух направлениях:

1) в зависимости от значения коэффициента склонности к потреблению (a) и базового уровня потребительских расходов (b), значение фактора акселерации (v) строят график динамики национального дохода ($Y(t)$) в соответствии с уравнением (2.1.15);

2) осуществляем действия, аналогичные перечисленным выше, но с учетом того, что: а) национальный доход рассчитывается в двух вариантах, определяемых формулами (2.1.14) и (2.1.15), и б) в анализ вводится переменная государственного потребления $G(t)$:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t), \quad (2.1.14')$$

$$Y(t) = (a + v)Y(t - 1) - vY(t - 2) + b + G(t), \quad (2.1.15')$$

где $G(t) = (1 + R)G(t - 1)$; R - константа, равная темпу роста государственного потребления.

Комментарии

1. Главное соотношение рассматриваемой модели делового цикла, которое основывается на принципе акселерации, выражается формулой (2.1.12). По Хиксу, смысл этой формулы состоит в том, что новые инвестиции являются результатом изменений выпуска, имевших место в период $t - 1$. Эти инвестиции планируются в период $t - 1$, но из-за наличия временного лага в действительности осуществляются в период t .

2. Особенности динамического уравнения (2.1.15) с очевидностью вытекают из способа решения квадратного уравнения, однако если обратить внимание на коэффициент предельной склонности к сбережениям $s = (1 - a)$ и фактор акселерации, то обнаружим, что существуют четыре вида динамики:

Значения v:	Вид динамики
$0 \div (1 - \sqrt{s})^2$	Затухающий, колебания отсутствуют
$(1 - \sqrt{s})^2 \div 1$	Затухающий, колебания присутствуют
$1 \div (1 + \sqrt{s})^2$	Растущий, колебания присутствуют
$(1 + \sqrt{s})^2 \div \infty$	Растущий, колебания отсутствуют

Равновесное решение $Y(t) = Y(t - 1) = Y^*$ для (2.1.15) задается как

$$Y^* = b/(1 - a).$$

Если положить $y(t) = Y(t) - Y^*$, то (2.1.15) может быть преобразовано в

$$y(t) = ay(t - 1) + v(y(t - 1) - y(t - 2)). \quad (2.1.16)$$

Если λ_1 и λ_2 - корни характеристического уравнения (2.1.16), т. е.

$$f(\lambda) = \lambda^2(v - s + 1)\lambda + v = 0, \quad \text{где } s = 1 - a, \quad (2.1.17)$$

то решение уравнения (2.1.16) можно выразить так:

$$Y(t) = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t.$$

С учетом знаков и абсолютных значений решений квадратного уравнения (2.1.17) мы получим четыре вида динамики, приведенные в таблице выше.

2.2. Эконометрические модели в макроэкономике

Основные проблемы эконометрического моделирования возникают при построении модели и ее анализе. Разобьем весь процесс моделирования на шесть основных этапов:

- ◆ *постановочный* - определение конечных целей моделирования, набора участвующих в модели факторов и показателей, их роли;
- ◆ *априорный* - предмодельный анализ экономической сущности изучаемого явления, формирование и формализация априорной информации, в частности, относящейся к природе и генезису исходных статистических данных и случайных остаточных составляющих;
- ◆ *параметризация* - собственно моделирование, т. е. выбор общего вида модели, в том числе состава и формы входящих в нее связей;
- ◆ *информационный* - сбор необходимой статистической информации, т.е. регистрация значений участвующих в модели факторов и показателей на различных временных или пространственных тактах функционирования изучаемого явления;
- ◆ *идентификация модели* - статистический анализ модели, статистическое оценивание неизвестных параметров модели;
- ◆ *верификация модели* - сопоставление реальных и модельных данных, проверка адекватности модели, оценка точности модельных данных.

2.2.0. Введение в линейный регрессионный анализ

1. Простейший случай.

Для оценки параметров модели часто используют *методы регрессионного анализа*, самый популярный из которых - *метод наименьших квадратов*.

Модель вида

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon, \quad (2.2.1)$$

приведенную к линейной форме путем соответствующего преобразования переменных, называют *линейной регрессионной моделью*. Переменная величина X называется *объясняющей (независимой)* переменной, переменная Y - *объясняемой (зависимой)* переменной. ε - член ошибки (остаток), равный разнице между фактическими значениями и значениями модели (случайная, ненаблюдаемая переменная). Регрессионным анализом называют систему методов оценки параметров - коэффициентов α , β - на основе имеющихся наблюдаемых значений (X, Y) . Модель линейной регрессии, описывающая зависимость между наблюдаемыми значениями (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, в выборке, состоящей из n наблюдений, представляется в виде

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.2.2)$$

Методом наименьших квадратов называют процедуру поиска таких значений параметров (α, β) , которые при подстановке n пар значений переменных в формулу (2.2.2) минимизируют сумму квадратов регрессионных остатков ε_i :

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - (\alpha + \beta \cdot X_i))^2.$$

α и β определяется следующим показом:

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \alpha = \bar{y} - \beta \cdot \bar{x},$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ - средние значения переменных.

Точку на прямой регрессии, полученной по методу наименьших квадратов, которая соответствует фактическому значению объясняющей переменной X_i

$$\hat{Y}_i = \alpha + \beta \cdot X_i,$$

называют расчетным или теоретическим значением Y_i соответствующим X_i . Разность фактического и расчетного значения

$$\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\alpha + \beta \cdot X_i)$$

есть остаток (наименьших квадратов). Остаток является не чем иным, как расчетным значением случайной ошибки, не поддающейся наблюдению.

В качестве меры адекватности регрессионной модели часто используют *коэффициент детерминации*. Последний задается формулой

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

Положительное значение квадратного корня из коэффициента детерминации называется *коэффициентом корреляции*. Чем больше значение R^2 , тем выше степень адекватности уравнения регрессии.

Замечание. У показателя R^2 есть недостаток, состоящий в том, что большие значения коэффициента могут достигаться благодаря малому числу наблюдений. Мерой адекватности модели, призванной исправить этот недостаток, является *скорректированный коэффициент детерминации*, который для случая с одной объясняющей переменной задается формулой

$$R^{*2} = 1 - \frac{n-1}{n-(1+1)} \cdot (1 - R^2).$$

2. Общий случай (Для моделей с несколькими объясняющими переменными).

Пусть $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im})$, $i = 1, 2, \dots, n$ - вектор наблюдаемых значений m объясняющих переменных, $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im}$; $(Y_i, Y_2, \dots, Y_n)$ - вектор наблюдаемых значений объясняемой переменной Y ; тогда общая линейная регрессионная модель может быть представлена в стандартном виде так:

$$Y_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_m X_{im}; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2.2')$$

полагаем $X_{i1} = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, т. е. β_1 - свободный член. Оценкой наименьших квадратов является такой вектор параметров $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, который минимизирует сумму квадратов регрессионных остатков

$$Q = \sum_{i=1}^n [Y_i - (\beta_1 \cdot X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_m X_{im})]^2.$$

Модель регрессии записывается более компактно в векторно-матричной форме. Итак, определим векторы Y , B , ε и матрицу X следующим образом:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nm} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Тогда вид модели записывается

$$Y = BX + \varepsilon, \quad (2.2.3)$$

а

$$Q = \varepsilon' \cdot \varepsilon = (Y - XB)' (Y - XB).$$

Оценка метода наименьших квадратов для

$$B = (X'X)^{-1} X'Y,$$

где $(X'X)^{-1}$ - матрица, обратная матрице $X'X$, которая должна существовать.

Исходная формула для коэффициента детерминации остается прежней, а скорректированный коэффициент детерминации имеет следующий вид:

$$R^{*2} = 1 - \frac{n-1}{n-(m+1)} \cdot (1 - R^2).$$

Оценка меры автокорреляции случайной величины ε_i , как правило, производится с помощью статистической величины, называемой коэффициентом Дарбина-Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}.$$

Замечание. При значении DW , близком к 2, говорят, что автокорреляция отсутствует.

2.2.2. Оценка функции потребления

Рассмотрим применение метода наименьших квадратов для оценки параметров функции потребления, основываясь на временных рядах величин доходов и потребительских доходов.

Пусть C - реальные потребительские расходы домашних хозяйств; C_{-1} - реальные потребительские расходы домашних хозяйств за предыдущий период времени; YD - располагаемый доход домашних хозяйств; PC - дефлятор потребительских расходов домашних хозяйств.

В качестве конкретной функции потребления возьмем

$$C = a_0 + a_1 (YD/PC) + a_2 C_{-1}. \quad (2.2.4)$$

Рассмотрим последовательность вычисления оценок по методу наименьших квадратов для трех параметров a_0 , a_1 , a_2 , рассматривая в качестве выборочной совокупности базовый временной интервал (поквартальные, помесечные, годовые статистические данные).

1. Стандартная программа линейного регрессионного анализа реализует следующие действия⁶:

- (i) считывание числа наблюдений в выборке, n , и числа оцениваемых параметров, m ;
- (ii) считывание исходных данных;
- (iii) приведение исходных данных к виду, необходимому для осуществления регрессионного анализа (преобразование переменных);
- (iv) вычисление элементов матрицы $X'X$ и вектора $X'Y$;
- (v) вычисление матрицы $(X'X)^{-1}$, обратной $X'X$;
- (vi) оценивание результатов по методу наименьших квадратов и вывод их на дисплей (вычисление и вывод вектора $B = (X'X)^{-1} X'Y$, статистических величин).

2. Из массивов $Y_{[n]}$ и $X_{[n,m]}$ в программу вводят исходные данные - вектор и матрицу:

Временной ряд
потребительских
расходов. Значение
 Y_0 соответствует
первому времен-
ному интервалу (1
кварталу).

Временной ряд
располагаемого
дохода(YD)

Временной ряд
дефлятора
потребительских
расходов(PC)

$$Y = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} X(0,1) & X(0,2) \\ X(1,1) & X(1,2) \\ \vdots & \vdots \\ X(n,1) & X(n,2) \end{bmatrix}$$

$X =$	1 . . . 1	Временной ряд дефлятируемого располагаемого дохода YD/PC	Временной ряд предшествующего Потребления C_{-1}
-------	-----------------------	---	--

$$X(I,1) \Leftrightarrow 1 \quad X(I,1)/X(I,2) \Leftrightarrow X(I,2) \quad Y(I-1) \Leftrightarrow X(I,3)$$

(константа)

Замечания. 1. Обратите внимание на способ получения обратной матрицы, что является основным моментом в вычислительной части процедуры линейно регрессионного анализа. Между тем

⁶ Например, можно использовать программу из приложения Exel или программу А.П.Михайлова Stat.

даже при заданной точности компьютерных расчетов результаты часто не совпадают, что связано с использованием различных программ вычисления обратной матрицы.

Расхождения в результатах при вычислении обратной матрицы к матрице $X'X$ могут возникнуть по причине утери последнего разряда или ошибки в округлении. В случае, когда различия в величинах между элементами матрицы $X'X$ малы, особых проблем не возникает, но когда элементы этой матрицы имеют существенно разный порядок, могут получаться весьма несхожие результаты. Существуют следующие методы вычисления обратной матрицы:

- 1) исключение по методу Гаусса-Жордана,
- 2) частичный метод исключения с выбором ведущего элемента матрицы,
- 3) обобщенный метод исключения с выбором ведущего элемента матрицы,
- 4) метод Пауэла (итеративная аппроксимация). Методы (2) и (3) подходят для использования в регрессионном анализе.

2. Приступая к проведению регрессионного анализа, предполагают, что выполнен целый ряд гипотез относительно распределения случайной ошибки ε в том числе:

- ◆ математическое ожидание случайной ошибки равно нулю;
 - ◆ дисперсия случайной ошибки - постоянная;
 - ◆ асинхронная корреляция между величинами случайных ошибок отсутствует;
 - ◆ X - заданная неслучайная переменная.
- ◆ Обычная экономическая модель вряд ли может полностью удовлетворять этим гипотезам, тем более всем сразу. Поэтому регрессионный анализ представляет собой лишь один из возможных подходов к решению той или иной проблемы, часто помогающий найти хороший отправной пункт для дальнейшего исследования.

2.2.2. Оценка производственной функции Кобба-Дугласа

Простейшие методы линеаризации

В процессе построения модели функции потребления речь шла о линейной регрессионной модели, однако, нередко связь между экономическими переменными нелинейная. Рассмотрим некоторые методы сведения нелинейной модели к линейной, или ее линеаризации. Сделаем это на примере построения макроэкономических производственных функций.

Предположим, что для некоторой модели линейная спецификация не дала приемлемых результатов, и из анализа различных статистик и графиков установили, что связь переменных - нелинейна. Это означает, что нужно оценить уравнение нелинейной регрессии. Для оценки нелинейной регрессии существуют различные пути. Существуют методы и алгоритмы оценивания нелинейных зависимостей: предложенная из априорных соображений формула оценивается, например, методом наименьших квадратов. Здесь эти методы рассматривать не будем.

Пусть, например, требуется оценить параметры производственной функции Кобба-Дугласа

$$Y = aK^{\alpha}L^{\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (2.2.5)$$

Значения параметров a , α , β можно оценить с помощью линейного регрессионного анализа по методу наименьших квадратов. Хотя выражение (2.2.5) непосредственно и не представляет собой линейную функцию от a , α , β , если для линеаризации прологарифмировать обе его части по натуральному основанию, получим линейное уравнение относительно $\ln a$, α , β :

$$\ln Y = \ln a + \alpha \ln K + \beta \ln L.$$

Полученная формула линейна относительно логарифмов выпуска Y , капитала K и труда L , и она может быть оценена как множественная линейная регрессия.

Замечание1. Обычно предполагают, что имеет место неизменный эффект масштаба т.е. $\alpha+\beta \approx 1$. Тогда функцией Кобба-Дугласа называют функцию вида

$$Y = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2.2.6)$$

Эта функция, несмотря на наличие ряда недостатков, и поныне является своего рода «чемпионом» среди производственных функций. Естественно, что со времени появления на свет функция Кобба-Дугласа претерпела ряд модификаций, важнейшей из которых было введение в нее элемента (в качестве экзогенного фактора), призванного отразить технический прогресс. Если темп технического прогресса обозначить как λ (константа), то функция Кобба-Дугласа для случая нейтрального технического прогресса примет вид

$$Y = a \cdot \ell^{\lambda t} K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \quad (2.2.7)$$

При $\lambda = 0$, как легко можно убедиться, мы приходим к стандартной функции Кобба-Дугласа (2.2.6).

Замечание2. Нужно иметь в виду, что если с формулой связи делаются какие-то преобразования, то меняются свойства ошибок ϵ_i . Если для них предполагалось нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, то после, например, логарифмирования правой части оно уже таким не будет. Это серьезная проблема, изучаемая эконометрикой. Мы на ней останавливаться не будем, отметив ее наличие. Для простоты будем считать, что (там, где это возможно) отклонения ϵ_i обладают нужными свойствами именно у итоговой, линеаризованной зависимости.

Комментарии

1. Если нужно оценить производственную функцию Кобба-Дугласа с $\alpha+\beta=1$, то делается следующее преобразование:

$$Y = aK^{\alpha}L^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{Y}{L} = a\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \Rightarrow \ln\left(\frac{Y}{L}\right) = \ln a + \alpha \ln\left(\frac{K}{L}\right)$$

Далее оценивается парная линейная регрессия логарифма производительности труда (Y/L) от логарифма капиталовооруженности (K/L).

2. Если зависимость оценивается по данным временных рядов, то часть тренда зависимой переменной может объясниться действовавшими во времени факторами, которые в совокупности могут учитываться просто включением в уравнение некоторой зависимости от времени. Такая зависимость может быть, например, линейной или экспоненциальной (изменение с постоянным темпом). В частности, производственная функция Кобба-Дугласа может учитывать нейтральный технический прогресс. Формула (2.2.7), в которой учтен технический прогресс, может быть преобразована к виду

3.

$$Y = a \cdot \ell^{\lambda t} K^{\alpha} L^{1-\alpha} \Rightarrow \ln\left(\frac{Y}{L}\right) = \ln a + \alpha \ln\left(\frac{K}{L}\right) + \lambda t.$$

2.2.3. Оценка функции CES по нелинейному методу наименьших квадратов

Рассмотрим *неоклассическую* производственную с постоянной эластичностью замещения CES (Constant Elasticity of Substitution). С учетом технического прогресса эта функция в общем виде записывается как

$$Y = a e^{\lambda t} [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} \quad (2.2.8)$$

Функция CES аналогична функции Кобба-Дугласа в том, что касается допущения о постоянном убывании предельной нормы замещения инвестируемых ресурсов; однако между этими функциями есть и существенные различия.

Основные из них:

♦ эластичность замещения, являющаяся мерой возможности замены капитала трудом и наоборот, в функции Кобба-Дугласа всегда равна единице. В функции CES она может принимать любые значения: для линейно однородной производственной функции $Y = F(K, L)$ эластичность замещения σ определяется как

$$\sigma = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{\partial F}{\partial K} \right)}{\left(F \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} \right)}. \quad (2.2.9)$$

Для функции Кобба-Дугласа $\sigma = 1$, а для функции CES $\sigma = 1/(1 + \rho)$. Таким образом, в функции CES $\sigma \neq 1$, хотя, так же как и в функции Кобба-Дугласа, является постоянной. Это кажется вполне естественным, ибо следует из самого названия функции, говорящего о постоянстве эластичности. При $\rho \rightarrow 0$ $\sigma \rightarrow 1$ т. е. мы переходим к функции Кобба-Дугласа; поэтому можно сказать, что функция CES является более общим вариантом функции Кобба-Дугласа.

♦ Формула (2.2.8) даже после логарифмического преобразования остается нелинейной. Следовательно, непосредственное оценивание ее параметров предполагает решение задачи нелинейного программирования. Оценивание параметров с помощью нелинейного метода наименьших квадратов еще десять лет назад могло выполняться лишь немногими из специалистов, в то время как сегодня эта процедура с легкостью осуществляется на персональном компьютере.

Нелинейный метод наименьших квадратов

В тех случаях, когда уравнение регрессии не является линейным относительно оцениваемых параметров, используется нелинейный метод наименьших квадратов. Проблема заключается в следующем. Пусть Y - объясняемая переменная; $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ - набор ее наблюдений; $D_1, D_2, \dots, D_n$ - объясняющие переменные, i -е наблюдение за

которыми представляет собой вектор $(D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{in})$. Необходимо объясняемую переменную Y выразить через $D_1, D_2, \dots, D_k$, посредством функции f , вид которой известен, однако неизвестны некоторые ее параметры $x_1, x_2, \dots, x_n$. Другими словами,

$$Y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, D_{i1}, \dots, D_{ik}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

где ε_i - отклонения. Предыдущее выражение можно изобразить более компактно, как $Y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon_i$, оставив лишь те параметры, которые будем искать по методу наименьших квадратов, т. е. минимизируя

$$Q = \varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_m^2 = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2$$

Замечание. К числу методов итеративной минимизации целевой функции Q относятся: метод Марквардта, являющийся модификацией метода Ньютона-Гаусса, флетчеровский вариант метода Марквардта, пауэловская версия метода наименьших квадратов, метод Хайбрета и др.

Рассмотрим метод Марквардта. Пусть x, f, ε, Y - векторы:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}.$$

Нужно найти x^* такое, что при $\varepsilon = Y - f$ целевая функция (сумма квадратов остатков), $Q = \varepsilon' \varepsilon$, минимизируется. Приближенное значение x_t , получаемое на t -м шаге итеративного процесса, и последующее приближенное значение x_{t+1} , связаны между собой вектором поправки Δx : $x_{t+1} = x_t + \Delta x$.

Формула вектора поправки Δx согласно условию минимизации выводится из решения Системы линейных уравнений $(A' A) \Delta x = (-A' \varepsilon)$ (*) откуда $\Delta x = -(A' A)^{-1} (-A' \varepsilon)$.

Здесь A - первая частная производная ε , т. е. матрица Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_i} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_1}$$

Эта формула есть основная формула итерации по методу Ньютона-Гаусса. При использовании метода Ньютона-Гаусса, если степень нелинейности $f(x)$ высока, а стартовое значение x_0 далеко отстоит от минимизирующего значения, велика вероятность и «раскачки» Δx , и расходимости итеративного процесса.

Исторически самым первым методом минимизации функций многих переменных является метод *градиентного спуска*. Суть этого метода состоит в выборе вектора направления движения - вектора-антиградиента $d = -\nabla Q$, где

$$\nabla Q = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2A'\varepsilon.$$

Однако, поскольку выбор направления градиентного спуска может оказаться далеким от оптимального, Δx часто обнаруживает плохую сходимость. Левенберг и Марквардт, добавив неотрицательный член к диагональным элементам матрицы коэффициентов уравнения (*) в процедуре Ньютона-Гаусса, предложили искать корректирующий вектор Δx из уравнения

$$(A'A + \nu^2 I) \Delta x = -A' \varepsilon, \quad (2.2.10)$$

надеясь тем самым преодолеть недостатки, присущие методам Ньютона-Гаусса и градиентного спуска. Здесь I - единичная матрица размера $(n \times n)$; а ν - некоторая (может быть равная нулю) величина, называемая числом Марквардта. Следовательно,

$$\Delta x = -(A'A + \nu^2 I)^{-1} A' \varepsilon.$$

И при $\nu = 0$ мы приходим к методу Ньютона-Гаусса, а при достаточно большом ν получаем вектор градиентного спуска $\Delta x = -(\nu^2)^{-1} A' \varepsilon$. Итак, можно сказать, что данный метод совмещает в себе методы Ньютона-Гаусса и градиентного спуска. Его основная идея заключается в том, чтобы при высокой степени нелинейности, пока «расстояние» между итеративным и искомым решением значительно, использовать большие значения ν (метод градиентного спуска), а при приближении к искомому решению постоянно уменьшать значение ν , что позволяет достаточно быстро достичь желаемого минимума. Описанный метод называют *методом Марквардта*.

Для «настройки» числа ν Марквардтом был предложен следующий простой алгоритм:

- 1) принять $\nu = \sqrt{0,001}$ ($\nu^2 = 0,001$) за исходное значение;
- 2) на каждом шаге увеличивать ν в $\sqrt{10}$ раз (ν^2 в 10 раз) до тех пор, пока Q не начнет уменьшаться - локальная итерация;
- 3) увеличив значение ν в $\sqrt{0,1}$ раза (ν^2 в 0,1 раза), принять полученную величину за новое исходное значение - основная итерация (уменьшится при этом значение Q или нет, зависит от степени нелинейности).

В целях уменьшения погрешности вычислений рекомендуется использовать не исходную систему уравнений Марквардта (2.10), а эквивалентную ей:

$$(\tilde{A}' \tilde{A} + \vartheta^2 I) \Delta x = \tilde{A}' \tilde{\varepsilon},$$

$$\tilde{A} \equiv \begin{vmatrix} A \\ \vartheta I \end{vmatrix}, \quad \tilde{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{vmatrix}$$

Замечание. Различия между системами уравнений сводятся к созданию во втором случае:

а) расширенной матрицы Якоби $\tilde{A}$ путем присоединения к нижнему ряду Якоби $\tilde{A}$ матрицы $\mathbf{I}$ размера $(n \times n)$;

б) расширенного вектора регрессионных остатков $\tilde{\varepsilon}$, получаемого путем присоединения к исходному вектору регрессионных остатков ε нулевой компоненты длины n .

Для оценки параметров производственной функции CES по методу Марквардта функцию (2.2.8) нужно преобразовать после логарифмирования к виду

$$f_i = \ln Y_i = \ln a + \lambda \cdot (i - 1) + \frac{\sigma}{\sigma - 1} \ln(\delta K_i^{-\rho} + (1 - \delta)L_i^{-\rho}) + \varepsilon_i$$

($i = 1, 2, \dots, m$; $\rho = (1 - \sigma)/\sigma$).

Комментарии

1. Метод Марквардта позволяет найти лишь локальный минимум суммы квадратов регрессионных остатков: ответ на вопрос о том, является ли это значение глобальным минимумом, может быть получен лишь путем перебора ряда других начальных приближений (пока неизвестен алгоритм, позволяющий систематически обследовать минимизируемую сумму квадратов для случая, когда число параметров достаточно велико). Метод Марквардта особенно эффективен, когда начальное приближение довольно близко к искомому. Сравнительно хорошее начальное значение для оценки функции CES можно получить из аппроксимационного уравнения Кменты:

$$\tilde{f}_i = \ln Y_i = \ln a + \lambda \cdot (i - 1) + (1 - \delta) \ln K_i + \delta \ln L_i - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \delta (1 - \delta) + (\ln K_i - \ln L_i)^2 + \varepsilon_i,$$

представляющего собой функцию Кобба-Дугласа с добавлением квадратного члена.

2. Расчет матрицы Якоби ведется методом численного дифференцирования. При сильной нелинейности, вообще говоря, желательно использовать аналитические формулы для вычисления производных, не прибегая к аппроксимационным вычислениям в конечных разностях; однако опыт применительно к функции CES не дает оснований усматривать значительные различия между аппроксимацией в конечных разностях и аналитическим вычислением производных.

3. Вычисление Δx осуществляется с помощью стандартного метода обращения матрицы $(A' A + v^2 \mathbf{I})$.

В целом с точки зрения вычислительных операций желательно рассчитывать Δx или по методу Хаусхольда, или по методу декомпозиции сингулярных значений, тем не менее для типичных экономических задач обычно вполне достаточным оказывается применение рассмотренной методики. Более того, практика работы на персональных компьютерах показывает, что и с точки зрения скорости вычислений, и с точки зрения

точности в задачах данного типа лучше использовать обратную матрицу, чем метод Хаусхольда.

4. В качестве процедуры настройки параметров можно использовать методику, предложенную Марквардтом, что, однако, ни в коей мере не означает, что принятые значения коэффициентов уменьшения и увеличения чисел Марквардта, $\sqrt{0,001}$ и $\sqrt{10}$, являются оптимальными. Можно добиться более высокой скорости. В стандартной программе вычислений по методу наименьших квадратов компьютерного центра Токийского университета SALS реализована модификация метода Марквардта, предложенная Флетчером, в результате чего эта программа по своему классу оказывается «выше» требований, предъявляемых экономическими задачами, что в общем-то излишне.

5. Одна из проблем, возникающих при решении нелинейных уравнений методом последовательных приближений, - выбор правила остановки итеративного процесса, т. е. выбор критерия сходимости.

2.2.4. Макромодель Клейна

Одной из известных стандартных макроэконометрических моделей кейнсианского типа является так называемая модель Клейна, описанная Лоренсом Клейном в публикации 1950 г. В модели Клейна все теоретические связи представлены в линейной форме, и поэтому для оценки параметров модели может быть использован линейный метод наименьших квадратов. Модель состоит из трех структурных уравнений и трех тождеств.

♦ 1. Функция потребления:

$$C = \beta_{11} + \beta_{12}\Pi + \beta_{13}\Pi_{-1} + \beta_{14}(W^1 + W^2) + \varepsilon^1, \quad (2.2.1.1)$$

где C - потребление; Π - прибыль; Π_{-1} - прибыль за предшествующий период; W^1 - доходы от заработной платы в частном секторе; W^2 - доходы от заработной платы в государственном секторе; ε^1 - регрессионный остаток.

♦ 2. Функция инвестиций:

$$I = \beta_{21} + \beta_{22}\Pi + \beta_{23}\Pi_{-1} + \beta_{24}K_{-1} + \varepsilon^2, \quad (2.2.1.2)$$

где I - инвестиции; K - основной капитал на конец предшествующего периода.

♦ 3. Функция заработной платы в частном секторе:

$$W^1 = \beta_{31} + \beta_{32}(Y + T - W^2) + \beta_{33}(Y + T - W^2)_{-1} + \beta_{34}(t - 19..)K_{-1} + \varepsilon^3, \quad (2.2.1.3)$$

где Y - национальный доход; T - косвенные налоги; $(t - 19..)$ - индекс времени; 0 соответствует середине периода.

Тождества:

$$Y + T = C + I + G;$$

$$Y = W^1 + W^2 + \Pi;$$

$$\Delta K = (K - K_{-1}) = I,$$

где **G** - государственные расходы.

Комментарии

По своим функциональным возможностям модель Клейна относится к классу взаимозависимых эконометрических моделей, т. е. таких моделей, которые в правой части своих уравнений содержат зависимые переменные. Известно, что оценивание таких моделей обычным методом наименьших квадратов дает несостоятельные оценки. Более точные оценки параметров получаются при применении так называемых синхронных методов оценивания, например, двух- или трехшагового метода наименьших квадратов. Другая сложность - учет тождеств в задаче оценивания. Более подробно о проблемах оценивания параметров эконометрических моделей можно узнать из книги Дж. Джонстона "Эконометрические методы" -М.: Статистика, 1980.

3. АНАЛИЗ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ

3.1. Введение в анализ межотраслевых связей

3.1.1. Определение равновесного выпуска итеративным методом

Любое современное национальное хозяйство развивается в сложной сети межотраслевых взаимосвязей. Метод межотраслевого анализа (interindustry analysis), который еще называют анализом *затраты-выпуск* (input-output analysis или I/O analysis), разработанный американским экономистом В.В. Леонтьевым позволяет дать последовательный и численно определенный ответ на вопросы, связанные с межотраслевыми взаимодействиями и их влиянием на основные макроэкономические показатели.

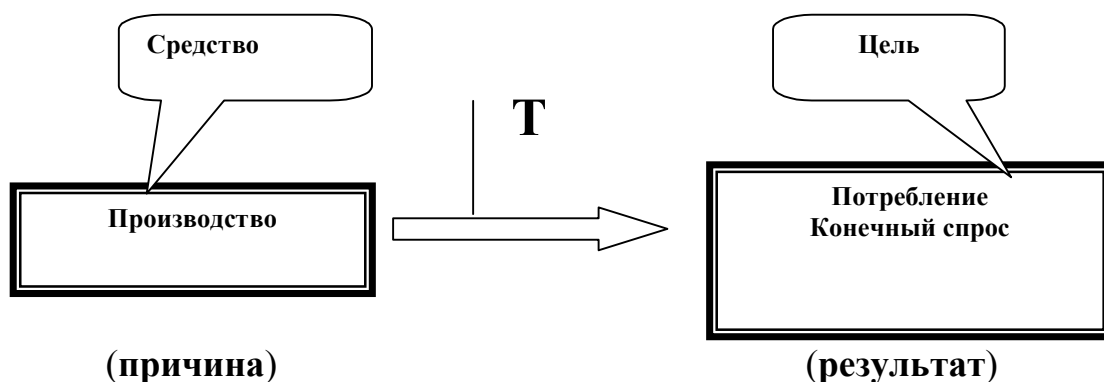


Рис. 3.1.1. Стандартная экономическая схема соподчинения цели и средства.

Здесь *средство* (цель низшего уровня) является независимой, *цель* (цель высшего уровня) -зависимой переменными. В межотраслевом анализе принято обратное отношение:

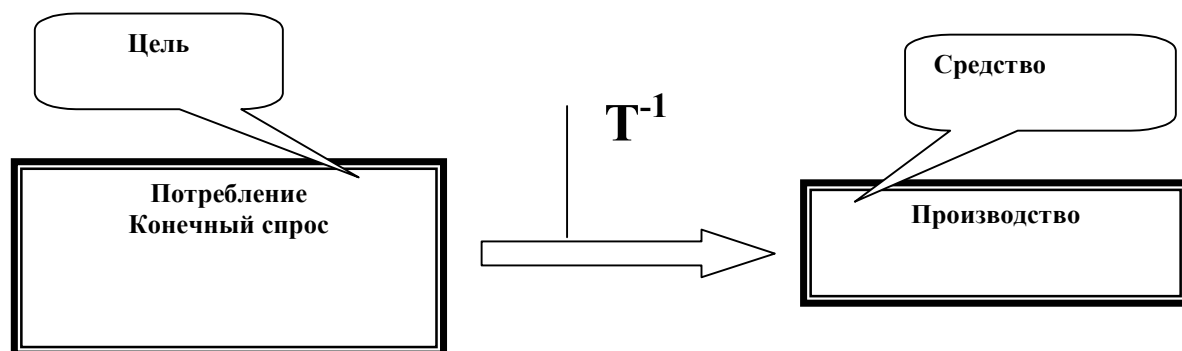


Рис. 3.1.2.

С точки зрения математики межотраслевой анализ может рассматриваться как особый случай решения системы уравнений. Осуществить межотраслевой анализ с помощью раз личных итеративных методов, имеющих конкретный экономический смысл.

Основные элементы, межотраслевых таблиц и межотраслевого анализа

Межотраслевой анализ базируется на использовании статистических таблиц, называемых «*межотраслевыми*», дающих картину народнохозяйственной динамики за определенный период (как правило, 1 год), содержание которой составляют связи между отраслями.

Структура таблицы межотраслевого баланса

О отрасли покупатели О отрасли продавцы Сектора предло - жения		О отрасли производства (сектора)					Конечный спрос	Объем выпуска		
							потребление инвестиций экспорт импорт (со знаком "- ") и т. д.			
		1	2	...	j	...	n			
О отрасли производства (сектора)	1	$\bar{X}_{11}$	$\bar{X}_{12}$	...	$\bar{X}_{1j}$	...	$\bar{X}_{1n}$	$\bar{F}_1$	$\bar{X}_1$	
	2	$\bar{X}_{21}$	$\bar{X}_{22}$	...	$\bar{X}_{2j}$	...	$\bar{X}_{2n}$	$\bar{F}_2$	$\bar{X}_2$	
	.									
	.									
	.									
О отрасли производства (сектора)	i	$\bar{X}_{i1}$	$\bar{X}_{i2}$	Структура распределения выпуска	$\bar{X}_{in}$	Промежуточный спрос	$\bar{F}_i$	Конечный спрос	$\bar{X}_i$	
	.	.	.						.	.
	.	.	.						.	.
	.	.	.						.	.
	n	$\bar{X}_{n1}$	$\bar{X}_{n2}$						затраты про- межуточных продуктов	$\bar{X}_{nn}$
Добавленная стоимост	Доход занятых по найму, предпр. прибыль, аморт. отчисл., косвен. налоги ...	$\bar{V}_1$ $\bar{V}_2$		Фактические затраты	$\bar{V}_j$ $\bar{V}_n$					
Объем выпуска		$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	...	$\bar{X}_i$	...	$\bar{X}_n$			

Строки приведенной таблицы показывают распределение выпуска (output) каждого вида продукции. Каждая строка характеризуется следующим балансом:

Выпуск данного вида продукции	=	Промежуточный спрос	+	Конечный спрос
-------------------------------	---	---------------------	---	----------------

что математически может быть записано как

$$\bar{X}_i = (\bar{X}_{i1} + \bar{X}_{i2} + \dots + \bar{X}_{ij} + \dots + \bar{X}_{in}) + \bar{F}_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1.1)$$

Промежуточный спрос есть часть общего спроса, представляющая собой закупки данного вида продукции отраслями 1, 2, 3 и т.д. в качестве исходных материалов, т. е. в качестве промежуточных продуктов. Напротив, конечный спрос есть часть спроса, представляющая закупки конечных продуктов - потребительских или инвестиционных.

Столбцы таблицы показывают структуру затрат (input), или структуру используемых ресурсов, необходимых для каждой отрасли. Для столбцов устанавливается следующий баланс:

Расходы отрасли	=	Промежуточные затраты	+	Добавленная стоимость
-----------------	---	-----------------------	---	-----------------------

что математически может быть записано как

$$\bar{X}_j = (\bar{X}_{1j} + \bar{X}_{2j} + \dots + \bar{X}_{ij} + \dots + \bar{X}_{nj}) + \bar{V}_j \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1.2)$$

Промежуточные затраты представляют собой исходные материалы, закупленные отраслью у секторов 1, 2, 3 и т.д. Добавленная стоимость есть факторные затраты отрасли, т. е. вновь созданная стоимость, распадающаяся на доход работающих по найму (заработную плату) и предпринимательский доход (прибыль).

Для строк и столбцов таблицы межотраслевого баланса имеют место следующие тождества:

Выпуск отрасли = Расходы отрасли

Общая сумма конечного спроса = Общая сумма добавленной стоимости

Эти тождества математически записываются так:

$$\bar{X}_i = \sum_{j=1}^n \bar{X}_{ij} + \bar{F}_i = \sum_{j=1}^n \bar{X}_{ji} + \bar{V}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (3.1.3)$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \sum_{i=1}^n \bar{V}_i.$$

Таблица межотраслевого баланса позволяет изучать структуру потоков ресурсов, однако для понимания функционирования экономики, в частности эффекта распространения (мультипликации), нужно сделать еще один шаг, заключающийся в построении таблиц *коэффициентов прямых затрат* и *коэффициентов полных затрат*.

Коэффициент прямых затрат определяется как объем ресурса i , необходимый для производства единицы продукта j , т. е.

$$a_{ij} = \frac{\bar{X}_{ij}}{\bar{X}_j} \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1.4)$$

После подстановки $\bar{X}_{ij} = a_{ij} \bar{X}_j$ в (3.1.1) получаем

$$\bar{X}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{X}_j + \bar{F}_i \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1.5)$$

что решает центральный вопрос межотраслевого анализа - как изменится объем выпуска отрасли $\bar{X}_i$, если при фиксированном коэффициенте прямых затрат a_{ij} , значение $\bar{F}_i$, изменится на ΔF_i т. е. $F = \bar{F}_i + \Delta F_i$. Иными словами, для каждой отрасли допускается существование производственной функции с неизменным эффектом масштаба (затраты прямо пропорциональны выпуску) и с отсутствием взаимозаменяемости ресурсов (соотношение затрат ресурсов фиксировано и не зависит от уровня выпуска).

Производственные функции записываются следующим образом:

$$X_j = \min_j \left(\frac{X_{1j}}{a_{1j}}, \frac{X_{2j}}{a_{2j}}, \dots, \frac{X_{ij}}{a_{ij}}, \dots, \frac{X_{nj}}{a_{nj}} \right) \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

(В этом выражении учитываются только затраты и только промежуточных продуктов, затраты факторов опущены.) Теперь решим систему линейных уравнений

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + F_i; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Или в матричном представлении:

$$X = AX + F, \quad (3.1.6)$$

Где

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{bmatrix}.$$

Полученная формула есть не что иное, как леонтьевская модель межотраслевого баланса.

Матрица коэффициентов прямых затрат A соответствует таблице этих коэффициентов, и если неотрицательная квадратная матрица A является *продуктивной* (productive), то для любого положительного вектора конечного спроса F векторное уравнение (3.1.6) имеет положительное решение, равное

$$X = (I - A)^{-1} F$$

Замечание. Неотрицательная матрица $A \geq 0$ называется *продуктивной*, если существует хотя бы один вектор $X > 0$, такой, что $X > AX$ или в преобразованном виде

$$(I - A) X > 0.$$

Экономический смысл этого определения состоит в следующем: неотрицательная матрица $A \geq 0$ продуктивна, если существует такой положительный вектор-столбец объемов производства отраслей $X > 0$, что каждая отрасль может произвести некоторое количество $Y > 0$ конечной продукции.

Здесь I - единичная матрица размерности n . Матрица $B = (I - A)^{-1}$ называется *обратной матрицей Леонтьева* или, по аналогии с кейнсианской концепцией мультипликатора, *матричным мультипликатором*, или *мультипликатором Леонтьева*. Обратная матрица Леонтьева B есть, собственно, матрица коэффициентов полных затрат. Экономический смысл ее элементов b_{ij} заключается в следующем: коэффициент b_{ij} показывает потребность в валовом выпуске продукции отрасли i для производства единицы конечной продукции отрасли j . Таким образом, b_{ij} в сущности есть мультипликатор, показывающий эффект распространения спроса, первоначальным источником которого является спрос на конечную продукцию.

Так же, как и в макроэкономическом анализе, можно доказать, что

$$I + A + A^2 + \dots + A^k + \dots = (I - A)^{-1}.$$

Откуда

$$X = (I + A + A^2 + \dots + A^k + \dots) F = (I - A)^{-1} F,$$

причем AF есть результат первичного эффекта распространения, $A^2 F$ - вторичного и т.д. Из предыдущего соотношения следует, что решение (3.1.6) можно получить итерационно (по методу Якоби):

$$X^{(k+1)} = AX^{(k)} + F \quad (3.1.7)$$

Подставив в (3.1.7) в качестве исходного итеративного значения $X^0 = F$, мы рассчитаем эффект мультипликации, порождаемый конечным спросом; задавая другие

исходные неотрицательные значения, сможем оценить полученные результаты с экономической точки зрения.

Обозначения:

n - число секторов экономики;

a_{ij} - элементы матрицы коэффициентов прямых затрат;

F_i - конечным спрос;

$X_i^{(k)}$ - итерационное решение k -го порядка;

$X_i^{(k+1)}$ - итерационное решение $k + 1$ порядка;

d -общая сумма абсолютных значений отклонений;

k -счетчик итераций;

$T = \sum_{i,j} a_{ij} X_i^{(k)}$ - общий промежуточный спрос;

$F = \sum_j F_j$ - общий конечный спрос;

$U = \sum_i X_i^{(k)}$ - общий выпуск;

$Z = F/(U - T)$ - мультипликатор в условиях макроравновесия.

Комментарии

1. Использование в межотраслевом анализе итеративных методов имеет следующие преимущества:

- ♦ а) они удобны для расчета эффекта мультипликации;
- ♦ б) не предполагают алгебраических знаний, необходимых для исчисления обратных матриц;
- ♦ в) их можно рассматривать как модель механизма «настройки» нестоимостных параметров экономики даже безотносительно к межотраслевому анализу.

Метод Якоби (3.1.7) и его модификация - метод Гаусса-Зейделя - достаточно хорошо известны в качестве вычислительных процедур, в то время как метод пошагового агрегирования, исследованный в свое время Дуткиным, применяется меньше.

2. При использовании метода Гаусса-Зейделя в качестве основных уравнений выступают

$$\begin{aligned}
 X_1^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^n a_{1j} X_j^{(k)} + F_1, \\
 X_2^{(k+1)} &= a_{21} X_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^n a_{2j} X_j^{(k)} + F_2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 X_i^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n a_{ij} X_j^{(k)} + F_i, \\
 &\dots\dots\dots \\
 X_n^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} X_j^{(k+1)} + a_{nn} X_n^{(k)} + F_n.
 \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Этот метод отличается от метода Якоби тем, что в ходе итерации предыдущее решение заменяется на вновь полученное итеративное решение $(k+1)$ порядка. Если мы разобьем матрицу коэффициентов прямых затрат по диагонали на две части:

$$A = E_1 + E_2,$$

где

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

тогда система (3.1.8) имеет вид:

$$X^{(k+1)} = E_1 X^{(k+1)} + E_2 X^{(k)} + F.$$

Работая с реальными таблицами межотраслевых балансов, включающими 40 и более отраслей, можно, соответствующим образом упорядочив отрасли, получить такую матрицу **A**, в которой практически все элементы, расположенные выше главной диагонали, т. е. в верхнем треугольнике, будут равны нулю. Каждая отрасль в таком массиве выступает получателем промежуточных продуктов у нижестоящих, но не у вышестоящих отраслей. При этом эффект распространения оказывается однонаправленным. Из вышесказанного вытекает, что для решения больших межотраслевых моделей метод Гаусса-Зейделя по сравнению с методом Якоби более удобен.

3. Основными уравнениями метода пошагового агрегирования являются:

♦ **Уравнение макробаланса:**

$$X^{(k+1)} = a^{(k)} X^{(k+1)} + F, \quad (3.1.9)$$

где

$$a^{(k)} = \sum_i \sum_j a_{ij} X_j^{(k)} / \sum_i X_i^{(k)}, \quad F = \sum_i F_i.$$

♦ **Уравнение микробаланса:**

$$X_i^{(k+1)} = Z^{(k+1)} + \sum_j a_{ij} X_j^{(k)} + F_i, \quad (3.1.10)$$

где

$$Z^{(k+1)} = X^{(k+1)} / X^{(k)}.$$

Уравнение (3.1.9) - формула расчета равновесного мультипликатора макробаланса **Z**, при этом

$$Z^{(k+1)} = \frac{F}{(I - a^{(k)})X^{(k)}} = \frac{\sum_i F_i}{\sum_i X_i^{(k)} - \sum_i \sum_j a_{ij} X_i^{(k)}}.$$

Метод пошагового агрегирования, последовательно объединяющий в ходе итеративного процесса макробалансы и микробалансы (балансы межотраслевых связей), обладает заметными преимуществами и с точки зрения увязки макро- и микроуровней, и с точки зрения скорости сходимости.

Во-первых, хотя в приведенном алгоритме микробаланс есть стоимостной баланс межотраслевых связей (их денежное представление), незначительные изменения позволяют применять микробаланс и как натуральный баланс.

Во-вторых, макробаланс может использоваться с балансами межотраслевых связей более низкого уровня агрегирования, чем рассмотренный микробаланс. Наконец, высокая скорость сходимости этого метода объясняется скорее быстротой «настройки» объема выпуска в целом, нежели соотношений его объемов по отраслям.

4. Математически установлено, что все три перечисленных итеративных метода обладают сходимостью. Это обусловлено тем, что матрицы коэффициентов прямых затрат всех реальных межотраслевых балансов являются продуктивными (метод пошагового агрегирования сходится только в случае однопродуктовой модели макробаланса).

3.1.2. Определение равновесного выпуска прямым методом

В случаях, когда таблица межотраслевого баланса приводит к соответствующей размерности, вычисление обратной матрицы $(I - A)^{-1}$ может быть произведено без помощи итеративных процедур, а непосредственно методом Гаусса или методом обращения матрицы с выбором ведущего элемента, что имеет определенные преимущества с точки зрения скорости и точности расчетов объемов выпуска. Для стоимостных межотраслевых балансов в силу того, что $0 \leq a_{ij} \leq 1$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), различия сумм абсолютных значений элементов между столбцами матрицы $(I - A)$ невелики, поэтому можно использовать наиболее простой метод - метод Гаусса (как это обычно и делается на практике).

3.1.3. Определение равновесных цен

Рассмотрим межотраслевой баланс (табл. 3.1.1) по столбцам, исследуем ценовой аспект эффекта распространения и построим ценовую модель межотраслевых связей.

Модель равновесных цен.

Столбец i стоимостного межотраслевого баланса может быть представлен в следующем виде:

$$\bar{X}_{1i} + \bar{X}_{2i} + \dots + \bar{X}_{ni} + \bar{V}_i = \bar{X}_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1.11)$$

откуда, используя выражения $\bar{X}_{ji} = a_{ji} \bar{X}_i$, $\bar{V}_i = \bar{v}_i \bar{X}_i$, получаем

$$1 * a_{1i} + 1 * a_{2i} + ... + 1 * a_{ni} + \bar{v}_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь $\bar{v}_i$ – величина добавленной стоимости, приходящаяся на единицу продукции отрасли и называемая долей добавленной стоимости. Если для базового периода цены всех продуктов $P_1, P_2, \dots, P_n$ принять за единицу, то при замене $\bar{v}_i$ на v_i , цены $P_1, P_2, \dots, P_n$ будут определяться по формуле

$$P_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} P_j + v_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.1.12)$$

Или в матричном представлении система (3.1.12) имеет вид

$$P = A'P + v \quad (3.1.13)$$

Решая (3.1.13) относительно P , получим

$$P = (I - A')^{-1}v = [(I - A')^{-1}]'v = B'v. \quad (3.1.14)$$

Уравнения (3.1.12) и (3.1.13) называют *моделью равновесных цен*.

Не трудно установить взаимное соответствие этой модели и модели объемов выпуска, а именно:

вектор объема выпуска $X \leftrightarrow$ вектор цен P ;
 обратная матрица Леонтьева $B \leftrightarrow$ ценовой матричный мультипликатор
 (матричный мультипликатор ценового эффекта распространения) B' ;
 вектор конечного спроса $F \leftrightarrow$ вектор долей добавленной стоимости v .

Имея в виду взаимное соответствие, модель объемов выпуска и ценовую модель называют двойственными (dual). На основе (3.1.12), (3.1.13) и (3.1.14) можно выяснить, как через посредство структуры потребляемых каждой отраслью ресурсов изменяется структура цен при варьировании величины добавленной стоимости. Оказывается, что эффект распространения ΔP , вызванный измерением доли добавленной стоимости на Δv , рассчитывается как

$$\Delta P = B' \Delta v.$$

Комментарии

1. Если величину и долю добавленной стоимости представить как

$$V_i = V_i^1 + V_i^2 + V_i^3; \quad v_i = v_i^1 + v_i^2 + v_i^3,$$

где V_i^1 – заработная плата; V_i^2 – прибыль; V_i^3 – остаток, а

$$v_i^1 = \frac{V_i^1}{X_i}, \quad v_i^2 = \frac{V_i^2}{X_i}, \quad v_i^3 = \frac{V_i^3}{X_i},$$

то при росте заработной платы на $\alpha\%$ изменение величины и доли добавленной стоимости описывается следующим образом:

$$V_i + \alpha V_i^1; \quad v_i + \alpha v_i^1.$$

Аналогичные изменения происходят при росте прибыли.

4. УПРАВЛЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Различные методы оптимального управления, получившие заметное развитие благодаря созданию и распространению компьютерной техники, не только отвечают насущным потребностям экономической науки, но и начинают играть роль важнейшего ее составного элемента. И это вполне естественно, поскольку одной из главных задач экономической науки является разработка теоретического фундамента управления, т. е. методов наилучшего распределения ограниченных ресурсов (людских, материально-вещественных, финансовых, временных) для поддержания функционирования и развития предприятия или экономики страны. Однако для того, чтобы обнаружить глубинную связь между математическим программированием, имеющим, как может показаться, сугубо технический характер, и экономической наукой, понадобились усилия многих и многих ученых. Цель настоящей главы заключается в том, чтобы, сосредоточившись на линейном программировании - одном из разделов математического программирования, теория и методы которого характеризуются наиболее высокой степенью завершенности, продемонстрировать, как эта на первый взгляд достаточно простая методика оптимизации отражает существо широкого спектра проблем, решаемых экономической наукой.

4.1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

4.1.1. Решение задачи линейного программирования. Метод обратной матрицы

Линейное программирование (ЛП) - это метод поиска неотрицательных значений переменных, минимизирующих или максимизирующих значение линейной целевой функции при наличии ограничений, заданных в виде линейных неравенств. Если число переменных не превышает двух, то задача ЛП легко решается графически. Однако этот способ решения становится бесполезным при увеличении числа переменных или ограничений. Метод нахождения решения задачи ЛП за конечное число шагов, получивший название «симплексного метода» или «метода решения с помощью мультипликатора», независимо друг от друга открыли в 1940 г. советский ученый Л. В. Канторович и американский математик Дж. Данциг. Рассмотрим усовершенствованный симплексный метод, который превосходит все остальные методы решения задач ЛП как по простоте, так и по эффективности вычислительной процедуры. Он называется *модифицированным симплексным методом* (revised simplex method) или *методом обратной матрицы* (inverse matrix method).

Теоретические основы линейного программирования и метод обратной матрицы

Простая задача линейного программирования:

Пример 1

Ограничения:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 5, \\ 3X_1 + X_2 &\leq 8. \end{aligned}$$

Условие неотрицательности:

$$X_1, X_2 \geq 0.$$

Целевая функция:

$$Z = X_1 + X_2 \rightarrow \max$$

Если в неравенствах системы ограничений знаки поменять на противоположные, то можно получить следующую задачу ЛП:

Пример 2

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\geq 5, \\ 3X_1 + X_2 &\geq 8, \\ X_1, X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$Z = X_1 + X_2 \rightarrow \min.$$

Области допустимых решений рассматриваемых задач изображены на рис. 4.1. Они представляют собой выпуклые многоугольники (в более общем случае - выпуклые многогранники), а их угловые точки (иначе экстремальные точки, extreme points), т. е. точки А, В, С на рис. 4.1, а) и точки В, Е, D на рис. 4.1, б), есть решения, удовлетворяющие системе ограничений, включая условие неотрицательности. Такие точки называют также *допустимыми решениями* (feasible solutions), число их ограничено. Если целевая функция **Z** принимает оптимальное значение, то это минимальное (или максимальное) значение она достигает в одной из угловых точек области допустимых решений.

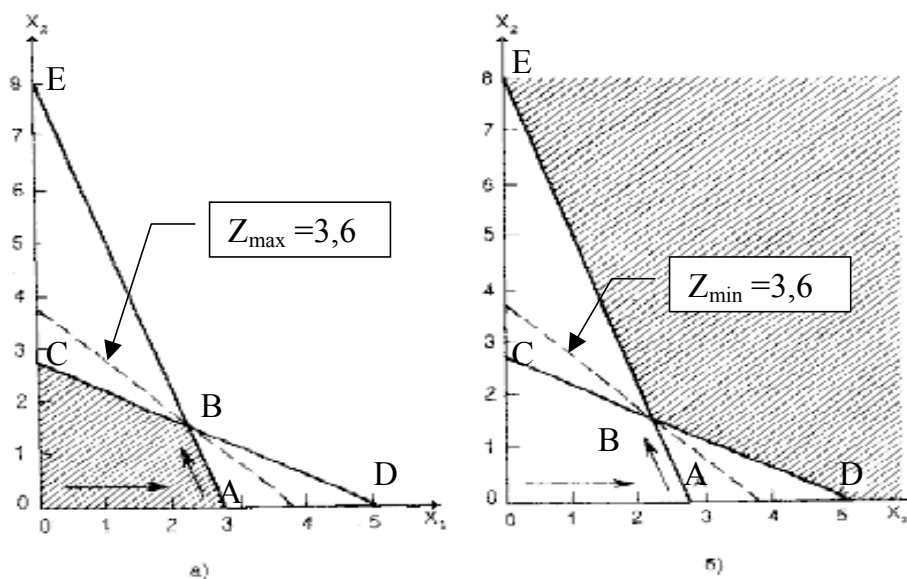


Рис. 4.1. Графическое представление задач линейного программирования 1 и 2

Итеративный метод, который в полной мере использует указанное свойство функции **Z** для эффективного поиска оптимального решения задачи ЛП, и есть *симплексный метод*. Основная его идея заключается в том, чтобы, взяв в качестве

Условие неотрицательности:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0.$$

Целевая функция:

$$Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n \rightarrow \min.$$

Добавив в систему ограничений фиктивные неотрицательные переменные, можем превратить ее из системы неравенств в систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n - X_{n+1} + X_{n+m+1} &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n - X_{n+2} + X_{n+m+2} &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m_1 1}X_1 + a_{m_1 2}X_2 + \dots + a_{m_1 n}X_n - X_{n+m_1} + X_{n+m+m_1} &= b_{m_1} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{m_1+1,1}X_1 + a_{m_1+1,2}X_2 + \dots + a_{m_1+1,n}X_n + X_{n+m_1+1} &= b_{m_1+1} \\ a_{m_1+2,1}X_1 + a_{m_1+2,2}X_2 + \dots + a_{m_1+2,n}X_n + X_{n+m_1+2} &= b_{m_1+2} \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m_l 1}X_1 + a_{m_l 2}X_2 + \dots + a_{m_l n}X_n + X_{n+m_l} &= b_{m_l} \end{aligned} \right\}$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n; X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m+m_l} \geq 0.$$

Переменные $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m}$ называются дополнительными (slack variable). В неравенства типа $\leq$ вводятся только дополнительные переменные, которые отражают разницу правой и левой частей неравенства. В неравенства же типа $\geq$ наряду с дополнительными вводятся также искусственные переменные (artificial variable $X_{n+m+1}, X_{n+m+2}, \dots, X_{n+m+m_l}$ - специальные переменные, используемые в процессе решения задачи. Искусственные переменные добавляются для того, чтобы все константы b_i , из системы ограничений были неотрицательными. Эти переменные играют важную роль на первом этапе решения задачи, на втором этапе все они обращаются в нули.

Удобной формой записи задачи, в которой система неравенств заменена системой уравнений, является матрично-векторная форма. Если ввести пере обозначение $n' = n + m + m_l$ и принять обозначения

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n'} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_l 1} & a_{m_l 2} & \dots & a_{m_l n'} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{m_l} \end{bmatrix},$$

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_{n'}),$$

то задачу ЛП можно будет записать следующим образом:

$$AX = b,$$

$$X \geq 0$$

$$Z = cX \rightarrow \min.$$

Разобьем матрицу коэффициентов A на n' векторов длины m и введем вектор A_0 , равный вектору констант b :

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A_{n'} = \begin{bmatrix} a_{1n'} \\ a_{2n'} \\ \dots \\ a_{mn'} \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} = b.$$

Тогда систему ограничений задачи ЛП можно записать в векторной форме:

$$X_1 A_1 + X_2 A_2 + \dots + X_{n'} A_{n'} = A_0. \quad (4.1)$$

Как следует из этой формулы, вектор A_0 представляет собой линейную комбинацию векторов $A_1, \dots, A_{n'}$, где коэффициентами выступают искомые величины $X_1, \dots, X_{n'}$.

Выберем из n' векторов $A_1, \dots, A_{n'}$, m векторов, $A_{v(1)}, A_{v(2)}, \dots, A_{v(m)}$, линейная комбинация которых составляет m -мерный вектор A_0 :

$$X_{v(1)}^B A_{v(1)} + X_{v(2)}^B A_{v(2)} + \dots + X_{v(m)}^B A_{v(m)} = A_0 \quad (4.2)$$

Выбранные m векторов, $A_{v(1)}, A_{v(2)}, \dots, A_{v(m)}$, называются *базисными векторами* (basic vectors), а соответствующие им переменные $X_{v(1)}^B, X_{v(2)}^B, \dots, X_{v(m)}^B$ - *базисными переменными* (basic variables). Оставшиеся $n' - m$ векторов и переменные при них называются соответственно *небазисными векторами* (non-basic vectors) и *небазисными переменными* (non-basic variables). Приравняв все небазисные переменные, т. е. все переменные, за $X_{v(1)}^B, X_{v(2)}^B, \dots, X_{v(m)}^B$, к нулю и решив уравнение (4.2), получаем так называемое *базисное решение* (basic solution), включающее в себя и нулевые значения небазисных переменных. Базисные решения, дающие неотрицательные значения всех переменных, называются *допустимыми базисными решениями* (basic feasible solutions).

Относительно области ограничений задачи ЛП и допустимых базисных решений известны следующие факты:

- а) допустимые базисные решения совпадают с угловыми точками;
- б) число положительных элементов допустимого базисного решения меньше или равно числу ограничений m ;
- в) число угловых точек и число допустимых базисных решений конечно и не превосходит C_n^m ;

г) число положительных элементов невырожденного допустимого базисного решения равно числу ограничений m .

Базисное решение, содержащее $n' - m$ нулевых значений и m ненулевых значений, называется *невырожденным* (non-degenerate), а базисное решение, имеющее более чем $n' - m$ нулевых значений, называется *вырожденным* (degenerate).

Допустим, что для задачи ЛП существует одна угловая точка (допустимое базисное решение) X^B и отличное от нуля базисное решение X^B , такие, что

$$X^e = \begin{bmatrix} X^B \\ 0 \end{bmatrix}; \quad X^B = \begin{bmatrix} X_{v(1)}^B \\ X_{v(2)}^B \\ \dots \\ X_{v(m)}^B \end{bmatrix}, \quad \text{где } X^B > 0.$$

В этом случае можно установить следующие отношения, вытекающие из формулы (4.2). Обозначим базис (basis) через B , тогда по условию

$$B = (A_{v(1)} A_{v(2)} \dots A_{v(m)}),$$

и формула (4.2) записывается так:

$$B X^B = A_0.$$

Следовательно, базисное решение имеет вид

$$X^B = B^{-1} A_0. \quad (4.3)$$

(Само базисное решение - это X^e , однако, поскольку X^e получаем непосредственно из X^B , ниже будем называть базисным решением вектор X^B). Обратим внимание на обратную матрицу базиса B^{-1} , которая играет здесь ключевую роль.

Далее, в случае невырожденного вектора X^e любой небазисный вектор A_j может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов $A_{v(1)} A_{v(2)} \dots A_{v(m)}$ как

$$A_j = X_{1j}^N A_{v(1)} + X_{2j}^N A_{v(2)} + \dots + X_{mj}^N A_{v(m)}. \quad (4.4)$$

Если обозначить

$$X_j^N = \begin{bmatrix} X_{1j}^N \\ X_{2j}^N \\ \dots \\ X_{mj}^N \end{bmatrix}, \quad \text{то}$$

$$B X_{1j}^N = A_j$$

$$X_{1j}^N = B^{-1} A_j \quad (4.5)$$

Здесь тоже фигурирует обратная матрица базиса B^{-1} . Согласно формулам (4.3) и (4.4) для любого положительного θ устанавливается отношение

$$B(X^B - \theta X_j^N) + \theta A_j = A_0 \quad (4.6)$$

Следовательно,

$$X^B - \theta X_j^N \geq 0, \quad \theta > 0. \quad (4.7)$$

В этом случае

$$X = \begin{bmatrix} X^B - \theta X_j^N \\ \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

есть допустимое решение задачи (ЛП), отличное от X^e . Если X_{ij}^N ,

$i = 1, 2, \dots, m$, имеет хотя бы одно положительное значение, то, выбрав θ таким, что

$$\theta_{0j} = \theta_{\max} = \min_i \left\{ \frac{X_i}{X_{ij}^N} \mid X_{ij}^N > 0 \right\}, \quad (4.9)$$

(4.8) не будет иметь более m положительных элементов. Следовательно $\tilde{X}^e$, (значение X , соответствующее $\theta = \theta_{0j}$) - угловая точка, отличная от X^e . Кроме того, хотя бы один из элементов вектора $X^D - \theta X_j^N$ из (4.6) обращается в нуль.

Если принять

$$\frac{X_h}{X_{hj}^N} = \min_i \left\{ \frac{X_i}{X_{ij}^N} \mid X_{ij}^N > 0 \right\} \quad (4.10)$$

то, исключив из базиса $(A_{v(1)}, A_{v(2)} \dots A_{v(h)}, \dots, A_{v(m)})$ элемент $A_{v(h)}$, и введя в него элемент $A_{v(j)}$, перейдем к новому базису $(A_{v(1)}, A_{v(2)} \dots A_{v(j)}, \dots, A_{v(m)})$.

Процедура замены базисных векторов называется процедурой **выбора ведущего элемента**. Очевидно, что базисный вектор, соответствующий новой угловой точке, и базисный вектор для старой угловой точки отличаются лишь одним элементом, и поэтому эти две точки - старая и новая - соседние.

Если все $X_{ij}^N < 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, то (4.8) не может стать угловой точкой. В этом случае, как бы велико ни было θ , X по-прежнему неотрицательна, и поэтому можно утверждать, что угловая точка, соседняя с соответствующей A_j точкой X^e , есть бесконечно удаленная точка.

Поскольку цель задачи линейного программирования состоит в поиске оптимального решения, при котором достигается оптимальное значение целевой функции, нам необходима такая процедура перехода от одного базиса к другому, в результате которой значение целевой функции неуклонно приближается к оптимуму. Кроме того, эта процедура должна обеспечивать сходимость процесса вычислений и его эффективность. Такая процедура действительно возможна.

В случае допустимого решения X из (4.8) значение целевой функции задается следующим образом:

$$Z^j(\theta) = c^B (X^B - \theta X_j^N) + c_j \theta = c^B X^B - \theta (c^B X_j^N - c_j) = Z_0 - \theta (Z^j - c_j), \quad (4.11)$$

где

$$c^B = (c_{v(1)}, c_{v(2)}, \dots, c_{v(m)}), \quad Z_0 = c^B X^B, \quad Z^j = c^B X_j^N$$

Следовательно:

а) Если $Z^j - c_j > 0$, то $Z^j(\theta) < Z_0$ и по мере увеличения θ возрастает интенсивность улучшения целевой функции. Такое изменение базиса

по j является рациональным. Когда какое-либо значение $X_{ij}^N > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, необходимо изменять базис по формулам (4.9) и (4.10). Если все $X_{ij}^N > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, то минимального значения не существует и решение является неограниченным.

б) Если $Z^j - c_j < 0$, то $Z^j(\theta) > Z_0$ и значение целевой функции улучшить невозможно. Изменение базиса для таких j является нерациональным.

в) Если $Z^j - c_j = 0$, то $Z^j(\theta) = Z_0$ и значение целевой функции становится неизменным.

Таким образом, очевидно, что условие оптимальности допустимого базисного решения X^e задается формулой

$$SP_j = Z^j - c_j \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n'. \quad (4.12)$$

Критерий оптимальности (4.12) называется *симплексным* критерием. Из этого критерия следует, что если для какого-либо j $Z^j - c_j > 0$, то соответствующее значение A_j необходимо добавить к базисному вектору. Если таких A_j несколько, то в качестве нового базисного вектора необходимо выбрать значение A_k , при котором

$$SP_k = \max SP_j. \quad (4.13)$$

Далее изменение базиса следует осуществлять по формулам (4.9) и (4.10) при условии, что $j = k$.

Введем здесь еще одно понятие - понятие *симплексного мультипликатора*, играющее важную роль не только в технике решения задач линейного программирования, но и в теории экономической науки (можно показать, что симплексный мультипликатор является множителем Лагранжа).

Обозначим

$$P = (P_1, P_2, \dots, P_m).$$

Согласно системе ограничений и определению целевой функции задачи ЛП имеем

$$Z - Pb = cX - PAx = (c - PA)X. \quad (4.14)$$

Возьмем произвольное допустимое базисное решение

$X^B = (X_{v(1)}^B, X_{v(2)}^B, \dots, X_{v(m)}^B)$; коэффициенты при X^B из формулы (4.14) приравняем к нулю, т. е. положим $PA_{v(i)} = c_{v(i)}^B$, $i = 1, 2, \dots, m$, и выберем соответствующие $P_1, P_2, \dots, P_m$.

Вектор $P = (P_1, P_2, \dots, P_m)$ называется *симплексным мультипликатором* допустимого базисного решения X^B .

Если матрицу размера $(m \times m)$, получаемую из базисных векторов $A_{v(1)}, A_{v(2)}, \dots, A_{v(m)}$, определить аналогичным образом как $B = (A_{v(1)}, A_{v(2)}, \dots, A_{v(m)})$

и, кроме того, положить $c^B = (c_{v(1)}, c_{v(2)}, \dots, c_{v(m)})$, то формулу (4.14) можно будет переписать как

$$PB = c^B \quad (4.15)$$

Следовательно, симплексный мультипликатор можно выразить формулой

$$P = c^B B^{-1}. \quad (4.16)$$

Обозначив элементы матрицы B^{-1} как b_{ij} , приведенное выше выражение можно записать и так:

$$P_j = \sum_{i=1}^m c_{v(i)} b_{ij}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (4.17)$$

Заметим, что здесь фигурирует обратная матрица базиса B^{-1} . Поскольку условлено, что все элементы X , за исключением X^B , равны нулю, а в соответствии с (4.15)

$$Z - Pb = (c - PA)X = 0, \quad (4.18)$$

то

$$Z = Pb. \quad (4.19)$$

Далее,

$$Z^j = c^B X_j^N = (c^B B^{-1}) A_j,$$

поэтому согласно (4.16)

$$Z^j = PA_j$$

Следовательно, симплексный критерий можно выразить как

$$SP_j = PA_j - c_j. \quad (4.20)$$

Таким образом, вычисления, составляющие ядро итеративного процесса, в ходе которого происходит постепенное приближение к оптимальному решению задачи ЛП (т.

е. нахождение базисного вектора A_j вычисление базисного решения, симплексного мультипликатора и симплексного критерия), можно легко осуществить, опираясь на элементы матрицы B^{-1} , обратной матрице базиса B . Метод, в основе которого лежит последовательное изменение матрицы B^{-1} , называется **методом обратной матрицы** или **модифицированным симплексным методом**. Естественно, что если каждый раз вновь и вновь вычислять обратную матрицу B^{-1} , потребуется колоссальный объем вычислений, однако, к счастью, в этом нет необходимости.

Если обозначить базис, который необходимо изменить, и базис, подвергшийся изменению, соответственно как

$$B_C = [A_{v(i)} A_{v(2)} \dots A_{v(h)} \dots A_{v(m)}],$$

$$B_H = [A_{v(i)} A_{v(2)} \dots A_{v(k)} \dots A_{v(m)}],$$

то они будут соотноситься следующим образом:

$$B_H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots & X_{1k}^N \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & X_{2k}^N \dots & 0 \\ \dots & \vdots & X_{hk}^N \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & X_{mk}^N \dots & 1 \end{bmatrix} B_C^{-1}.$$

Учитывая, что

$$B_H^{-1} = (b_{ij}^H), B_C^{-1} = (b_{ij}^C).$$

получаем

$$\begin{cases} b_{ij}^H = b_{ij}^C - X_{ik}^N b_{hj}^H \\ b_{hj}^H = \frac{b_{hj}^C}{X_{hk}^N} \end{cases}, \quad (4.21)$$

что дает нам возможность выразить новую базисную обратную матрицу через старую.

Новое базисное решение

$$X_H^B = (X_{v(1)}^{B_H}, X_{v(2)}^{B_H}, \dots, X_{v(k)}^{B_H}, \dots, X_{v(m)}^{B_H})$$

вычисляется аналогичным образом:

$$\begin{cases} X_{v(i)}^{B_H} = X_{v(i)}^{B_C} - X_{ik}^N X_h^{B_H} \\ X_h^{B_H} = \frac{X_h^{B_C}}{X_{hk}^N} \end{cases}. \quad (4.22)$$

Как уже говорилось, если в исходной задаче ЛП система ограничений задана в виде неравенств типа $\geq$, необходим первый этап, а именно поиск начального допустимого базисного решения (исходной угловой точки). В этом случае в число начальных решений включаются искусственные переменные

$$X_{v(i)} = X_{n+m+1} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1. \quad (4.23)$$

Так выбирается m_1 начальных решений. Затем сумма значений искусственных переменных минимизируется:

$$W = I \cdot X_{n+m+1} + I \cdot X_{n+m+2} + \dots + I \cdot X_{n+m+m_1}. \quad (4.24)$$

Если у исходной задачи ЛП есть допустимые решения, то $W_{\min} = 0$, и все искусственные переменные должны обратиться в нуль. Таким образом, оптимальное базисное решение задачи $W \rightarrow \min$ является допустимым базисным решением исходной

задачи ЛП. Если же на первом этапе при вычислении симплексного критерия, т. е. условия оптимальности

$$SP_k = \max SP_j \leq 0,$$

оказывается, что $W > 0$, то исходная задача ЛП не имеет ни одного допустимого решения.

Существуют следующие правила «запуска» итеративного процесса:

1. Если система ограничений включает неравенства типа $\geq$ (случай $m_1 > 0$), то на первом этапе устанавливаются начальные решения

$$X_{v(i)} = X_{n+m+i}, i = 1, 2, \dots, m_1,$$

$$X_{v(i)} = X_{n+i}, i = m_1 + 1, \dots, m,$$

решается задача $W \rightarrow \min$ и находится начальное допустимое базисное решение задачи ЛП. При этом начальная базисная обратная матрица считается единичной ($B^{-1} = I$).

2. Если система ограничений включает только неравенства типа $\leq$ (случай $m_1 = 0$), то сразу переходим ко второму этапу, а в качестве начальных допустимых базисных решений берем

$$X_{v(i)} = X_{n+i}, i = 1, 2, \dots, m, m_1 = 0$$

Начальная базисная обратная матрица здесь также считается единичной

$$(B^{-1} = I).$$

Хорошо усвоив все вышесказанное, можно без особого труда составить программу решения задачи линейного программирования.

4.1.2. Обобщенная модель Леонтьева

Допустим, что каждая отрасль располагает несколькими, но конечным числом технологий, мы получим модель, называемую обобщенной моделью Леонтьева. Если, исходя из этой модели, поставить задачу выбора той или иной технологии, то ее можно записать в виде задачи ЛП (говоря языком теории линейного программирования, мы можем доказать *теорему незамещаемости* или, как ее еще называют, *теорему замещаемости*).

Обобщенная модель Леонтьева

Будем считать, что в экономике существует n производственных технологий и выпускается в общей сложности m видов продукции ($m = m_1$). Если обозначить количество ресурса i и объем живого труда, необходимых для производства единицы продукции вида j в отрасли j посредством технологии v , соответственно как

$$a_{ij}^v \quad i, j = 1, 2, \dots, m; v = 1, 2, \dots, v(j),$$

$$c_j^v \quad j = 1, 2, \dots, m; v = 1, 2, \dots, v(j),$$

то обобщенную матрицу коэффициентов прямых затрат (обобщенную матрицу Леонтьева) и вектор коэффициентов затрат живого труда можно определить как

$$\begin{array}{ccc}
\text{Отрасль 1} & \text{Отрасль 2} & \text{Отрасль } m \\
A = & \begin{bmatrix} a_{11}^1 \dots a_{11}^{v(1)} & a_{12}^1 \dots a_{12}^{v(2)} & \dots & a_{1m}^1 \dots a_{1m}^{v(m)} \\ a_{21}^1 \dots a_{21}^{v(1)} & a_{22}^1 \dots a_{22}^{v(2)} & \dots & a_{2m}^1 \dots a_{2m}^{v(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^1 \dots a_{m1}^{v(1)} & a_{m2}^1 \dots a_{m2}^{v(2)} & \dots & a_{mm}^1 \dots a_{mm}^{v(m)} \end{bmatrix} & \\
c = & (c_1^1 \dots c_1^{v(1)} c_2^1 \dots c_2^{v(2)} \dots c_m^1 \dots c_m^{v(m)}) &
\end{array}$$

Матрица коэффициентов выпуска получается из единичной матрицы путем следующего ее «расширения»:

$$E = \begin{bmatrix} 1 \dots 1 & 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 1 & \dots & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & 1 \dots 1 \end{bmatrix}.$$

Выразим вектор *объема* выпуска (уровня деятельности) **X** и вектор конечного спроса **F**, соответствующие приведенным выше матрице коэффициентов прямых затрат и матрице коэффициентов выпуска, как

$$X = \begin{bmatrix} x_1^I \\ \dots \\ x_1^{v(1)} \\ \dots \\ x_m^{v(m)} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ \dots \\ F_m \end{bmatrix}.$$

Каждая отрасль выбирает из числа доступных ей технологий одну определенную технологию. Если предположить, что выбор технологий осуществляется с учетом конечного спроса, предъявляемого каждой из отраслей, так, чтобы минимизировать объем затрат живого труда в обществе в целом, то проблема технологического выбора может быть представлена в виде следующей задачи ЛП:

$$\begin{aligned}
(E - A)X &\geq F, \\
X &\geq 0, \\
cX &\rightarrow \min.
\end{aligned}$$

Известно, что для сформулированной указанным образом обобщенной модели Леонтьева существует следующая теорема.

Теорема незамещаемости. Если в обобщенной модели Леонтьева предположить возможность производства положительного вектора конечного спроса $\mathbf{Y} > \mathbf{0}$, то, как бы ни изменялся конечный спрос, оптимальный базис **B** будет оставаться неизменным. Этот базис представляет собой матрицу размера **mXm**. Поскольку любая отрасль должна производить какое-то количество конечной продукции, причем это возможно посредством различных производственных технологий, в каждой отрасли будет выбран лишь один технологический процесс.

Следует, однако, помнить, что помимо ресурсов, воспроизводимых внутри системы и являющихся обычными продуктами производства, существуют еще и ресурсы, которые вводятся в систему извне и максимальный объем вовлечения которых ограничен - так называемые ограниченные факторы производства. В приведенной выше модели в явном виде присутствует лишь один из ограниченных ресурсов - труд. Между тем более реалистично считать, что уровень деятельности ограничен не только трудом, но в зависимости от выбора продолжительности периода производства также и основными фондами, главными составными элементами которых являются производственные здания и станки, а также земель и многими другими важными ресурсами. Ограничения уровня деятельности, проистекающие из ограниченности ресурсов, можно выразить в виде системы неравенств типа $\leq$.

4.1.3. Анализ деятельности. Модель Канторовича

С помощью обобщенной модели Леонтьева оказалось возможным рассмотреть проблему технологического выбора в условиях использования ограниченных ресурсов. При этом, однако, должно выполняться условие отсутствия совместного производства благ, состоящее в том, что результатом технологического процесса является выпуск только одного вида благ. Отмеченное ограничение можно ослабить опять же с помощью аппарата линейного программирования.

Анализ деятельности - общая экономическая теория, в основе которой лежит предпосылка о постоянстве соотношений *затраты/выпуск*, включает в себя методы решения задач технологического выбора, распределения ограниченных ресурсов и проблемы совместного производства благ. Все это можно рассматривать в качестве одной из областей приложения линейного программирования.

Допустим, имеется m видов благ. В каком-либо технологическом процессе благо j затрачивается в объеме Y_j'' и производится в объеме Y_j' . Таким образом, чистое производство блага j , Y_j составляет $Y_j' - Y_j''$. Технологический процесс данного производства выражается тогда вектором Y :

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_j \\ \dots \\ Y_m \end{bmatrix}.$$

В этом процессе благо j выступает в качестве элемента затрат, если $Y_j < 0$, и выпуска, если $Y_j > 0$. Если $Y_j = 0$, то следует считать, что благо j не имеет отношения к данному виду производства. Таким образом, базисный процесс (деятельность) определяется совокупностью m постоянных коэффициентов, а степень его использования выражается уровнем деятельности.

Предположим, что число технически возможных базисных процессов в народном хозяйстве или на отдельном предприятии равно n' единиц. Тогда процесс j можно задать

вектором

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix},$$

где через A_j обозначен результат (выпуск) производства при условии, что уровень деятельности X_j представляет собой неотрицательную величину ($X_j \geq 0$). При этом общий (суммарный) уровень производства

$$Y = X_1 A_1 + X_2 A_2 + \dots + X_n A_n + X_{n+1} A_{n+1} + \dots + X_n A_n. \quad (4.1.3.1)$$

Матрицу A составим из введенных векторов:

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n).$$

Вектор уровней деятельности (уровней использования) процесса j обозначим как X . Тогда формула (4.1.3.1) приобретает вид

$$Y = A X, X \geq 0. \quad (4.1.3.2)$$

Матрицу A называют *технологической матрицей*. Очевидно, что если в формуле (4.1.3.2) Y заменить на b или A_0 , то она превратится, в систему ограничений задачи линейного программирования, включающую вектор коэффициентов при дополнительных, или искусственных, переменных. Вектор коэффициентов при дополнительных переменных $A_{n+1}, \dots, A_{n+m}$ в теории анализа деятельности называют *утилизацией*, поскольку его смысл здесь заключается в безвозмездной утилизации лишних продуктов или ресурсов. При использовании технологической матрицы, выражающей чистое производство благ, матрице коэффициентов прямых затрат A модели межотраслевого баланса соответствует матрица $I - A$, а матрице коэффициентов прямых затрат A обобщенной модели Леонтьева - матрица $E - A$.

Если ограничивающие условия выразить формулой (4.1.3.1), то возможен выбор различных целевых функций. Остановимся на целевой функции Канторовича. Вектор выпуска продукции Y разобьем на две составляющие - постоянную $\dot{Y}$ и переменную, а коэффициенты переменной части выпуска каждого вида продукции обозначим как $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Максимизации будет подлежать набор значений выпуска различных видов продукции в его переменной части, который обозначим как Z . Поскольку $Y_j = Z\alpha_j + \dot{Y}_j$, целевую функцию можно записать в виде

$$Z = \min_j \frac{Y_j - \dot{Y}_j}{\alpha_j} \rightarrow \max.$$

Соответственно задача линейного программирования может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= AX - Z\alpha, \\ X &\geq 0, \quad Z \geq 0, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_j \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

Комментарии

1. Задача станет яснее, если систему ограничений задачи переписать в виде

$$(A - \alpha)\left(\frac{X}{Z}\right) = Y, \quad (X, Y) \geq 0.$$

2. Это важно для понимания соотношения задач минимизации и максимизации (не путать с двойственной задачей). Соответствующий факт получил название «теоремы соотношения».

4.1.4. Модель линейного программирования фоннеймановского типа

Если учесть, что затраты осуществляются в начале периода деятельности, а продукция может быть получена только по окончании деятельности, то матрицы коэффициентов затрат и коэффициентов выпуска необходимо отделить друг от друга. Кроме того, если считать возможным производство всех благ, то модель линейного программирования принимает форму модели фон Неймана. Модель фон Неймана в последнее время используется и в трудах, где предпринимается попытка модернизировать учение Маркса, начало которым положил профессор Морито.

Матрица коэффициентов затрат **A** по форме совпадает с матрицей **A** из обобщенной модели Леонтьева (правда, здесь коэффициенты относятся не к единице продукта, а к единице уровня деятельности). Матрица коэффициентов выпуска **B** имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^2 \dots & b_1^{v(1)} & \dots & b_1^{v(m_1)} \\ b_2^1 & b_{21}^2 & b_2^{v(1)} & \dots & b_2^{v(m_1)} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ b_{m1}^1 & b_{m1}^2 & b_{m1}^{v(1)} & \dots & b_{m1}^{v(m_1)} \end{bmatrix},$$

где b_j^v - выпуск продукта j на единицу уровня деятельности процесса v .

Если **Y** вектор чистого продукта, **X** вектор уровней деятельности, то для производства чистой продукции в объеме **Y** деятельность осуществляется на уровне **X**, и соответственно в течение производственного периода запас благ уменьшается на **AX**. Продукт **BX**, использование которого становится возможным в конце периода, компенсирует затраты **AX**, и разность между общим продуктом и затратами составляет чистый продукт. Если величины **Y**, **A** и **B** фиксированы, то задача технологического выбора с целью минимизации совокупных затрат труда принимает вид

$$\begin{aligned} BX &\geq AX + Y, \\ X &\geq 0, \\ CX &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Если вышеприведенные ограничивающие условия записать в виде **(B - A) X ≥ Y**, то становится очевидным, что эта задача есть лишь частный случай задачи линейного программирования.

4.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ

4.2.1. Траектория равновесного роста. Траектория фон Неймана

Рассмотрим динамическую межотраслевую модель, а именно модель равновесного роста, в которой проблема оптимизации в явном виде не ставится. В этой модели предполагается, что темпы прироста производства всех благ одинаковы и неизменны и составляют величину g .

Межотраслевую модель можно записать в виде

$$\dot{X}(t) = AX(t) + F(t), \quad (4.2.1.1)$$

где t - момент времени.

Вектор конечного спроса состоит из двух компонентов - вектора потребления C и вектора инвестиций I , т. е.

$$F(t) = C(t) + I(t). \quad (4.2.1.2)$$

Если доход в момент времени t обозначить как $Y(t)$, то функция потребления отдельных видов благ может быть записана как

$$C_i(t) = h_i Y(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2.1.3)$$

Доход $Y(t)$ можно представить в виде функции

$$Y(t) = v_1 X_1(t) + v_2 X_2(t) + \dots + v_n X_n(t), \quad (4.2.1.4)$$

где v_i - доля добавленной стоимости для блага i .

Введем соответствующие векторы:

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_j \\ \dots \\ h_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_j \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Тогда из формул (4.2.1.3) и (4.2.1.4) можно вывести следующее соотношение:

$$C(t) = hv X(t). \quad (4.2.1.5)$$

Если далее величину капитала вида i , необходимую для производства блага j , обозначить как b_{ij} , то матрица коэффициентов капитала B запишется в виде

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots & b_{1i} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2i} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{ni} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Допустим, что как между выпуском продукции и затратами сырья, так и между выпуском продукции и величиной необходимого для этого капитала существует пропорциональная зависимость. Если прирост производства продукции обозначить как

$$\Delta X_i(t) = X_i(t+1) - X_i(t),$$

то инвестиционный спрос на благо i за период времени t запишется как

$$I_i(t) = b_{i1}\Delta X_1(t) + b_{i2}\Delta X_2(t) + \dots + b_{in}\Delta X_n(t), \quad (4.2.1.6)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Если обозначить n -мерный вектор, состоящий из элементов $\Delta X_i(t)$, как $\Delta X(t)$, то формулу (4.2.1.6) можно переписать в матричном виде:

$$I(t) = B\Delta X(t) = B(X(t+1) - X(t)). \quad (4.2.1.7)$$

Из уравнений (4.2.1.2), (4.2.1.3), (4.2.1.6) и (4.2.1.7) теперь можно вывести основное уравнение динамической межотраслевой модели:

$$X(t) = (A + hv)X(t) + B(X(t+1) - X(t)). \quad (4.2.1.8)$$

Если обозначить $\tilde{A} = A + hv$ уравнение (4.2.1.8) можно переписать в виде

$$X(t) = \tilde{A}X(t) + B(X(t+1) - X(t)). \quad (4.2.1.9)$$

Как уже было сказано, в модели предполагается равновесный рост производства. Если темп прироста обозначить как g , то можно составить следующее уравнение:

$$X(t+1) - X(t) = gX(t).$$

Если теперь вектор выпуска продукции за некоторый год принять за X , то динамическое уравнение можно записать как

$$X = (\tilde{A} + gB)X, \quad (4.2.1.10)$$

откуда после преобразования получаем

$$(I - \tilde{A})^{-1}BX = \frac{1}{g}X \quad (4.2.1.10)$$

Сделаем еще одно допущение: пусть при $(I - \tilde{A})^{-1} > 0$, в каждом ряду матрицы B есть хотя бы один положительный элемент. При таком допущении, поскольку $(I - \tilde{A})^{-1}B > 0$, согласно теореме Перрона-Фробениуса о положительно-определенных матрицах максимальный по своему абсолютному значению положительный характеристический корень λ^* матрицы $(I - \tilde{A})^{-1}B$ (корень Фробениуса) и правый положительный

характеристический вектор X^* (вектор Фробениуса) определяются однозначно. Иначе говоря, других неотрицательных характеристических векторов не существует. Следовательно, обладающая экономическим смыслом траектория равновесного роста (траектория фон Неймана - магистраль) представляет собой вектор $\{\alpha X^* : \alpha \geq 0\}$, а темп прироста g^* в этой модели определяется как величина, обратная λ^* .

4.2.2. Равновесные цены. Цены фон Неймана

Модель равновесных цен соотносится с моделью равновесного роста. Пусть P - вектор равновесных цен, тогда модель равновесных цен можно записать в виде

$$P = P(\tilde{A} + rB), \quad (4.2.2.1)$$

где r - равновесный уровень прибыльности (норма прибыли). Задачей является вычисление значений P и r . Поскольку уравнение (4.2.2.1) можно записать и в другой форме:

$$PB(I - \tilde{A})^{-1} = \frac{1}{r}P, \quad (4.2.2.2)$$

равновесное значение нормы прибыли определяется как величина, обратная характеристическому значению матрицы Фробениуса $B(I - \tilde{A})^{-1}$, а вектор равновесных цен $P = P^*$ будет равен ее левому характеристическому вектору.

Доказано, что P^* и r^* можно получить с помощью следующего итеративного алгоритма:

$$P^{(k+1)} = P^{(k)}\tilde{A} + r^{(k)}P^{(k)}B, \quad (*)$$

$$r^k = \frac{P^{(k)}(I - \tilde{A})\bar{X}}{P^{(k)}B\bar{X}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь X - произвольный положительный вектор выпуска (фиксированное значение). При любом положительном первоначальном значении вектора цен этот алгоритм сходится к равновесным значениям вектора цен и нормы прибыли P^* и r^* . Как явствует из способа вычислений, в ходе итеративного процесса неизменно остается справедливым равенство

$$P^{(k)}X = P^{(k+1)}X, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, при этом методе оговаривать условие индексации цен нет необходимости.

Комментарии

1. Метод итераций по формуле (*) - это метод, имеющий ясный экономический смысл, поскольку на стадии k -й итерации всегда можно вычислить общую сумму прибыли $P^{(k)}(I - \tilde{A})X$ общую величину капитала $P^{(k)}BX$ и получить норму прибыли как частное от деления первой величины на вторую.

2. В качестве X , вообще говоря, можно взять произвольный вектор с положительными значениями. Однако в случае, когда вычисления проводятся на основе реальных статистических данных, с точки зрения экономического смысла эффективнее использовать фактические значения объема производства в базисном году.

4.2.3. Преобразование цен по Марксу

Цены фон Неймана соответствуют марксовым ценам производства. Одной из важных проблем марксистской теории, как следует из «Капитала», является соотношение между категориями стоимости и цены производства. При помощи описанного в предыдущем параграфе метода (*) Броди можно смоделировать преобразование стоимостей в цены производства. Если вектор стоимости обозначить как

$$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

то уравнение стоимости можно записать в виде

$$\Lambda = \Lambda A + 1, \quad (4.2.3.1)$$

где **1** - вектор коэффициентов затрат труда. Сделаем допущение, что в **A** включена и сумма амортизации основного капитала. Соответственно стоимость будет определяться как

$$\Lambda = 1(I - A)^{-1} \quad (4.2.3.2)$$

Заметим, что итеративная формула (*) (из предыдущего параграфа) справедлива при любом положительном исходном значении вектора цен. Естественно, в качестве такого значения можно выбрать и цены-стоимости:

$$\mathbf{P}^{(0)} = \Lambda. \quad (4.2.3.3)$$

Тогда путем последовательных итераций из цен-стоимостей **Λ** получаем цены производства **P***:

$$\Lambda \rightarrow P^{(1)} \rightarrow P^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow P^*.$$

Из параграфа 4.2.2 справедливо выражение

$$\Lambda X (= P^{(0)} X) = P^{(1)} X = P^{(2)} X = \dots = P^* X, \quad (4.2.3.4)$$

поэтому сумма стоимостей будет равна сумме цен производства. Таким образом, автоматически выполняется соответствующее положение Маркса.

Комментарии

1. Расчет стоимостей производится непосредственно путем вычисления обратной матрицы.

4.3. МАГИСТРАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

4.3.1. Магистральная модель накопления

Если динамическую модель межотраслевых связей преобразовать в систему неравенств и ввести в нее целевую функцию, то оптимальное решение модели можно найти путем решения задачи линейного программирования. Связь между оптимальным решением и моделью фон Неймана (магистральной моделью) отчетливо демонстрируют теория магистралей и теорема магистральной.

Что такое магистраль? Это скоростная платная автострада. Так, например, для того чтобы добраться из Макеевки в Петровский район г. Донецка, наиболее целесообразно сначала проехать до хутора Широкий по скоростной автомагистрали, а затем уже съехать на ответвляющуюся от нее обычную дорогу. Основная идея теории магистральной заключается в том, что для обеспечения наиболее эффективного экономического роста желательно поступать аналогичным способом - сначала вывести экономику на магистральный путь (траекторию фон Неймана), а по истечении определенного, причем

длительного времени, вывести ее к задуманной цели. Имеется два основных типа магистральных моделей - магистральная модель накопления (магистральная модель конечного состояния) и магистральная модель потребления. Начнем с рассмотрения первой из них.

Магистральную модель накопления, выраженную в виде закрытой системы стоимостных значений, целью которой является максимизация накопленной суммы капитала в конце планового периода, можно сформулировать как многомерную задачу линейного программирования:

$$PBX(T) \rightarrow \max \text{ при ограничениях}$$

$$\begin{cases} X(t) \geq \tilde{A}X(t) + B(X(t+1) - X(t)), & t = 0, 1, \dots, T \\ X(t) \geq 0, & t = 0, 1, \dots, T, \end{cases} \quad (T1)$$

где $X(t)$ - вектор выпуска продукции за период времени $t = 0, 1, \dots, T$ размера $(n \times 1)$; $\tilde{A}$ и B - соответственно, неотрицательная матрица коэффициентов увеличения затрат и матрица коэффициентов капитала, обе размера $(n \times n)$. P - заданный вектор размера $(1 \times n)$ оценки запасов в конечный (последний) период. При этом вектор $X(0)$ является заданным, причем

$$(I - \tilde{A} + B)X(0) > 0, \quad PB \geq 0. \quad (4.3.1.1)$$

Матрицы $\tilde{A}$ и B определяются следующим образом:

$$\tilde{A} = A + hv; \quad A = A^{(1)} + A^{(2)}; \quad B = B^{(1)} + B^{(2)}.$$

Здесь A , $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ есть неотрицательные матрицы размера $(n \times n)$ коэффициентов потока ресурсов, а именно затрат всех видов ресурсов (A), текущих затрат ($A^{(1)}$), амортизации основного капитала ($A^{(2)}$). Матрицы B , $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ - неотрицательные матрицы размера $(n \times n)$ коэффициентов состояния активов, а именно - всех видов активов в целом (B), активов в виде основных фондов ($B^{(1)}$) и в виде товарных запасов ($B^{(2)}$). Вектор h - вектор-столбец коэффициентов потребления-потока размера $(n \times 1) > v$ - положительный вектор нормы добавленной стоимости.

Уравнение магистрали объема выпуска, являющейся одной из возможных траекторий в рамках задачи (T1), может быть записано в форме

$$X = (\tilde{A} + gB)X; \quad eX = 1, \quad (4.3.1.2)$$

где e - единичный вектор, т. е. $e = (1, \dots, 1)$; X - вектор равновесного объема выпуска; g - положительное значение темпа роста равновесного выпуска. Вышеприведенное уравнение можно переписать в виде

$$g^{-1} X = (I - \tilde{A})^{-1} BX.$$

Сделаем следующие допущения:

1. $(I - \tilde{A})^{-1} > 0$, а каждая строка матрицы B имеет хотя бы один положительный элемент. При этом допущении $(I - \tilde{A})^{-1} B > 0$. Тогда по теореме Перрона-Фробениуса для положительных матриц максимальный по своему абсолютному значению

характеристический корень λ^* матрицы $(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{B}$ и принадлежащий ей положительный правый характеристический вектор $\mathbf{X}^*$ однозначно определены. И не существует никаких других неотрицательных характеристических векторов. Имеющая ясный экономический смысл магистральная модель представляет собой полупрямую $\{\alpha \mathbf{X}^* : \alpha \geq 0\}$, а темп прироста g^* для равновесного роста определяется как величина, обратная λ^* .

2. Если к сделанному выше допущению добавить второе $\det(\mathbf{B}) \neq 0$, а также ряд дополнительных ограничений, то применительно к достаточно длительному периоду времени $\mathbf{T}$ между магистральной траекторией, задаваемой решением задачи (Т1) независимо от первоначального значения $\mathbf{X}(0)$ и вектора оценок $\mathbf{P}$, оказываются справедливыми отношения, описываемые «сильной» и/или «слабой» теоремами о магистрали. «Слабая» теорема утверждает, что, за исключением определенного периода T_0 , не зависящего от продолжительности планового периода, все оптимальные траектории сосредоточиваются в относительной близости от магистральной. «Сильная» же состоит в утверждении, что те промежутки времени T_0 , на которых оптимальные траектории удалены от магистральной, ограничены началом и концом планового периода, а в середине этого периода оптимальные траектории располагаются в относительной близости к магистральной. Подобные же теоремы можно составить и для задачи, двойственной по отношению к названной, а именно для магистральной модели цен. Однако здесь мы затронем лишь уравнение, двойственное по отношению к уравнению (4.3.1.2), т. е. магистральное уравнение (индекса) цен. Обозначив вектор индекса равновесных цен через $\mathbf{P}$ ($1 \times n$), а равновесную норму прибыли через g , это уравнение можно записать в виде:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}} + g\mathbf{B}); \mathbf{P}e' = \mathbf{P}(0)e', \quad (4.3.1.3)$$

где $\mathbf{P}(0) = (1, \dots, 1)$ - вектор индекса цен в начальном периоде.

Если сохраняется первое допущение (см. выше), то равновесное значение нормы прибыли g^* получается аналогичным образом как величина, обратная положительному характеристическому вектору неотрицательной матрицы

$\mathbf{B}(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}$ с наибольшим абсолютным значением, а соответствующий ему левый характеристический вектор определяет индекс равновесных цен $\mathbf{P}^*$ (в рассматриваемой ниже задаче $\mathbf{P} = (1, \dots, 1)$). Из уравнений (4.3.1.2) и (4.3.1.3) вытекает, что

$$g^* = g^* = \mathbf{P}^*(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}) \mathbf{X}^* / \mathbf{P}^* \mathbf{B} \mathbf{X}^*.$$

4.3.2. Магистральная модель потребления

Магистральная модель накопления характеризовалась тем, что целью плана являлась максимизация накопления капитала к концу планового периода, а само накопление рассматривалось в качестве единственного ограничителя роста. Однако целью планирования экономики все же, видимо, должно быть, повышение уровня потребления, да и было бы слишком нереалистично рассматривать проблемы современного экономического развития без учета ограниченности трудовых ресурсов. Одной из моделей планирования, учитывающих в качестве важнейшего условия, ограничивающего рост, предложение рабочей силы и ставящих своей целью максимизацию уровня потребления, является магистральная модель потребления.

Пусть $L(t)$ - предложение рабочей силы в период времени t , где $L(0)$ задано, а темп прироста g является постоянной экзогенной величиной, тогда справедливо уравнение

$$L(t) = (1 + g)^t L(0).$$

Значение g определяется темпами прироста занятого населения g_1 и средними темпами прироста производительности труда

$$(g = g_1 + g_2 + g_1 g_2).$$

В случае, когда рост производительности труда порождается нейтральным техническим прогрессом по Хароду, наше уравнение выдержит проверку анализом практического опыта. В качестве целевой функции возьмем динамический вариант целевой функции Канторовича, который подразумевает максимизацию накопленной общей суммы потребления, полагая структуру потребления неизменной на протяжении всех периодов. После всего вышесказанного можно построить магистральную модель потребления:

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^T (1 + \delta)^{-t} \theta(t) \rightarrow \max \\ & \begin{cases} X(t) \geq AX(t) + B(X(t+1) - X(t) + \theta(t))_q; \\ IX(t) \leq (I + g)^t L(0); \\ X(t) \geq 0, \quad \theta(t) \geq 0 \quad (t = 0, 1, \dots, T). \end{cases} \end{aligned} \quad (T2)$$

Векторы $X(0)$, $X(T + 1)$ заданы, причем

$$(I - A + B) X(0) > 0, \quad X(T + 1) \geq 0.$$

Здесь q - неотрицательный вектор структуры потребления в единичном составляющем отрезке размерности $(n \times 1)$; $\theta(t)$ - объем потребления в период времени t ; δ - процент скидки.

В отношении этой модели, как и в отношении магистральной модели накопления, если сделать ряд допущений, в частности,

$$(I - A)^{-1} > 0, \quad (I - A - gB)^{-1} > 0 \text{ и } \det(B) \neq 0,$$

справедливо следующее утверждение: между оптимальными траекториями производства и потребления, являющимися решениями задачи (T2), с одной стороны, и траекториями равновесного роста при определенной структуре производимых благ и постоянном темпе прироста (т. е. магистральными траекториями производства и потребления) - с другой, существуют соотношения, вытекающие из «сильной» и/или «слабой» теоремы магистрали, которые подробно описаны в предыдущем параграфе.

Магистральные траектории производства и потребления могут быть получены на базе положительных значений решений X^* и θ^* уравнения

$$X = AX + gBX + \theta q; \quad 1X = L(0) \quad (4.3.2.1)$$

при помощи формул

$$X^*(t) = (1 + g)^t X^*; \quad \theta^*(t) = (1 + g)^{-t} \theta^*. \quad (4.3.2.2)$$

Здесь принимаем, что вектор объема производства в период после окончания планового периода, т. е. вектор $X(T + 1)$, равен вектору $X^*(T + 1)$. Иначе говоря,

$$X(T + 1) = X^*(T + 1) = (1 + g)^{T+1} X^*.$$

Таким образом, анализ свойств магистральной модели потребления сконцентрировался в основном на процессе урегулирования начального периода. Уравнение индекса цен, являющееся двойственным по отношению к формуле (4.3.2.1), выглядит следующим образом:

$$P = P_A + 1 + rP_B; \quad r = g.$$

При изучении магистральных моделей возникает ряд проблем, на которых здесь мы не будем подробно останавливаться. Наша задача заключалась лишь в том, чтобы показать принципиальную возможность использования этих моделей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
Основные сведения и понятия о математических методах в экономике	5
Математическая модель экономического объекта	6
Трудности и предостережения	7
Основные типы моделей	9
Замечания и выводы	10

1. МИКРОЭКОНОМИКА

1.1. ПОТРЕБЛЕНИЕ	13
1.1.1. Кривые безразличия	13
1.1.2. Предельная полезность и предельная норма замещения. Численное дифференцирование	15
1.1.3. Теория потребления	15
1.2. ПРОИЗВОДСТВО	16
1.2.1. Изокванты и предельная производительность	16
1.2.2. Теория производства	20
1.3. РЫНОК	23
1.3.1. Паутинообразная модель	23
1.3.2. Модель общего равновесия	26
1.3.3. Двухсекторная модель	31

2. МАКРОЭКОНОМИКА

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ В МАКРОЭКОНОМИКЕ	35
2.1.1. Основные понятия в макроэкономике	35
2.1.2. Макро модель роста	37
2.1.3. Модель делового цикла	39
2.2. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В МАКРОЭКОНОМИКЕ	41
2.2.0. Введение в линейный регрессионный анализ	42
2.2.1. Оценка функции потребления	44

2.2.2.	Оценка производственной функции Кобба-Дугласа. Простейшие методы линеаризации	46
2.2.3.	Оценка функции CES по нелинейному методу наименьших квадратов.	48
	Нелинейный метод наименьших квадратов	49
2.2.4.	Макромодель Клейна	53

3. АНАЛИЗ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ

3.1.	ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ	54
3.1.1.	Определение равновесного выпуска итеративным методом	54
3.1.2.	Определение равновесного выпуска прямым методом	60
3.1.3.	Определение равновесных цен	61

4. УПРАВЛЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

4.1.	ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ	63
4.1.1.	Решение задачи линейного программирования. Метод обратной матрицы	63
	Теоретические основы линейного программирования и метод обратной матрицы	64
4.1.2.	Обобщенная модель Леонтьева	73
4.1.3.	Анализ деятельности. Модель Канторовича	75
4.1.4.	Модель линейного программирования фоннеймановского типа	77
4.2.	ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ	78
4.2.1.	Траектория равновесного роста. Траектория фон Неймана	78
4.2.2.	Равновесные цены. Цены фон Неймана	80
4.2.3.	Преобразование цен по Марксу	81
4.3.	МАГИСТРАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ	82
4.3.1.	Магистральная модель накопления	82
4.3.2.	Магистральная модель потребления	84

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Справочное пособие для экономистов

Породников Андрей Викторович
Породников Виктор Дмитриевич

Редактор Л.Х. Соловьева