В.Д. Породников

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1 9 9 5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов экономических и учетно-финансовых факультетов высших учебных заведений по курсу "Теория вероятностей и математическая статистика". Поэтому примеры и упражнения взяты из социально-экономической сферы.

В наше время, когда происходит бурный процесс математизации наших знаний нельзя обойтись без точных количественных методов описания самых разнообразных процессов. Современная организация производства и торговли, банковского дела и экономики, биология и медицина и т.д. требует точность и ясность изложения. Научное изложение должно быть кратким и вполне определенным. Без этого требования не может быть науки как системы знаний. Математическая символика позволяет автоматизировать проведение тех действий, которые необходимы для получения выводов, сжимать запись информации, делать ее обозримой и удобной для дальнейшей обработки.

Сейчас, в нашей высшей школе, в перечень дисциплин экономических специальностей все больше и больше включается математическая экономика. Переход к рыночной экономике обусловил необходимость подготовки специалистов, владеющих аппаратом анализа и выбора экономических вариантов на основе матиматико-статистических исследований, которые реализуются при помощи программного обеспечения на ЭВМ.

Пособие состоит из двух частей. Первая, которая включает основы теории вероятностей, раскрывает аксиоматическое построение теории вероятностей, на основе которого ведется изложение случайных событий и их вероятностей; случайные величины, их распределения и числовые характеристики; предельные теоремы теории вероятностей. Во второй части рассмотрены элементы математической статистики и некоторым ее применениям в экономических исследованиях.

Автор благодарен рецензенту доценту кафедры математики и математических методов в экономике Н. В. Румянцеву за сделанные замечания, которые в значительной мере способствовали улучшению структуры и способа изложения текстов лекций.

Автор будет признателен всем заинтересованным специалистам за возможные замечания и предложения по улучшению пособия.

В в е д е н и е

Богатство и разнообразие применений теории вероятностей привлекают к ней многих людей. Одной из важнейших сфер приложения теории вероятностей является экономика. В настоящее время трудно представить исследование и прогнозирование экономических явлений без использования эконометрического моделирования, регрессионного анализа, трендовых и сглаживающей моделей и других методов, опирающихся на теорию вероятностей. Общей тенденцией современной математики и ее приложений состоит в резком повышении роли тех разделов науки, которые анализируют явления, имеющие “случайный” характер, и основываются на теории вероятностей. Статистическая теория во многом основана на теории вероятностей, хотя здесь есть и обратная связь: при построении вероятностной модели также используются данные статистики. Для неискушенного человека слова “теория вероятностей” производит несколько странное впечатление, что теория вероятностей - это наука, а ее предмет- случайность, которая, казалось бы, не поддается никакому научному предсказанию. В дальнейшем мы увидим, что противоречие здесь кажущееся, так как теория вероятностей изучает свойства массовых случайных событий, способных многократно повторяться при воспроизведении определенного комплекса условий. Познавательная ценность теории вероятностей обусловлена тем, что массовые случайные явления в своем совокупном действии создают строгие закономерности.

Современная теория вероятностей начинается с установлением аксиоматики, которую впервые в законченном виде сформулировал в 1933 году А.Н. Колмогоров в книге « Основные понятия теории вероятностей ». Хотя возникновение теории вероятностей как науки относится к середине XVII века и связано с именами Паскаля, Ферма, Гюйгенса, но отдельные задачи, подсчета шансов в азартных играх, рассматривались ранее - XV-XVI в.в. итальянскими математиками Кардано, Пачоли, Тарталья и др.. Пожалуй работы Паскаля и Ферма можно рассматривать лишь как предысторию теории вероятностей, а настоящая история начинается с закона больших чисел Я. Бернулли (« Искусство предположений » -1713г.) и найденного вскоре Муавром нормального приближения к биномиальному распределению («Аналитическая смесь », 1730г.).

Дальнейшее развитие этой науки связано с именами Лапласа, Пуассона, Гаусса. Важный период в развитии теории вероятностей связан с именами П.Л. Чебышева, А.А. Маркова, А.М. Ляпунова, создавших эффективные методы предельных теорем. Первые попытки установления аксиоматики принадлежат С.Н. Бернштейну, Р. Мизесу, Э. Борелю.

Часть I

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Тема: Случайные события. Вероятность.
Лекция №*1*.

1. Основные понятия теории вероятностей.

Предметом теории вероятностей является математический анализ случайных явлений. Основное свойство любого случайного события, независимо от его природы, - мера объективной возможности реализации события.

Рассмотрение начнем с знакомства с основными понятиями в теории вероятностей. Будем использовать термин *эксперимент,* для того чтобы, описать некоторые опыты, подобные бросанию одной или нескольких монет, бросанию игральной кости, вытаскиванию карт из колоды. Или более серьезных опытов, связанных с научными исследованиями. Мы будем использовать термин эксперимент для описания любого действия, которое возможно повторить, не изменяя его условий. Обычно точный результат такого опыта (*стохастического* эксперимента) невозможно предсказать заранее.

Множество всех исходов стохастического эксперимента Будем обозначать Ω и называть *пространством элементарных* событий (исходов). Т.е. под элементарным событием будем понимать исход эксперимента.

Пример 1.1. Пусть эксперимент состоит в бросании монеты один раз. Исходами эксперимента ω_1-(Г), ω_2-(Р): Г-{выпал герб}, Р-{выпала решетка} или $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$ - пространство элементарных событий.

Таким образом, когда мы будем говорить о случайном событии А (которые мы будем обозначать большими латинскими буквами), то при этом подразумевается следующее:

- наблюдается некоторый случайный (стохастический) эксперимент, который (в принципе) может быть повторен достаточно много раз;
- однократное проведение эксперимента позволяет фиксировать элементарный исход эксперимента u (элементарные события - исходы одновременно не осуществляются);
- среди исходов эксперимента есть такие, которые благоприятствуют событию А, и будем говорить, что в данном эксперименте событие А осуществилось, если наблюдается один из исходов, благоприятствующих событию А. Таким образом, событие А мыслится, как совокупность некоторых исходов эксперимента, т.е.

$$A = \{\omega_i,\ i= m_1,m_2,\ldots,m_n\},\ \text{где}\ \omega_i\in\Omega,\ \ (i=1,2,3,\ldots,n).$$

Пример 1.2. Монету бросают дважды. Пусть случайное событие

A = {Г-герб появится хотя бы один раз}.

Тогда

Ω = { ω_1=(ГГ), ω_2=(РГ), ω_3=(ГР), ω_4=(РР) }
A = { ω_1, ω_2, ω_3 }

Пример 1.3. Предположим, что игральную кость подбрасывают один раз.
A = {выпала грань с четным числом очков},
B = {выпала грань с числом очков, которые делятся на 3 }.

Тогда Ω = { ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 }, где ω_i- элементарное событие, состоящее в том, что выпала грань с i очками (i=1,2,3,4,5,6) и A={ω_2, ω_4, ω_6 }, B={ω_3, ω_6 }.

Подчеркнем два основных момента, составляющих понятие случайности в теории вероятностей: массовость ситуации (возможность многократного повторения эксперимента) и устойчивость частот.

Поясним последнее обстоятельство. Пусть при осуществлении некоторых условий стохастический эксперимент повторяется N раз, в которых событие A имело место N(A) раз. Число N(A) называется *частотой появления события* A, а отношение N(A)/N - *относительной частотой события* A. Оказывается, при больших N относительная частота N(A)/N для случайных массовых событий обладает свойством устойчивости, которое состоит в том, что в нескольких сериях из достаточно больших N_1,N_2, ...,Ns наблюдений события A в одних и тех же условиях будем иметь приближенные равенства

$$\frac{N_1(A)}{N} \cong \frac{N_2(A)}{N} \cong \ldots \cong \frac{N_s(A)}{N}$$

Пример 1.4. Рассмотрим этот факт на примере с подбрасыванием правильной симметричной монеты.

Экспериментатор	Число подбрасываний N	Число “Г” N(A)	Относит. частота N(A)/N
Опыт Бюффона	4040	2048	0.5069
Опыт Пирсона	12000	6019	0.5016
Опыт Пирсона	24000	12012	0.5005

Таким образом, относительная частота события A колеблется около одного и того же числа, которое характеризует данное случайное событие, как мера возможности его появления или не появления.

Отметим еще раз то обстоятельство, что некоторое событие может быть рассмотрено средствами теории вероятностей, если присутствует массовость ситуации и устойчивость частот. Только в этом случае мы можем говорить о вероятности случайного события.

Определение 1.1. Под *вероятностью случайного события* мы будем понимать числовую неотрицательную функцию $P(A)$. Говорят, что заданы вероятности элементарных событий, если на Ω задана числовая неотрицательная функция $P(.)$ такая, что $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$, где число $P(\omega) > 0$ называется *вероятностью элементарного события*.

(Говорят также, что $P(A)$ задает на Ω *распределение вероятностей*).

Таким образом, вероятностью события A называется число

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i), \qquad (1.1)$$

где сумма берется по всем ω_i *принадлежащим A.*

Пример 1.5. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, $P(\omega_k) = \frac{1}{N}$, $k=1,2, ..., N$,

тогда

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = \frac{m}{N}, \qquad (1.2)$$

где m - число элементарных событий, содержащихся в A. Это есть классическая модель в теории вероятностей.

Пример 1.6. Используя формулу (1.2) найти вероятности событий из примера 1.3.

$P(\omega_i) = 1/6, \quad (i = 1,2,...,6);$

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = P(\omega_2) + P(\omega_4) + P(\omega_6) = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = \sum_{\omega_i \in B} P(\omega_i) = P(\omega_3) + P(\omega_6) = \frac{1}{3}.$$

Лекция №2.

2. Алгебра событий.

В реальном опыте кроме взаимоисключающих исходов (элементарных событий) можно указать множество других событий, которые являются подмножествами Ω – пространства элементарных событий из класса $\Im$.
Множество Ω Тогда Ω тоже можно рассматривать как событие ($\Omega \in \Im$), которое характеризуется тем, что в результате эксперимента оно необходимо происходит. называют *достоверным событием*. Событие, которое при реализации комплекса условий в данном эксперименте никогда не происходит называется *невозможным событием* ($\varnothing$). Т.к. это событие, которому не благоприятствует ни один элементарный исход.

Здесь нужно отметить, что Ω - пространство элементарных событий может иметь как конечное число элементарных событий, так и счетное или несчетное. В случае произвольного Ω событиями будем называть только подмножества из некоторого класса $\Im$ подмножеств Ω, который будет введен позднее: после определения операций (действий) над событиями, совпадающих с операциями над множествами.

Пример 2.1. (показывающий, что пространство элементарных событий не всегда конечно). Два игрока поочередно бросают монету до тех пор, пока не выпадет герб. Выигрывает тот , кто сделает последний ход. Найти вероятность события А - {выиграет первый игрок}.

Решение: Рассмотрим элементарные исходы в данном эксперименте
ω_1 =(г), ω_2 =(рг), ω_3 =(ррг), ... , ω_n=(рр...рг), ... т. е. $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, ... \}$.
Тогда $P(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$. Ясно, что $P(\Omega) = 1$, а событие $A = \{\omega_{2k+1}, {}_{k>0} \}$,
теперь

$$P(A) = \sum_{k\ge 0} P(\omega_{2k+1}) = \sum_{k\ge 0} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{2}{3}.$$

Итак, пусть пространство элементарных событий Ω любой природы. События А, В, С этого пространства будем рассматривать как подмножества Ω . Рассмотрим теперь действия над событиями аналогично действиям над подмножествами. Будем писать $A \subset B$, если событие А влечет за собой событие В, т.е. если событие А происходит, то и событие В происходит. Очевидно, что для любого $A \subset \Omega$. По определению $\varnothing \subset A$.
Если $A \subset B$, а $B \subset A$, то $A = B$ т.е. и события А и событие В происходят тогда и только тогда, когда происходит одно из элементарных событий ω, из которых они состоят.

1. *Суммой* двух событий (или объединением) $A \cup B$ называется событие, происходящее тогда и только тогда, когда происходит или событие А, или событие В
(по крайней мере одно из них).

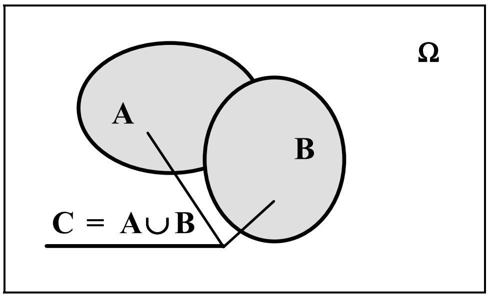

Рис. 2.1

Заметим, что для любого $A \subset \Omega$: $A \cup \Omega = \Omega$,

$$A \cup \varnothing = A.$$

2. *Произведением* (или пересечением) двух событий $A \cap B$ называется событие, происходящее тогда и только тогда, когда происходит и событие A, и событие B (вместе).

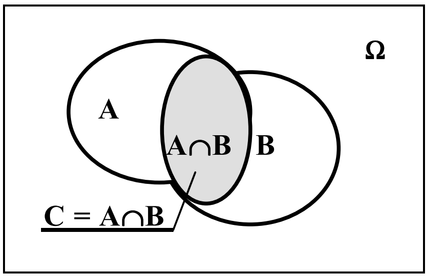

Рис. 2.2

Заметим, что для любого $A \subset \Omega$: $A \cap \Omega = A$,

$$A \cap \varnothing = \varnothing.$$

События A и B называются *несовместными*, если $A \cap B = \varnothing$, т.е. появление одного из них исключает появление другого.

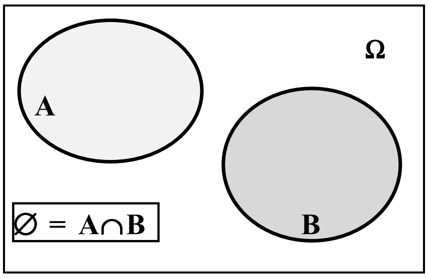

Рис. 2.3

3. *Разностью* двух событий $A \setminus B$ называется событие, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A и не происходит событие B, аналогично $B \setminus A$.

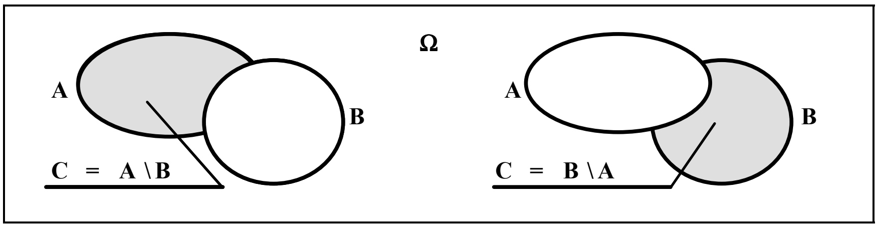

Рис. 2.4

4. Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ называются *противоположным* событием, Событие $\overline{A}$ означает, что событие А не произошло.
Два события называются противоположными, если

а). $A \cap B = \varnothing$, т.е. А и В - несовместимы;

б). $A \cup B = \Omega$, а их сумма есть достоверное событие. Тогда $\overline{A}$ = В.

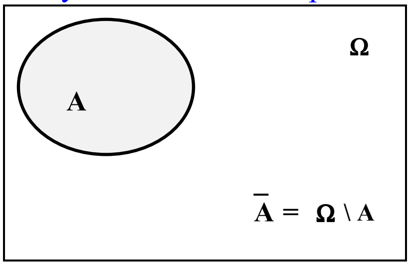

Рис. 2.5

5. Последовательность событий A_1, A_2, A_3, ... A_n называется *полной группой событий,* если $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ и, если $A_i \cap A_j = \varnothing$, ($i \neq j$) для любых i,j = 1,2,3, ..., n, то тогда эта группа называется *полной группой попарно несовместимых событий.*

Полезны следующие равенства:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \qquad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}; \qquad A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A);$$

$$A \cap A = A; \qquad A \cup A = A; \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Пример 2.2. Пусть симметричная игральная кость подбрасываемая один раз, тогда $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6 \}$, где ω_i - { выпала грань, на которой i - очков (i=1,2,3,4,5,6)}. Событие $A = \{ \omega_2, \omega_4, \omega_6 \}$ - состоит в том, что выпала четная грань.

Событие $B = \{ \omega_3, \omega_6 \}$ - выпала грань, на которой число очков кратно трем.

Рассмотрим события:

а) $C = A \cup B$ - по определению суммы двух событий

$C=\{\ \omega_2, \omega_3, \omega_4, \ \omega_6\ \}$ - состоит в том, что выпала грань с числом очков не менее двух, но не равное пяти;

б) $D=A \cap B$ - по определению произведения двух событий

$D=\{\ \omega_6\ \}$ - состоит в том, что выпала грань с числом очков равное шести;

в) $A \setminus B = H =\{\ \omega_2, \omega_4\ \}$;

г) $B \setminus A = K = \{\ \omega_3\ \}$;

д) $\Omega \setminus A = \bar{A} = \{\ \omega_1, \omega_3, \omega_5\ \}$ – выпала не четная грань;

е) $\Omega \setminus B = \bar{B} = \{\ \omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\ \}$;

ж) $A \cap \bar{B} = A \setminus B = H$; $\bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B} = \{\ \omega_1,\ \omega_3\ \}$;

з) $A \cup B = H \cup K \cup D$.

Понятие произведения и суммы переносятся на бесконечные последовательности событий. Событие

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ \ldots \cup A_n \cup \ \ldots = \bigcup A_n$ состоит из элементарных событий, принадлежащих хотя бы одному из событий A_n $n=1,2,3,\ldots$.

Событие

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ \ldots \ \cap A_n \cap \ \ldots = \bigcap A_n$ состоит из элементарных событий, принадлежащих каждому из событий A_n $n=1,2,3,\ldots$.

Перейдем теперь к определению некоторых подмножеств множества Ω.

Для любых подмножеств множества Ω вероятность не всегда удается определить (в определении 1.1 было отмечено, что вероятность будет рассматриваться как функция от события). В тех случаях, когда класс подмножеств приходиться ограничивать, мы будем требовать от него замкнутости относительно введенных операций над событиями.

Пусть Ω - произвольное пространство элементарных событий, а - некоторый класс подмножеств множества Ω.

Определение 2.1. Назовем класс *алгеброй событий,* если

1) $\Omega \in$;
2) $A \in \ \Rightarrow \bar{A} \in$;
3) $A, B \in \ \Rightarrow A \cup B \in$.

Замечание: из определения 2.1 в частности следует, что $\varnothing \in$ т.к.

$\varnothing = \bar{\Omega}$; $A, B \in \ \Rightarrow A \cap B \in$, $A \setminus B \in$, $B \setminus A \in$.

Пример 2.3. Для примера 2.2 построим - алгебру событий:

$\varnothing, \{\ \omega_1\ \}, \{\ \omega_2\ \}, \{\ \omega_3\}, \{\omega_4\ \}, \{\ \omega_5\}, \{\ \omega_6\ \}, \{\ \omega_1, \omega_2\ \},$

$\{\omega_2, \omega_3\}$, ... , $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, ... ,$\{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, ... , $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Таким образом, в этом примере - алгебра событий состоит из $2^6 = 64$ событий.

Замечание: Если Ω состоит из N элементарных событий, то число всех подмножеств равно 2^N.

Определение 2.2. - алгебру событий назовем σ - алгеброй (сигма - алгебра) или *борелевской алгеброй,* если

$$3\backslash)\ A_n \in \quad (n = 1,2,3, ...) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \ , \text{ а } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \ .$$

3. Вероятностное пространство.

В пунктах 1,2 были введены три объекта:

Ω - пространство элементарных событий;

- класс событий;

$P(\cdot)$ - числовая функция, определенная на

(при этом P(A) - есть вероятность события $A \in$).

Определение 2.3. Тройку $\{\Omega, \ , P\}$ будем называть *вероятностным пространством,* если выполнены следующие аксиомы:

A1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in$ (не отрицательность);

A2. $P(\Omega) = 1$ (нормированность P(.));

A3. $P(\ ) = P(A) + P(B)$, если $A, B \in$,

$A \cap B = \varnothing$ (конечная аддитивность P(.));

A3'. Для любой убывающей последовательности

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ ... \ \supset A_n \supset ...$$

событий из такой, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$, (непрерывность $P(.)$).

З а м е ч а н и е. В дальнейшем мы почти не будем использовать A3' и дополнительное предположение о замкнутости относительно операций в счетном числе.

ТЕМА: Основные теоремы теории вероятностей.

Лекция № 3.

4. Свойства вероятностей.

Из определения 2.1 и аксиом (A1,A2,A3) установим ряд важнейших свойств вероятностей случайных событий.

Теорема 3.1. Вероятность события $\overline{A}$, противоположного событию A равна

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) . \qquad (3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Т.к. $A \cup \overline{A} = \Omega$

$A \cap \overline{A} = \varnothing$, то согласно A3, A2 имеем

$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$, откуда $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. ◆

Следствие 3.1. Вероятность невозможного события равна нулю

$$P(\varnothing) = 0$$

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Положим в равенстве (3.1), которое справедливо для каждого случайного события $A \in$, $A = \Omega$. Тогда $P(\varnothing) = P(\Omega) = 1 - P(\Omega) = 0$.

З а м е ч а н и е: Вероятность невозможного события равна нулю, но событие нулевой вероятности не обязательно есть невозможное событие.

Теорема 3.2. Пусть A *и* B случайные события, такие, что $A \subset B$ *и* $A,B \in$ Тогда

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \qquad (3.2)$$

Д о к з а т е л ь с т в о:

Так как $A \subset B$, то $B = A \cup (B \setminus A)$, причем $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$.
Поэтому по A3 $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$, откуда получаем

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A). \ ◆$$

Следствие 3.2. Если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из A1 т.к. $P(B \setminus A) \ge 0$, то из равенства 3.2 имеем $P(B) - P(A) \ge 0$, откуда $P(B) \ge P(A)$.

Следствие 3.3. Для каждого случайного события $A \in$, $P(A) \le 1$.

В самом деле $A \subset \Omega$, поэтому $P(A) \le P(\Omega) = 1$.

Теорема 3.3. (*Теорема сложения вероятностей*).

Пусть A и B случайные события $A, B \in$. Тогда

$$P(B \cup A) = P(B) + P(A) - P(A \cap B). \qquad (3.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Представим $A \cup B$ в виде объединения трех попарно не пересекающихся событи $A \cup B = \{A \setminus (A \cap B)\} \cup \{B \setminus (A \cap B)\} \cup (A \cap B)$.

По аксиоме А3 и теореме 3.2 получим

$$P(A \cup B) = P\{\{A \setminus (A \cap B)\} \cup \{B \setminus (A \cap B)\} \cup (A \cap B)\} =$$
$$= P\{A \setminus (A \cap B)\} + P\{B \setminus (A \cap B)\} + P(A \cap B) =$$
$$= P(A) - P(A \cup B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \ \blacklozenge$$

Следствие 3.4. Из теоремы 3.3 легко получить формулу для вероятности суммы любого конечного числа событий.

Путь $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in$ - случайные события. Тогда

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i1 \le i2 \le n} P(A_{i1} \cap A_{i2}) + \sum_{1 \le i1 \le i2 \le i3} P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap A_{i3}) - \dots$$
$$+ (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n). \qquad (3.3')$$

Докажите эту формулу для случая n =3.

5. Условные вероятности.

В ряде случаев приходиться рассматривать вероятности случайных событий, если известно, что произошло некоторое другое случайное событие, имеющее положительную вероятность.

Сначала рассмотрим несколько примеров:

Пример 3.1. (*классическая модель*). В урне находятся десять шаров, из них шесть белых. Пусть события

B - { первый, извлеченный шар будет белый };

A - { второй, извлеченный шар будет белый }.

Здесь $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$, $P(\omega_i) = 0.1$; (i = 1, ..., 10).

Определим, используя классическое определение

$P(B) = m_B/n = 6/10 = 0.6$,

$P(A) = m_A/n = 6/10 = 0.6$,

$$P(A \cap B) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{\dfrac{6!}{2!(6-2)!}}{\dfrac{10!}{2!(10-2)!}} = \frac{1}{3}.$$

Пусть теперь известно, что событие B имело место т.е. произошло, это значит , что один белый шар извлечен из урны, определим в этой ситуации вероятность события A, а чтобы подчеркнуть это обстоятельство введем для такого случая новое обозначение.

$$P(A/B)=\frac{m_A}{n_1}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/3}{6/10}=\frac{5}{9}.$$

Пример 3.2. Путь пространство элементарных исходов состоит из n одинаково возможных событий, событию A благоприятствуют m_A элементарных исходов, B - m_l исходов и событию $A \cap B$ - m_r исходов.

Найдем $P(A/B)$.

Заметим, что $P(B) = m_l/n$, $P(A \cap B) = m_r/n$.

Если событие B произошло, то произошло одно из m_l элементарных событий, и тогда событие A произойдет, когда произойдет одно из m_r элементарных событий, благоприятствующих событию $A \cap B$. Поэтому

$$P(A/B) = \frac{m_r}{m_l} = \frac{m_r/n}{m_l/n} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Определение 3.1. Пусть (Ω, , P) - вероятностное пространство, $P(B) > 0$, $B \in$. *Условной вероятностью* события $A \in$ при условии, что событие B имело место называют отношение

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \qquad (3.4)$$

Из определения 3.1 и свойств вероятности следуют свойства условной вероятности:

1). $P(A/B) \geq 0$;

2). $P(\Omega/B) = 1$;

3). $P(B/B) = 1$;

4). Если A_i (i =1,2, ...) - последовательность попарно несовместимых событий $A_i \cap A_j = \varnothing$, ($i \neq j$), то $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i / B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i / B)$.

Упражнение: доказать самостоятельно 2), 4).

Теорема 3.4. (*Теорема умножения*). Если $P(B) > 0$, $P(A) > 0$, то имеет место равенства

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B). \qquad (3.5)$$

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое имело место.

Д о к а з а т е л ь с т в о: доказательство следует из равенства (3.4) и допускает следующее обобщение, которое доказывается методом математической индукции.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_n\right) = P(A_1)\ P(A_2/A_1) \ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}), \qquad (3.6)$$

где A_i ($i = 1,2, \ldots$) - это случайные события такие, что $P(A_1 \cap \ldots \cap A_к) > 0$, к=1, ..., n.

♦

6. Независимые случайные события.

Введем понятие *независимости* случайных событий, которое в теории вероятностей играет важную роль.

Определение 3.2. Пусть (Ω, , P) - вероятностное пространство. события A, B ∈ называются *независимыми*, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (3.7)$$

Для независимых событий вероятность совместного появления двух событий равна произведению их вероятностей.

Докажем некоторые простые свойства вероятностей для независимых событий.

Теорема 3.5. Пусть $P(B) > 0$. Случайные события A и B независимы тогда и только тогда, когда $P(A/B) = P(A)$

(появление события B не изменяет вероятности события A).

Доказательство:

Пусть A,B независимы и $P(B) > 0$, тогда

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)}$$

Пусть выполнено условие $P(A/B) = P(A)$, то

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A/B) = P(A),$$ а это значит, что $P(A \cap B) = P(A)$,

согласно определения 3.2 события A,B независимы.

Независимость событий взаимна, т.е. если событие A не зависит от B, то и событие B независимо от A. ♦

Пример 3.3. Рассмотрим события A и B из примера 2.2. Опыт состоит в подбрасывании игральной кости.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_3, \omega_6\}$.

Используя классическое определение получим

$P(B) = 2/6 = 1/3$;

$P(B/A) = 1/3$, тогда по теореме 3.5 A,B - независимые события.

Упражнение: Пример 3.4. Доказать, что если A,B независимы, то событие A и $\bar{B}$; $\bar{A}$ и $\bar{B}$ также независимы (Самостоятельно).

Определение 3.3. Случайные события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ *независимы в совокупности*, если для любого к (к=1, ..., n), и для любого набора индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$: ($i_k = 1, \ldots, n$) $P(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.

З а м е ч а н и е: Если A_i, ($i = 1, \ldots, n$) независимы в совокупности, то любые два события A_i и A_j ($i \neq j$) независимы. Однако из попарной независимости не следует независимость в совокупности.

Пример 3.5.(*С.Н. Бернштейна*).

На плоскость бросают тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно в красный, зеленый, голубой цвета, а на четвертую грань нанесены все три цвета.

Рассмотрим вероятности следующих событий:
К - (выпадет грань с красным цветом);
З - (выпадет грань с зеленым цветом);
Г - (выпадет грань с голубым цветом).
Очевидно, что

$$P(К) = P(З) = P(Г) = 2/4 = 1/2;$$

$$P(К \cap З) = P(К \cap Г) = P(Г \cap З) = P(Г)\, P(З) = 1/4;$$

$$P(К \cap З \cap Г) = 1/4 \neq P(К)\ P(З)\ P(Г) = 1/8.$$

7. Формула полной вероятности и формулы Байеса.

<u>**Теорема 3.6**</u>. Если $H_1, \ldots, H_i, \ldots, H_n$ - полная группа попарно несовместимых событий и $P(H_i) > 0$, ($i=1, \ldots, n$), то для любого события $A \in$, которое может произойти хотя бы с одним из $H_i \in$, имеет место равенство (*формула полной вероятности*):

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i) \qquad (3.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о:

H_i , ($i=1, \ldots, n$) образуют полную группу попарно несовместимых событий, тогда согласно определения имеем

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$;

2) $H_i \cap H_j = \varnothing$, ($i \neq j$).

В силу условий 1) и 2) имеем

$$A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} H_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (H_i \cap A).$$

Так как событие А, используя свойство дистрибутивности, можно представить в виде

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (H_i \cap A).$$

То применив к обеим частям равенства вероятность на основании аксиомы сложения вероятностей, а затем формулу умножения получим

$$P(A) = P\{\bigcup_{i=1}^{n} (H_i \cap A)\} = \sum_{i=1}^{n} P(H_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i) \ . \blacklozenge$$

З а м е ч а н и е. Формула (3.8) справедлива для счетного набора событий, удовлетворяющих условиям 1),2).

Пример 3.6. Три завода поставляют в магазин электролампы. Первый поставляет 45%, второй - 40% и третий - 15% общего количества продаваемых ламп. Продукция первого завода содержит 10% брака, второго - 12% и третьего - 5% брака. Какова вероятность купить в магазине годную лампу?

Р е ш е н и е: Пусть А-{ лампа, купленная в магазине, годна к употреблению}.

H_i -{ лампа изготовлена на i-ом заводе } (i=1,2,3). (H_i иногда называют *гипотезами*). По условию задачи имеем

$P(H_1) = 45/100 = 0.45$; $P(H_2) = 40/100 = 0.40$; $P(H_3) = 15/100 = 0.15$.

$P(A/H_1) = 1 - 10/100 = 0.9$; $P(A/H_2) = 1 - 12/100 = 0.88$;

$P(A/H_3) = 1 - 5/100 = 0.95$.

Поскольку гипотезы образуют полную группу попарно несовместимых событий, то $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$.

Используя формулу полной вероятности, получаем

$P(A) = P(H_1)\ P(A/H_1) + P(H_2)\ P(A/H_2) + P(H_3)\ P(A/H_3) = 0.45 \times 0.9 +$
$+ 0.4 \times 0.88 + 0.15 \times 0.95 = 0.9$.

Теорема 3.7. (*Формулы Байеса*).

Пусть набор $H_i \in$ образуют полную группу попарно несовместимых событий, причем $P(H_i)>0$ для каждого (i=1, ..., n). Тогда для каждого

$A \in$ случайного события, такого что $P(A) > 0$, выполнены равенства

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)}. \qquad (3.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Воспользуемся теоремой умножения 3.4 по формуле 3.5 имеем

$P(H_i \cap A) = P(H_i) \,.\, P(A/H_i) = P(A) \,.\, P(H_i/A)$, откуда получаем

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)},$$ где

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)$ - формула полной вероятности. ♦

З а м е ч а н и е: Рассмотрим общую схему применения формул Байеса при решении практических задач. Пусть $A \in$ может происходить в различных условиях, о характере которых можно сделать n гипотез $H_1, \ldots, H_i, \ldots, H_n$. Из каких-то соображений известны вероятности этих гипотез

$P(H_i)$ - (априорные вероятности). Предположим, что произведен опыт, в результате которого наступило событие A. Это должно вызвать переоценку вероятностей гипотез H_i , (i=1, ..., n); формулы Байеса и дают выражение для условных вероятностей $P(H_i / A)$ - (апостериорные вероятности).

Пример 3.6. Пусть в урне пять шаров; предположения о количестве белых шаров равновозможны. Из урны наудачу взят шар, он оказался белым. Сделаем переоценку вероятностей гипотез.

Р е ш е н и е: Пусть H_i - гипотеза, состоящая в том, что в урне i белых шаров

(i = 0,1, ...,5), т.е. возможно сделать шесть предположений. Тогда по условию задачи имеем $P(H_0)= P(H_1)= \ldots =P(H_5)= 1/6$. Введем событие A - { наудачу взятый шар белый }. Вычислим $P(H_i / A)$. Так как $P(A/H_i) = i/5$, тогда по формуле (3.9) имеем

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{i}{5}}{\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{6} \cdot \frac{k}{5}} = \frac{i}{15}.$$

Таким образом, наиболее вероятной является гипотеза H_5 т.к. $P(H_5) = 1/3$.

ТЕМА: Случайные величины и функции распределения.

Лекция №*4*

8. Случайные величины.

Одним из основных понятий в теории вероятностей является понятие *случайной величины*. Случайная величина является числовой характеристикой результата эксперимента, которая принимает свои значения, в зависимости от случая. Примером случайной величины могут быть число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости, число опрошенных граждан, которые имеют высшее образование среди взятых наугад n человек, число бракованных изделий в партии из N штук, время безотказной работы прибора и т.д..

Мы будем обозначать случайные величины греческими буквами $\alpha, \eta, \lambda, \zeta, \xi, \beta, \nu, \mu, \ldots$ и т.д. Случайная величина ξ есть число, которое ставится в соответствие каждому возможному исходу эксперимента. Поскольку исходы эксперимента описываются элементарными событиями, то случайную величину рассматривают как числовую функцию $\xi = \xi(\omega)$,
определенную на пространстве элементарных событий Ω, $\omega \in \Omega$.

Рассмотрим примеры случайных величин.

Пример 4.1. Дважды бросают симметричную монету. Пусть случайная величина $\xi -$ число появления герба.

$$\Omega = \{\ \omega_1 = (РР), \omega_2 = (РГ), \omega_3 = (ГР), \omega_4 = (ГГ)\ \}.$$

величина ξ является функцией $\xi = \xi(\omega)$ элементарного события. Таблица значений случайной величины имеет вид:

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\xi(\omega_i)$	**0**	**1**	**1**	**2**

Пример 4.2. Случайная величина характеризует время ожидания трамвая на остановке. Если расписание неизвестно, то вероятность прихода трамвая пропорциональна длине интервала и не зависит от момента времени t, при этом заведомо известно, что трамвай прибудет за время от нуля до T.

Тогда случайная величина может принять любое значение из интервала (0;T).

З а м е ч а н и е: Однако не любые функции, определенные на Ω, можно рассматривать в качестве случайных величин. В дальнейшем нам надо будет отвечать на вопрос: какова вероятность того, что значения случайной величины $\xi(\omega) \in$ B - тому или иному множеству на числовой прямой. Поэтому мы должны быть уверены, что множество

$\{\ \omega: \xi(\omega) \in B\ \} \in \Omega$

$\sigma -$ алгебре случайных событий, только в этом случае можно рассматривать

$P\{\ \omega: \ \xi(\omega) \ \in \ B\ \}$. Оказывается для этого достаточно, чтобы для каждого интервала $(-\infty\ , x)$ множество $\{\ \omega: \xi(\omega) \in (-\infty,\ \ x)\ \} = \{\ \omega: \xi(\omega) < \ x\} \in$.

Определение 4.1. Пусть $\{\Omega, \quad, P\}$ - вероятностное пространство. Всякая действительная функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная на Ω такая, что для каждого действительного x

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \qquad (4.1)$$

называется случайной величиной.

Условие (4.1) называется *измеримостью* $\xi = \xi(\omega)$ относительно $\sigma -$ алгебры .

Во многих задачах нет необходимости рассматривать случайные величины как функции от элементарного события, а достаточно знать лишь вероятности любых событий, связанных со случайной величиной, т.е. *закон распределения случайной величины.* Говорят, что закон распределения случайной величины ξ задан, если для любого множества действительных чисел B, являющегося объединением или пересечением конечного или счетного числа промежутков, задана вероятность $P\{\omega: \xi(\omega) \in B\}$ события, состоящего в том, что $\xi(\omega) \in B$ т.е. примет значение из этого множества.

Определение 4.2. Функция действительной переменной x, $x \in R = (-\infty, +\infty)$

$$F\xi(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = P\{\xi < x\} \qquad (4.2)$$

функцией распределения случайной величины $\xi(\omega)$.

<u>Теорема 4.1.</u> (*Свойства функции распределения*).

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F\xi(x) \le 1$ - функция ограниченной вариации.
2. Если $x_1 < x_2$, то $F\xi(x_1) \le F\xi(x_2)$ - неубывающая функция.
3. $\lim\limits_{x \to \infty} F\xi(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} F\xi(x) = 0$.
4. $\lim\limits_{x \to xo-0} F\xi(x) = F\xi(x_0)$ - непрерывна слева (без доказательства).
5. $P(x_1 \le \xi < x_2) = F\xi(x_1) - F\xi(x_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

1. В силу определения 4.2 $F\xi(x) = P\{\xi < x\}$, а из А.1 и следствия 3.3 следует, что для любого события $0 \le P(.) \le 1$, следовательно и $0 \le F\xi(x) \le 1$.

2. Так как $\{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\}$ при $x_1 < x_2$, то в силу следствия 3.2 $P\{\xi < x_1\} \le P\{\xi < x_2\}$, отсюда теперь следует $F\xi(x_1) \le F\xi(x_2)$.

3. Докажем, что $\lim\limits_{x \to -\infty} F\xi(x) = 0$. Рассмотрим последовательность событий

$\{\xi < x_1\} \supset \{\xi < x_2\} \supset \ldots \supset \{\xi < x_n\} \supset \ldots$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$ тогда

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{\xi < x_n\} = \varnothing$ и согласно А3' $\lim\limits_{x \to -\infty} P\{\xi < x_n\} = \lim\limits_{x \to -\infty} F\xi(x) = 0$.

Аналогично доказывается $\lim\limits_{x \to \infty} F\xi(x) = 1$ (самостоятельно).

5. Так как $\{\xi < x_2\} = \{\xi < x_1\} \cup (\xi \in [x_1; x_2))$, то согласно А.3 $P\{\xi < x_2\} = P\{\xi < x_1\} + P\{x_1 <= \xi < x_2\}$. Отсюда и в силу 4.2 находим

$P(x_1 <= \xi < x_2) \; = \; F\xi(x_1) - F\xi(x_2)$. ♦

9. Дискретные случайные величины.

Пусть $\{ \Omega, \;\; , P \}$ - вероятностное пространство. Случайная величина $\xi(\omega)$ называется *дискретной* случайной величиной, если она принимает конечное или счетное число значений.

Если $x_1 \;, x_2 \;, \dots , x_n \;, \dots$ - значения случайной величины, тогда для каждого n $\{ \omega\text{:}\; \xi(\omega) = x_n\} \in$ можно определить вероятность

$$p_n = P\{ \omega\text{:}\; \xi(\omega) = x_n\} \qquad (4.3)$$

Набор вероятностей p_n (4.3) называется *распределением* дискретной случайной величины $\xi(\omega)$. Распределение дискретной случайной величины $\xi(\omega)$ удобно характеризовать с помощью следующей таблицы 4.4

$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	**...**	$\mathbf{x_n}$	**...**
$\mathbf{p_i}$	$\mathbf{p_1}$	$\mathbf{p_2}$	**...**	$\mathbf{p_n}$	**...**

Заметим, что $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Таблица (4.4) называется *рядом распределения* дискретной случайной величины.

Зная закон (ряд) распределения дискретной случайной величины, можно построить функцию распределения, представляющую собой в этом случае функцию накопленных вероятностей

$$F\xi(x) = \sum_{x_i < x} P\{ \omega\text{:}\; \xi(\omega) = x_i\}, \qquad (4.5)$$

где суммирование распространяется на все значения индекса i, для которых $x_i < x$.
Из (4.5) следует, что

$$F\xi(x)\text{:}\; F\xi(x_K+0) - F\xi(x_к) = P\{ \xi = x_K\},$$

$x_K \in \{ x_1 , x_2 \;, \dots , x_n , \dots \}$, т.е. функция распределения испытывает скачки в точках x_K, для которых $P\{ \xi = x_K\} > 0$.

Пример 4.3. Два игрока подбрасывают монету три раза. Если при подбрасывании выпадает "герб", то первый игрок получает 1$, если "решетка", то он отдает 1$. Нужно найти: а) ряд распределения случайной величины, характеризующей выигрыш первого игрока; б) функцию распределения; в) построить ее график; г) построить многоугольник распределения.

Р е ш е н и е:

а) $\Omega = \{ \; \omega_1 = (РРР), \omega_2 = (РРГ), \omega_3 = (РГР), \omega_8 = (ГГГ) \}$,

тогда $\xi(\omega_1) = -3$, $\xi(\omega_2) = \xi(\omega_3) = \xi(\omega_4) = -1$,

$\xi(\omega_5) = \xi(\omega_6) = \xi(\omega_7) = 1$, $\xi(\omega_8) = 3$, а вероятность

$P\{\xi = -3\} = 1/8$, $P\{\xi = -1\} = P\{\xi = 1\} = 3/8$, $P\{\xi = 3\} = 1/8$,
ряд распределения имеет вид:

Xi	-3	-1	1	3
pi	1/8	3/8	3/8	1/8

Теперь можно записать аналитический вид функции распределения $F_\xi(x)$, если
$x \le -3$, то событие $\{\omega: \xi(\omega) < x\}$ является невозможным и $P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = 0$. Если
$-3 < x \le -1$, то $P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = 1/8$ и т.д. Согласно (4.5) будем иметь

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3; \\ \frac{1}{8}, & -3 < x \le -1; \\ \sum\limits_{x_i < x} P(\xi = x_i) = \frac{1}{2}, & -1 < x \le 1; \\ \sum\limits_{x_i < x} P(\xi = x_i) = \frac{7}{8}, & 1 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

График функции распределения имеет вид:

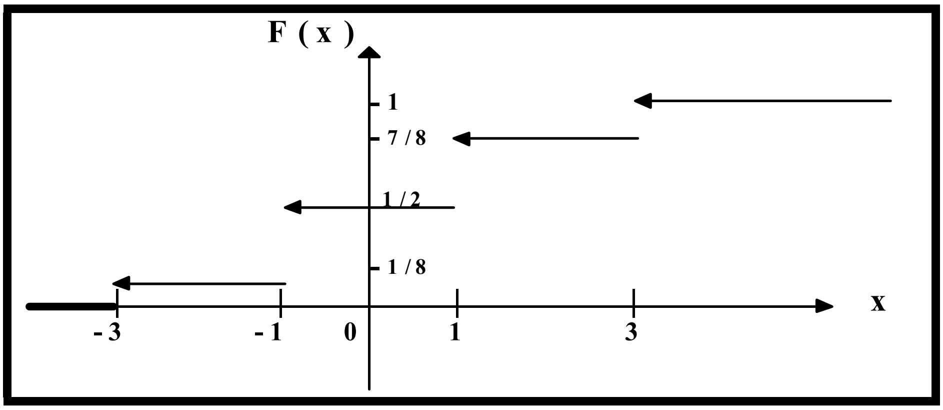

Рис. 4.1

Многоугольник распределения:

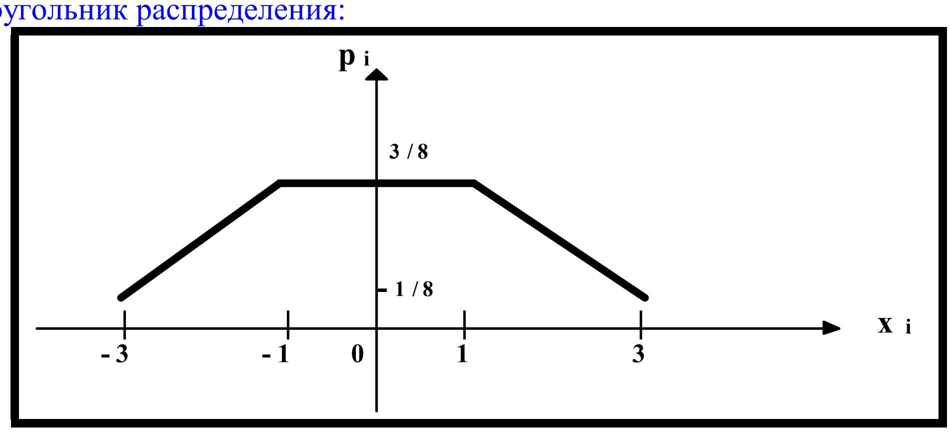

Рис. 4.2

Лекция №5.

10. Непрерывные случайные величины.

Пусть **{ Ω, ℑ, P }** - вероятностное пространство. Случайная величина $\xi(\omega)$ называется *непрерывной* случайной величиной, если существует неотрицательная функция $f_\xi(x)$ такая, что при любом $x \in R$

$$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx, \qquad (5.1)$$

где $f_\xi(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей абсолютно непрерывной случайной величины x.* Плотность распределения вероятностей обладает следующими свойствами:

1. $f_\xi(x) \ge 0, \ x \in R;$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$ - условие нормировки;
3. $\frac{d}{dx}F_\xi(x)dx$ - в точках непрерывности $f_\xi(x)$;
4. $P(a \le x < b) = \int_a^b f_\xi(x)dx = F\xi(b) - F\xi(a)$, для любых $a<b$; $a,b \in R$.

З а м е ч а н и е. Функция распределения непрерывной случайной величины является непрерывно монотонно возрастающей функцией на всей числовой оси, Причем

$$P\{\xi = x\} = \lim_{\Delta x \to 0} [F_\xi(x + \Delta x) - F_\xi(x)] = 0$$

значит вероятность попасть в точку равна нулю.

Пример 5.1. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ ax^2, & 0 \le x < 1; \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$

а). При каком значении а функция f(x) является плотностью распределения случайной величины ξ?

б). Выписать $F_\xi(x)$ и построить графики $F_\xi(x)$ и $f_\xi(x)$;

в). Найти вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале (-1;1/2).

Р е ш е н и е: а). Используя условие нормировки (2) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + a\int_0^1 x^2dx + \int_1^{\infty} 0dx = \frac{ax^3}{3}\Big|_0^1 = 1, \text{ отсюда } \quad a = 3.$$

Итак, при a=3 функция f(x) является плотностью распределения некоторой случайной величины ξ.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 3x^2, & 0 \le x < 1; \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$

Ее график имеет вид:

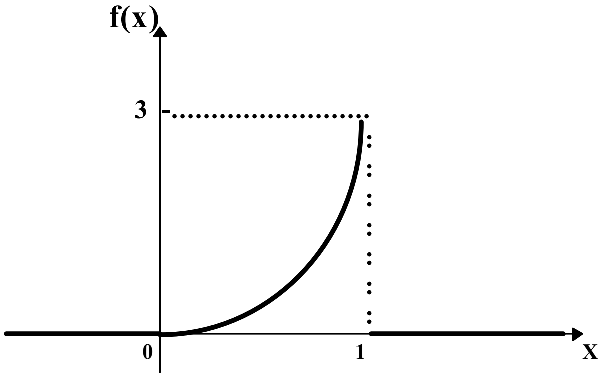

Рис. 5.1

б). Определим $F_\xi(x)$, используя (5.1)

$$F_x(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{0} 0dx = 0, & x \le 0; \\ 0 + 3\int_{0}^{x} x^2 dx = x^3, & 0 < x \le 1; \\ 1 + \int_{1}^{\infty} 0dx = 1, & x > 1, \end{cases}$$

график интегральной функции распределения $F_\xi(x)$ имеет вид:

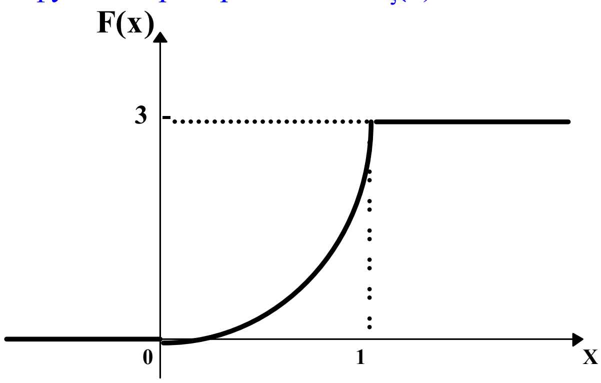

Рис. 5.2

в). Найдем

$$P(-1 < x < 1/2) = \int_{-1}^{1/2} f_\xi(x)dx = F_\xi(1/2) - F_\xi(-1) = 1/8,$$

действительно

$$\int_{-1}^{1/2} f_\xi(x)dx = \int_{-1}^{0} 0dx + 3\int_{0}^{\frac{1}{2}} x^2 dx = x^3\Big|_0^{1/2} = 1/8,$$

11. Числовые характеристики случайных величин.

Случайные величины, помимо законов распределения, могут описываться числовыми характеристиками.

Определение 5.1. *Математическим ожиданием* (средним значением по распределению) случайной величины называют действительное число, определенное в зависимости от типа случайной величины ξ формулой

$$m_\xi = M(\xi) = \begin{cases} \sum\limits_k x_k \cdot P\{\xi = x_k\}, & \xi\text{ - диск. сл. в.} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x)dx, & \xi\text{ - непр. сл. в.} \end{cases}$$

(5.3)

Математическое ожидание существует, если ряд (соответственно интеграл) в правой части формулы (5.3) сходится абсолютно.

Теорема 5.1. (*Основные свойства математического ожидания*).

1. Если c - постоянная, то M(c) = c.
2. Если c - постоянная, то M(ξc) = cM(ξ).
3. Для любых величин ξ $|M\xi| \le M|\xi|$
4. Для любых случайных величин ξ, η
   $M(\xi \pm \eta) = M\xi \pm M\eta$.
5. Если случайные величины ξ и η независимы, то
   $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$.

Доказательство: Свойства 1 - 4 следуют из соответствующих свойств интеграла и ряда. Докажем, например, свойство 4.

Пусть $\xi = \xi(\omega)$ и $\eta = \eta(\omega)$ определены на вероятностном пространстве $\{\Im,\Omega,P\}$. Сумма $\xi + \eta$ является случайной величиной, определенной на том же вероятностном пространстве. Если случайные величины ξ и η-дискретны, то их сумма тоже есть дискретная случайная величина.

$$M(\xi+\eta) = \sum_{\omega\in\Omega}\{\xi(\omega)+\eta(\omega)\}\cdot P(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)\cdot P(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega}\eta(\omega)\cdot P(\omega) = M(\xi)+M(\eta)$$

Для доказательства свойства 5 определим понятие независимости случайных величин.

Определение 5.2. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ... , ξ_n называются ***независимыми***, если какие бы не были $x_1, x_2, \ldots, x_n$ события $\{\xi_1 = x_1\}$, $\{\xi_2 = x_2\}$, ... , $\{\xi_n = x_n\}$независимы для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$ т.е.

$$P(\bigcap_{k=1}^{n}\{\xi_n < x_n\}) = \prod_{k=1}^{n} P(\xi_n < x_n) \qquad (5.4)$$

или

$$f_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1)\cdot f_{\xi_2}(x_2)\cdot\ldots\cdot f_{\xi_n}(x_n). \qquad (5.4')$$

Докажем свойство 5. Пусть ξ и η- абсолютно непрерывные случайные величины и $f_{\xi\eta}(x,y)$ их совместная плотность распределения, т.к. ξ и η независимы, то

$f_{\xi\eta}(x,y) = f_\xi(x)\, f_\eta(y)$ и, используя (5.3) получим

$$M(\xi\cdot\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot y\cdot f_{\xi\eta}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_\xi(x)dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_\eta(y)dy = M\xi\cdot M\eta. \ \blacklozenge$$

Остальные свойства доказать самостоятельно.

Определение 5.3. *Дисперсией* случайной величины называют неотрицательное число, определенное в зависимости от типа случайной величины ξ формулой

$$D(\xi) = M(\xi - M\xi)^2 = \begin{cases} \sum_k (x_k - M\xi)^2\cdot P\{\xi = x_k\}, & \xi\text{- диск. сл.в.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2\cdot f_\xi(x)dx, & \xi\text{- неп. сл.в.} \end{cases} \qquad (5.5)$$

если математическое ожидание в правой части (5.5) существует. Дисперсия является мерой рассеивания значений случайной величины около ее математического ожидания.

Неотрицательное число $\boldsymbol{\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}}$ называют *среднеквадратичным отклонением* случайной величины ξ. Оно имеет размерность случайной величины ξ и определяет некоторый стандартный среднеквадратичный интервал рассеивания, симметричный относительно $M\xi$.

Замечание. Если воспользоваться свойствами математического ожидания, то формулы (5.5) можно привести к более удобному виду для практического применения:

$D\xi = M(\xi- M\xi)^2 = M[\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2] = M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2] = M\xi^2 - (M\xi)^2.$

Отсюда следует, что

$$D(\xi) = M(\xi - M\xi)^2 = \begin{cases} \sum_k x_k^2 p_k - (\sum_k x_k p_k)^2, & \xi\text{- диск.р сл. в.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f_\xi(x)dx - (M\xi)^2, & \xi\text{- непр.сл. в.} \end{cases} \qquad (5.5')$$

<u>**Теорема 5.2.**</u> (*Свойства дисперсии*).

1. Для любой случайной величины ξ $D\xi \ge 0$,
2. Если c - постоянная, то $Dc = 0$.
3. Если c - постоянная, то $D(c\xi) = c^2 D\xi$.
4. Если случайные величины ξ и η независимы, то
   $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$.

Доказательство:

Свойства 1 - 3 следуют непосредственно из определения 5.3 и теоремы 5.1 (свойства математического ожидания). Доказать самостоятельно.

Докажем свойство 4. Воспользуемся определением ($5.5'$) откуда следует
$D(\xi + \eta) = M[(\xi + \eta) - M(\xi + \eta)]^2 = M[(\xi - M\xi) + (\eta - M\eta)]^2 =$
$= M(\xi - M\xi)^2 + M(\eta - M\eta)^2 - 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta),$
но т.к. случайные величины ξ и η независимы, то $(\xi - M\xi)$ и $(\eta - M\eta)$ тоже независимы, тогда $M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi - M\xi)\, M(\eta - M\eta) = 0$.

Теперь получаем $D(\xi + \eta) = M(\xi - M\xi)^2 + M(\eta - M\eta)^2 = D\xi + D\eta$. ♦

Определим два понятия, которыми будем пользоваться в дальнейшем:

- Случайная величина называется *центрированной* (обозначается $\overset{\circ}{\xi}$) если $M\overset{\circ}{\xi} = 0$, т.е. $\overset{\circ}{\xi} = \xi - M\xi$.
- Случайная величина называется *стандартизированной (нормированной)*, если $M\xi = 0$ и $\sigma_\xi = 1$.

12. Начальные и центральные моменты.

Определение 5.4. *Начальным моментом k-го порядка* (k=1, 2, ...) распределения случайной величины ξ (если он существует) называют действительное число
$\alpha_k = \alpha_k(\xi)$, равное математическому ожиданию случайной величины ξ^k, определенное по формуле

$$\alpha_k = M(\xi^k) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^k \cdot P\{\xi = x_i\}, & \xi\text{ - диск. сл.в.} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f_\xi(x)dx, & \xi\text{ - непр. сл.в.} \end{cases} \qquad (5.6)$$

Определение 5.5. *Центральным моментом k-го порядка* (k=1, 2, ...) распределения случайной величины ξ (если он существует) называют действительное число
$\mu_k = \mu_k(\xi)$, равное математическому ожиданию случайной величины $(\xi - M\xi)^k$, определенное по формуле

$$\mu^k = M(\xi - M\xi)^k = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - M\xi)^k \cdot P\{\xi = x_i\}, & \xi\text{ - диск. сл.в.} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^k \cdot f_\xi(x)dx, & \xi\text{ - непр. сл.в.} \end{cases} \qquad (5.7)$$

Замечания:

- Число $M|\xi|^k$ называется ***абсолютным начальным моментом порядка k***;
- Число $M|\xi - M\xi|^k$ называется ***абсолютным центральным моментом порядка k*** случайной величины ξ;
- Из определений 5.4 и 5.5 следует, что из существования момента $M\xi^k$ следует существование моментов более низких порядков:
  а) $\alpha_0 = \mu_0 = 1$;
  б) $M\xi = \alpha_1$;
  в) $D\xi = \sigma^2\xi = \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$;
  г) $\mu_1 = 0$.

ТЕМА: Законы распределения случайных величин.

Лекция № 6.

13. Последовательность независимых испытаний и биномиальный закон распределения.

Под испытанием мы станем понимать осуществление определенного комплекса условий, в результате которого может произойти то или иное элементарное событие пространства Ω.

Пусть имеется последовательность испытаний, в каждом из которых наблюдается событие A . Если вероятность появления события A в m испытаниях не зависит от вероятности появления или непоявления его в любом другом, отличном от m испытании, то такую последовательность испытаний будем называть независимой, т.е.

$$p_i = P(A^{(i)}) = P(A^{(i)}/A^{(k\neq i)}).$$

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда вероятности событий $A^{(i)}$ не зависят от номера испытания. P(A) = p независимо от исходов других испытаний. Эта схема впервые была рассмотрена Я. Бернулли и носит название “ *схема Бернулли*”.

Это простейший класс независимых испытаний с двумя исходами, если событие A наблюдалось в испытании будем считать, что произошел “ успех “, где P(A) = p и в противном случае “ неудача “ $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Для n испытаний схемы Бернулли элементарные события удобно обозначать цепочками длины n, состоящими из букв УН.

Введем в рассмотрение случайную величину $\xi_n(\omega)$ - которая будет характеризовать число появлений события A в n независимых испытаниях.

<u>Теорема 6.1.</u> Если $\xi_n = \xi_n(\omega)$ - число успехов в n независимых испытаниях Бернулли, то

$$P_n(k) = P\{\omega: \xi_n(\omega) = k\} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \qquad (6.1)$$

где k=0,1,2, ..., n, q = 1 - p, p- вероятность успеха в отдельном испытании.

Д о к а з а т е л ь с т в о :

Пусть n=2. Тогда пространство $\Omega = \{\omega_1=(УУ); \omega_2=(УН); \omega_3 = (НУ); \omega_4 = (НН)\}$, поскольку испытания независимы, то $P(\omega_1) = p^2$; $P(\omega_2) = P(\omega_3) = p \cdot q$; $P(\omega_4) = q^2$. В общем случае пространство элементарных событий состоит из 2^n всевозможных наборов ω длины n, состоящих из букв У и Н. Принимая во внимание независимость испытаний, вероятность одного отдельного набора ω равна $p^k \cdot q^{n-k}$, если в набор ω входит k букв У , и, следовательно, n - k букв Н. Случайная величина $\xi_n = \xi_n(\omega)$ - число успехов при n испытаниях - равна k. Тогда множество $\{\omega: \omega_i = (ууу...ННН)\}$, для которых $\xi_n(\omega) = k$ будет содержать $i = C_n^k$ элементов. А так как $P(\omega_i) = p^k \cdot q^{n-k}$ для любого $i = \overline{1 \div C_n^k}$, тогда получаем

$$P\{\omega:\xi_n(\omega)=k\}=\sum_{i=1}^{C_n^k}P(\omega_i)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}.\ \blacklozenge$$

З а м е ч а н и е: Набор вероятностей (6.1) называется *биномиальным распределением* или *распределением Бернулли*.

Теперь естественно возникает вопрос о нахождении наиболее вероятного числа успехов. Число k_0, при котором вероятность $P\{\xi=k_0\}$ максимальна, иногда называют *наивероятнейшим числом*.

Теорема 6.2. Если $n\cdot p$ - целое число, то $k_0=n\cdot p$, если $n\cdot p-q$ - целое число, то k_0 имеет два значения $np-q=k_0'$ и $n\cdot p+p=k_0''$, и, если $n\cdot p-q$ - не целое число, то k_0 заключено в пределах $n\cdot p-q<k_0<n\cdot p+p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Рассмотрим отношения

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)}=\frac{C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}}{C_n^{k-1}\cdot p^{k-1}\cdot q^{n-k+1}}=\frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{p}{q}=1+\frac{(n-k+1)\cdot p-k\cdot q}{k\cdot q}=1+\frac{(n+1)\cdot p-k}{k\cdot q}$$

Поэтому, если $k<(n+1)\cdot p$, то $P_n(k)>P_n(k-1)$ (с ростом k вероятности возрастают) ; если $k>(n+1)\cdot p$, то $P_n(k)<P_n(k-1)$ (с ростом k вероятности убывают). Пусть $k_0=(n+1)\cdot p$ - наибольшее целое число не превосходящее $(n+1)\cdot p$. Тогда $\max\limits_k P_n(k)=P_n(k_0)$. Если $(n+1)\cdot p$ - целое , то наиболее вероятных значений k_0 два $k_0''=np+p$ и $k'_0=k''_0-1=np-q$. ♦

Пример 6.1. Случайная величина ξ распределена по биномиальному закону. Найти Mξ и Dξ.

Р е ш е н и е : Запишем ряд распределения случайной величины ξ.

x_i	0	1	2	...	n
P_i	$P_0(0)$	$P_1(1)$	$P_2(2)$	...	$P_n(n)$

здесь $P_k=P_n(k)=P\{\omega:\xi(\omega)=k\}=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$, k = 0,1,... ,n.

Так как ξ - дискретная величина, то в силу (5.3)

$$M\xi=\sum_{i=0}^{n}x_i\cdot P_i=\sum_{i=0}^{n}i\cdot C_n^i\cdot p^i\cdot q^{n-i}=\varphi'(p);$$

$$\varphi(p)=(p+q)^n=\sum_{i=1}^{n}C_n^i\cdot q^i\cdot q^{n-i},\ \text{то}$$

$$\varphi'(p) = n\cdot(q+p)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} i\cdot C_n^i\cdot p^i\cdot q^{n-i}$$, умножив обе части выражения на p,

получаем $n\cdot p\cdot(p+q)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} i\cdot C_n^i\cdot p^i\cdot q^{n-i}$, но так как $p + q = 1$ в схеме Бернулли, то $M\xi = n\cdot p = \alpha_1$.

Итак, математическое ожидание числа появления события в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.

Для определения $D\,\xi$ воспользуемся (5.5)

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = M\xi^2 - (n\cdot p)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \mu_2.$$

Определим начальный момент второго порядка $\alpha_2 = M\xi^2$, для чего найдем $\varphi''(p)$

$$n\cdot(n-1)\cdot(p+q)^{n-2} = \sum_{i=0}^{n} i\cdot(i-1)\cdot C_n^i\cdot p^{i-2}\cdot q^{n-i},$$

умножим обе части на p^2, получим

$$n(n-1)\cdot p^2\cdot(p+q)^{n-2} = \sum_{i=0}^{n} i\cdot(i-1)\cdot C_n^i\cdot p^i\cdot q^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} i^2\cdot C_n^i\cdot p^i\cdot q^{n-i} - \sum_{i=0}^{n} i\cdot C_n^i\cdot p^i\cdot q^{n-i}$$

тогда $n(n-1)\cdot p^2 = \alpha_2 - \alpha_1$ откуда $\alpha_2 = n^2\cdot p^2 - n\cdot p^2 + n\cdot p$. Тогда окончательно $D\xi = n^2\cdot p^2 - n\cdot p^2 + n\cdot p - n^2\cdot p^2 = n\cdot p\cdot(1-p) = n\cdot p\cdot q$.

$$D\xi = n\cdot p\cdot q.$$

14. Предельные теоремы в схеме Бернулли.

В приложениях часто приходится выяснять вероятности различных событий, связанных с числом успехов в n испытаниях Бернулли при больших значениях n . В этом случае вычисление по формуле (6.1) становятся затруднительными. Трудности возрастают, когда приходится еще суммировать вероятности (6.1).

$$P\{a < \xi_n < b\} = \sum_{a<m<b} P\{\omega \xi_n(\omega) = m\} = \sum_{a<m<b} P_n(m) \qquad (6.2)$$

Затруднения возникают также при малых значениях p и q . Иногда при больших значениях n удается заменить формулу (6.1) какой-либо приближенной асимптотической формулой. Приведем три предельные теоремы, содержащие асимптотические формулы для (6.1) и (6.2) при $n\to\infty$.

Теорема 6.3. (*Теорема Пуассона*). Если $n\to\infty$ и $p\to 0$ так, что $n\cdot p\to\lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то

$$P\{\xi_n = m\} = C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m} \xrightarrow[n\to\infty]{} P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}, \qquad (6.3)$$

при любом постоянном m : m = 0, 1, 2, ...

Доказательство:

Пусть $n \cdot p = \lambda_n$, представим вероятность $P\{\xi_n = m\}$ в виде

$$P\{\xi_n = m\} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!} \cdot \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m \cdot \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda_n^m}{m!} \cdot \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot ... \cdot \left(1-\frac{m-1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-m}.$$

Если теперь $n \to \infty$, то получим утверждение теоремы. ■

Таким образом, при больших n и малых p мы можем воспользоваться приближенной формулой

$$P\{\xi_n = m\} \approx \frac{\lambda_n^m}{m!} \cdot e^{-\lambda_n}, \qquad \lambda_n = np. \tag{6.3'}$$

В случае, когда оба параметра p,q заметно отличны от нуля (порядок 0.5) на практике используются следствия из теорем Муавра-Лапласа (локальная и интегральная), которые приведем здесь без доказательства.

Теорема 6.4. (*Локальная теорема Муавра-Лапласа*). Если $n \to \infty$, а p, (0<p<1) постоянно, величина $x_m = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ равномерно ограничена по n и m $(-\infty < a \le x_m \le b < \infty)$, то

$$P\{\xi_n = m\} = \varphi(x_m) \cdot \frac{1+\alpha_n(m)}{\sqrt{npq}}, \tag{6.4}$$

где $|\alpha_n| < \dfrac{c}{\sqrt{n}}$ при $x_m \in [a,b] \subset \Re^1$, c- постоянная.

Отметим, что значения функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ затабулированы. Это упрощает использование ее на практике.

При качественной оценке условий применимости приближенной формулы

$$P\{\xi_n = m\} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x_m), \tag{6.4'}$$

нужно оценить величину остаточных членов в (6.4). Хорошие приближения эта формула дает при p=q=1/2, ее часто используют при n>100 и npq>20. Указания о границах применимости формул (6.3') и (6.4') являются приближенными, к ним следует относится с осторожностью.

Теорема 6.5. (*Интегральная теорема Муавра-Лапласа*). Если p (0<p<1) постоянно, то при $n \to \infty$

$$P\{a \le \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

равномерно по a,b, $(-\infty < a \le b < \infty)$.

Приближенная формула

$$P\{a \le \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\} \approx \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) \qquad (6.5)$$

используется в тех случаях когда возможно использование (6.4'). Отметим, что (6.5) эквивалентна другой формуле

$$P\{\alpha \le \xi_n \le \beta\} \approx \Phi(x'') - \Phi(x'), \qquad (6.5')$$

где $x'' = \frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}$; $x' = \frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - значения, которой затабулированы.

Пример 6.2. Пусть вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости равна 0,02. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Чему равна вероятность, что в коробке не окажется бракованных сверл ?

Р е ш е н и е: $p = 0{,}02$; $n = 100$; $m = 0$; $q = 1 - p = 0{,}98$; $np = 2$.

По формуле Бернулли:

$$P_{100}\{\xi_{100} = 0\} = C_{100}^0 \cdot (0{,}02)^0 \cdot (0{,}98)^{100} \approx 0{,}1327.$$

По формуле Пуассона:

$$P_{100}\{\xi_{100} = 0\} \cong \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-100 \cdot 0{,}02} = e^{-2} = 0{,}1353.$$

Формула Лапласа дает:

$$P_{100}\{\xi_{100} = 0\} \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}} \cdot \varphi\left(\frac{-2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}}\right) = 0{,}1025.$$

Легко видеть, что погрешность, даваемая формулой Лапласа, довольно велика. Если же число испытаний растет, то разница между значениями, даваемыми формулами Пуассона и Лапласа тем меньше, чем больше n .

Рассмотрим одно важное следствие, которое можно получить из (6.5).

<u>Следствие 6.1</u>. Формула (6.5) позволяет оценить близость частоты и вероятности. Пусть p - вероятность успеха в схеме Бернулли и μ_n - общее число успехов. *Частотой* успеха называют отношение $\frac{\mu_n}{n}$. Оценим вероятность события $\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\}$. Если n достаточно велико, тогда используя (6.5) получим

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{-\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{p \cdot q}} < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \cdot \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad (6.6)$$

Часто возникает обратная задача: сколько нужно повести испытаний, чтобы частота $\frac{\mu_n}{n}$ отличалась от вероятности p не больше, чем на $\varepsilon > 0$ с некоторой вероятностью $1 - \alpha$ (α - мало) .

Лекция №7.

15. Законы распределения непрерывных случайных величин.

Рассмотрим некоторые наиболее важные законы распределения случайных величин.

1. Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке [a,b], если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю, т.е.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ C, & a \le x \le b; \\ 0, & x > b, \end{cases}$$

где C = Const. Используя условие нормировки 2 из (5.2), определим C.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = C \cdot \int_a^b dx = c(b-a) = 1$$

откуда c = 1/(b-a) и следовательно, плотность равномерного распределения имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 0, & x > b. \end{cases} \qquad (7/1)$$

Теперь определим вид интегральной функции распределения для этого закона, который в силу (5.1) будет следующим

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{1}{b-a} \cdot \displaystyle\int_a^x dt, & a < x \le b; \\ 1, & x > b; \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \qquad (7.2)$$

Изобразим графики f(x) и F(x):

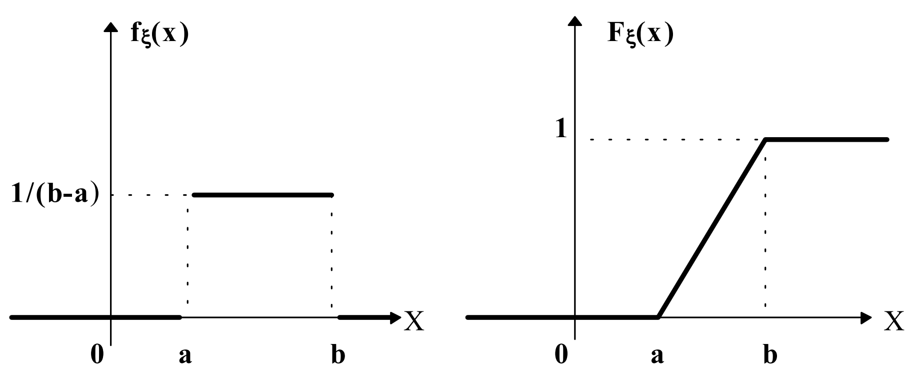

Рис. 7.1

Непрерывная случайная величина подчинена равномерному закону распределения, если ее возможные значения лежат в пределах некоторого определенного интервала, кроме того, в пределах этого интервала все значения случайной величины одинаково вероятны (обладают одной и той же плотностью вероятности). С такими случайными величинами часто встречаются в измерительной практике при округлении отсчетов измерительных приборов до целых делений шкал. Ошибка при округлении отсчета до ближайшего целого деления является случайной величиной ξ, которая с постоянной плотностью вероятности принимает любое значение между соседними целыми делениями.

Определим числовые характеристики данной случайной величины.

$$M\xi = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}; \tag{7.3}$$

$$D\xi = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b (x - \frac{b+a}{2})^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}; \tag{7.4}$$

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{7.5}$$

Наконец, найдем вероятность попадания значений равномерно распределенной случайной величины на интервале (a,b) в интервал (α,β):

$$P\{\alpha < \xi < \beta\} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_\alpha^\beta dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}. \tag{7.6}$$

2. Экспоненциальное (показательное) распределение

В практических приложениях теории вероятностей, особенно в теории массового обслуживания, исследовании операций, в физике, биологии, теории надежности часто имеют дело со случайными величинами, которые имеют экспоненциальное распределение.

Случайная величина ξ называется распределена по показательному закону с параметром $\lambda>0$, если она непрерывна и имеет следующую плотность распределения вероятностей:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{7.7}$$

Тогда

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \lambda \cdot \int_0^x e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Таким образом,

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, x \ge 0; \\ 0, \qquad x < 0, \end{cases} \qquad (7.6)$$

соответственно, графики f(x) и F(x) имеют вид:

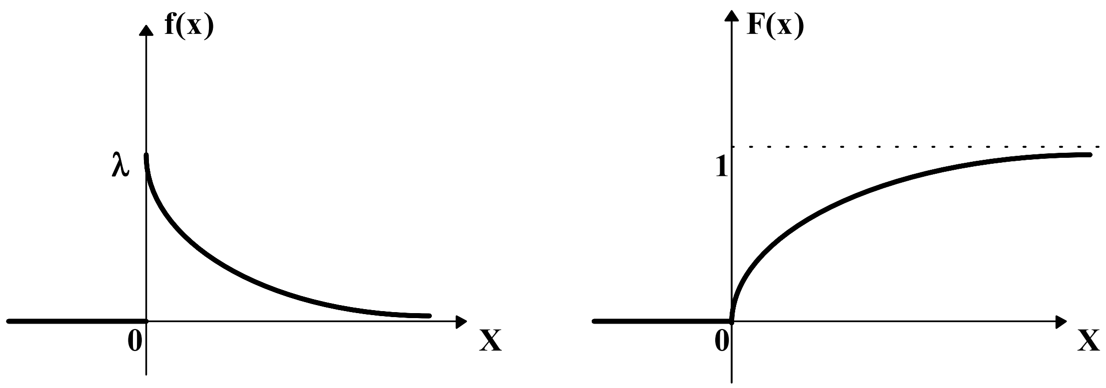

Рис. 7.2

Определим числовые характеристики:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\xi}(x)dx = \lambda \cdot \int_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x}dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_{0}^{x\to\infty} = \frac{1}{\lambda}. \qquad (7.9)$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda \cdot \int_{0}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (7.10)$$

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \frac{1}{\lambda} = M\xi.. \qquad (7.11)$$

3. *Нормальное распределение*

Исключительно важную роль в теории вероятностей играет нормальное распределение. (Закон Гаусса).

Непрерывная случайная величина ξ имеет нормальное распределение вероятностей с параметрами $a,\sigma > 0$ { $N(a, \sigma^2)$, если плотность распределения ее имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}. \qquad (7.12)$$

Нормальный закон распределения широко применяется в практических задачах, он проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. Каждый фактор в отдельности на величину ξ влияет незначительно.

Функция распределения такой случайной величины имеет вид:

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}\,dt. \qquad (7.13)$$

Для определения числовых характеристик воспользуемся интегралом Пуассона.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = 2\cdot\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}. \qquad (7.14)$$

Имеем:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_{\xi}(x)dx = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left\{\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} = t-\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(a-\sigma t\sqrt{2})\cdot e^{-t^2}dt =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt - \sigma\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} t\cdot e^{-t^2}dt = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} + \frac{\sigma\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}\left(-e^{-t^2}\right)\Bigg|_{t\to-\infty}^{t\to\infty} = a.$$

$$M\xi = a. \qquad (7.15)$$

$$D\xi = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx - a^2 = \left\{\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} = t-\right\} = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} t^2\cdot e^{-t^2}dt =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\left(-t\cdot e^{-t^2}\right)\Bigg|_{t\to-\infty}^{t\to\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sigma^2.$$

$$D\xi = \sigma^2\ . \qquad (7.16)$$

Таким образом, параметры a, σ^2 в выражении (7.12) есть математическое ожидание и дисперсия нормально распределенной случайной величины, а

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sigma.$$

(7.17)

График плотности вероятности имеет вид нормальной кривой Гаусса:

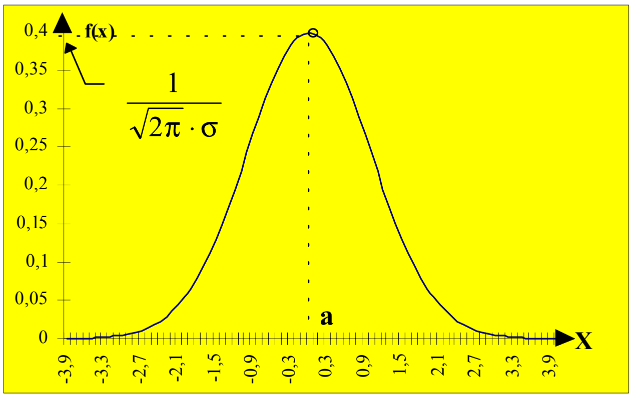

Рис. 7.3

Отметим некоторые свойства нормальной кривой.

1. Кривая распределений симметрична относительно прямой x = a.
2. $\max\limits_{x} f_{\xi}(x) = f_{\xi}(a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
3. $\lim\limits_{|x|\to\infty} f_{\xi}(x) = 0$.
4. При изменении математического ожидания и σ = Const, происходит смещение кривой вдоль оси Ох. Если a = Const и изменять σ, то кривая изменяет свой вид в зависимости от σ. ($\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$).

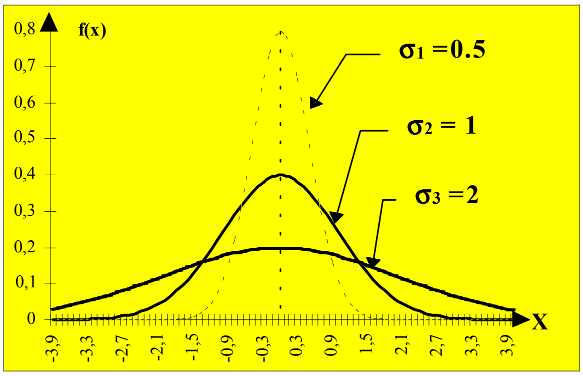

Рис. 7.4

Коэффициенты асимметрии и эксцесса нормального распределения равны нулю.

$$A = \frac{\alpha_3}{\mu_3}; \quad E = \frac{\alpha_4}{\mu_4} - 3.$$

З а м е ч а н и е: Пусть $\xi \in N(0,1)$, тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$F_{\xi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (7.18)$$

В этом случае говорят, что случайная величина распределена по стандартному нормальному закону, а если заметить, что $\Phi(x)$ - функция Лапласа (6.5) имеет вид:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (7.19)$$

Используя это замечание, можно теперь вывести формулу для практических приложений вычисления вероятности того, что случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами a, σ^2 и примет значение в интервале (α,β).

В соответствии с (6.5’) эту вероятность можно найти по таблицам функции $\Phi(x)$:

$$P\{\alpha<\xi<\beta\}=\int_{\alpha}^{\beta}f_{\xi}(x)dx=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left\{\frac{x-a}{\sigma}=t\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt= \qquad (7.20)$$

$$=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1. $\Phi(0)=0$. Это следует из (7.19)

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\frac{1}{2}.$

3. $\Phi(-x)=\Phi(x)$ - нечетная функция.

График $\Phi(x)$

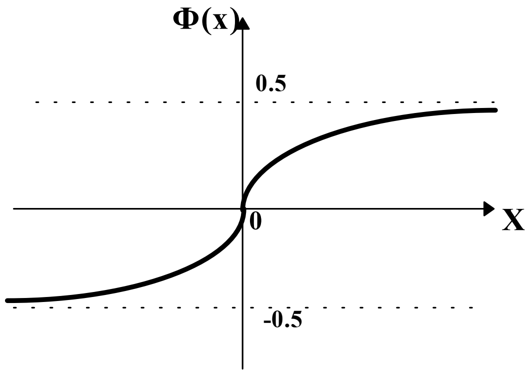

Рис. 7.5

Значения $\Phi(x)$ затабулированы (см. приложение №2).

Отметим важный случай формулы (7.20)

$$P\{|\xi-a|<\varepsilon\}=P\{a-\varepsilon<\xi<a+\varepsilon\}=2\cdot\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}). \qquad (7.21)$$

Воспользуемся (7.21) и определим вероятность того, что $\xi\in N(a,\sigma^2)$ примет значение в интервале (α,β), где $\alpha = a - 3\sigma$, $\beta = a + 3\sigma$.

$$P\{|\xi-a|<3\sigma\}=P\{a-3\sigma<\xi<a+3\sigma\}=2\cdot\Phi(3)\approx 0{,}9973. \qquad (7.22)$$

Формула (7.22) носит название *правила трех сигм*.

Тема: Закон больших чисел и предельные теоремы вероятностей. Лекция № 8.

16. Закон больших чисел.

Как отмечалось ранее, теория вероятностей изучает закономерности свойственные массовым случайным явлениям. Познавательная ценность теории вероятностей обусловлена тем, что массовые случайные явления в своем совокупном действии создают строгие закономерности. Само понятие математической вероятности было бы бесплодно, если бы не находило своего осуществления в виде частоты появления какого либо результата при многократном повторении однородных условий.

В этой теме мы познакомимся с группой утверждений и теорем, объединенных общим названием *закон больших чисел*.

При достаточно большом числе испытаний характеристики случайных событий и случайных величин, наблюдаемых при испытании, становятся почти неслучайными.

Группа теорем, устанавливающих соответствие между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин и случайных событий при большом числе испытаний над ними, а также касающихся предельных законов распределения, объединяются под общим названием предельных теорем теории вероятностей.

Рассмотрение теорем закона больших чисел начнем с леммы Маркова и неравенства Чебышева, с помощью которых значительно упрощаются доказательства теорем закона больших чисел.

Лемма 8.1. (*Маркова*). Если случайная величина имеет конечный первый абсолютный момент $M|\xi|$, то для всех $\varepsilon>0$

$$P\{|\xi|\geq\varepsilon\}\leq\frac{M|\xi|}{\varepsilon} \qquad (8.1)$$

Доказательство:

Проведем доказательство для дискретной случайной величины способом, получившим название метода урезания .

Пусть $|x_1|$, $|x_2|$, ..., $|x_n|$ - есть упорядоченная совокупность всех значений случайной величины ξ, с соответствующими вероятностными

$$p_i = P\{|\xi| = |x_i|\}, \qquad \text{причем} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Не нарушая общности доказательства, можно допустить, что абсолютные значения случайной величины ξ расположены в порядке убывания. Выберем произвольное $\varepsilon>0$ и предположим, что первые r значений совокупности больше ε $(r < n)$. Запишем следующее неравенство

$$|x_1|\,p_1 + |x_2|\,p_2 + \ldots + |x_r|\,p_r \leq |x_1|\,p_1 + \ldots + |x_r|\,p_r + \ldots + |x_n|\,p_n = M|\xi|.$$

Следовательно $\sum_{i=1}^{r} |x_i|\,p_i \leq M|\xi|$.

Заменяя в левой части последнего неравенства значение x_i числом ε , получим усиленное неравенство:

$$\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{r} p_i \le M\,|\,\xi\,| \qquad \text{или} \qquad \sum_{i=1}^{r} p_i \le \frac{M|\xi|}{\varepsilon}\ .$$

Левая часть выражает вероятность того, что модуль случайной величины принимает значение, больше ε , т.е.

$$P\{|\xi|\ge\varepsilon\}\le\frac{M|\xi|}{\varepsilon}\ .\ \blacksquare$$

Замечание 1: Вероятность противоположного события, а именно вероятность того, что $\{\ |\ \xi\ |\ <\ \varepsilon\ \}$ определяется следующим неравенством

$$P\{|\xi|<\varepsilon\}>1-\frac{M|\xi|}{\varepsilon}\quad . \qquad (8.1')$$

2: Для любой положительной случайной величины ξ верно (8.1) и (8.1′).

3: Лемма Маркова справедлива для любого закона распределения. В силу того, что величина вероятности не может быть больше единицы и меньше нуля, при использовании неравенства (8.1) и (8.1′) следует иметь ввиду, что математическое ожидание случайной величины не может превосходить ε .

<u>Лемма 8.2</u> (*Неравенство Чебышева*). Если случайная величина имеет конечное математическое ожидание и дисперсию, то для любого положительного числа ε справедливо неравенство

$$P\{|\xi-M\xi|<\varepsilon\}>1-\frac{D\xi}{\varepsilon^2}\,. \qquad (8.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о :

Воспользуемся леммой 8.1. Рассмотрим случайную величину $\eta = |\,\xi - M\xi\,|$, т. к. случайная величина η - положительна, то неравенства $|\,\xi - M\xi\,| < \varepsilon$ и $(\xi - M\xi\,)^2 < \varepsilon^2$ равносильны. Применим лемму Маркова к случайной величине η^2 . Тогда имеем

$$P\{\left|\xi^2\le\varepsilon^2\right|\}>1-\frac{M\xi^2}{\varepsilon^2}\,.$$

В силу равносильности $\eta\le\varepsilon$ и $\eta^2\le\varepsilon^2$ вероятности $P\{\,\eta\le\varepsilon\,\} = P\{\,\eta^2\le\varepsilon^2\,\}$, отсюда получаем

$$P\{\eta\le\varepsilon\}=P\{|\xi-M\xi|\le\varepsilon\}\ge1-\frac{M\eta^2}{\xi^2}=1-\frac{M(\xi-M\xi)^2}{\varepsilon^2}=1-\frac{D\xi}{\varepsilon^2}\,.\ \blacksquare$$

Замечание: 1. Очевидно, что

$$P\{|\xi-M\xi|>\varepsilon\}\le\frac{D\xi}{\varepsilon^2}\,. \qquad (8.2’)$$

2. Неравенство Чебышева, как и неравенство Маркова, справедливо для любого закона распределения случайной величины.

3. Неравенство Чебышева для практики имеет ограниченное значение, поскольку часто дает грубую оценку. Пусть, например, $\varepsilon = \sigma/2$, тогда в силу (8.2') имеем

$$P\{|\xi - M\xi| > \frac{\sigma}{2}\} \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2/4} = 4.$$

Но и без того ясно, что вероятность не может быть более единицы.

Пусть теперь $\varepsilon = 10\sigma$, то

$$P\{|\xi - M\xi| > 10 \cdot \sigma\} \le \frac{\sigma^2}{100 \cdot \sigma^2} = 0.01.$$

Это неплохая оценка вероятности. Однако следует отметить, что теоретическое значение неравенства Чебышева очень велико.

Определение 8.1. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *сходящейся по вероятности* при $n \to \infty$ к случайной величине ξ $(\xi_n \xrightarrow{p} \xi)$, если для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\} = 1.$$

Теорема 8.1. (*Закон больших чисел в форме Чебышева*).

Если последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ имеют конечные дисперсии, ограниченные одной и тойже постоянной c: $D\xi_i \le c$, $i = 1,2, \ldots$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{8.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о:

В силу условия теоремы $D\xi_i \le c$, $i = 1,2, \ldots$ и, следовательно

$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i \le \frac{c}{n}$. Воспользуемся неравенством Чебышева (8.2)

$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)}{\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}$, переходя к пределу при $n \to \infty$ получаем

$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| < \varepsilon\right\} \ge 1$, а так как вероятность любого события не превышает единицы, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| < \varepsilon\right\} = 1. \ \blacksquare$$

Таким образом, закон больших чисел устанавливает условия сходимости среднего арифметического n случайных величин к среднему арифметическому их математических ожиданий.

Закон больших чисел может быть распространен и на зависимые случайные величины.

Теорема 8.2. (*Закон больших чисел в форме Маркова*).
Если последовательность произвольных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ удовлетворяют условию
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\right) = 0$, то имеет место

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| < \varepsilon\right\} = 1. \qquad (8.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Рассмотрим случайную величину

$$\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i; \quad M\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i, \quad D\eta = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i.$$

Применим неравенство Чебышева, получим:

$$P\{|\eta - M\eta| < \varepsilon\} \geq \frac{D\eta}{\varepsilon^2}$$

или

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}D\xi_i.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $n \to \infty$ получаем (8.3). ■

Теорема 8.3. (Бернулли). Пусть μ_n - число наступлений события A в n независимых испытаниях Бернулли, p - вероятность наступления события A в одном испытании,
то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1. \qquad (8.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Из того, что случайная величина μ_n распределена по биномиальному закону имеем $M(\mu_n) = np$, $D(\mu_n) = npq$ и тогда $M(\mu_n/n) = p$, а $D(\mu_n/n) = pq/n$ следствие из неравенства Чебышева принимает следующий вид

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{p\cdot q}{n\cdot\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $n \to \infty$ получаем (8.4). ■

17. Центральная предельная теорема.

Рассмотрим теорему закона больших чисел, которая устанавливает факт сходимости по вероятности некоторых случайных величин к постоянным их характеристикам независимо от их закона распределения. Группа теорем, касающихся предельных законов распределения суммы случайных величин, носит общее название центральной предельной теоремы. Центральная предельная теорема (теорема Ляпунова) устанавливает условия, при которых указанный предельный закон является нормальным.

Интегральная и локальная теоремы Муавра-Лапласа также являются следствиями центральной предельной теоремой для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих два значения (см. теоремы 6.4 и 6.5). Приведем без доказательства в упрощенной формулировке Ляпунова А.М. предельную теорему.

Теорема 8.4. (*Ляпунова*). Если случайные величины в последовательности $\{\xi_n\}$,(n=1,2, ...) независимы, одинаково распределены и имеют конечное математическое ожидание $M\xi_n$ и дисперсию $D\xi_n$, а также $M|\xi_n^3| < \infty$, то для любого действительного x

$$F_{\eta_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \blacksquare$$

Здесь $\eta_n = \dfrac{\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\xi_k - M\xi_n}{\sqrt{\dfrac{D\xi_n}{n}}}$ - стандартизированное среднее арифметическое независимых случайных величин, которые при $n \to \infty$ сходятся для любых x к функции распределения $\Phi(x)$ нормированной случайной величины. В таких случаях говорят, что последовательность $\eta_1, \eta_2, \ldots$ асимптотически нормальна.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Нормальное распределение

Плотность вероятности нормированного нормального распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,39894	0,39892	0,39886	0,39876	0,39862	0,39844	0,39822	0,39797	0,39767	0,3973
0,1	0,39695	0,39654	0,39608	0,39559	0,39505	0,39448	0,39387	0,39322	0,39253	0,3918
0,2	0,39104	0,39024	0,3894	0,38853	0,38762	0,38667	0,38568	0,38466	0,38361	0,3825
0,3	0,38139	0,38023	0,37903	0,3778	0,37654	0,37524	0,37391	0,37255	0,37115	0,3697
0,4	0,36827	0,36678	0,36526	0,36371	0,36213	0,36053	0,35889	0,35723	0,35553	0,3538
0,5	0,35207	0,35029	0,34849	0,34667	0,34482	0,34294	0,34105	0,33912	0,33718	0,3352
0,6	0,33322	0,33121	0,32918	0,32713	0,32506	0,32297	0,32086	0,31874	0,31659	0,3144
0,7	0,31225	0,31006	0,30785	0,30563	0,30339	0,30114	0,29887	0,29659	0,29431	0,29
0,8	0,28969	0,28737	0,28504	0,28269	0,28034	0,27798	0,27562	0,27324	0,27086	0,2684
0,9	0,26609	0,26369	0,26129	0,25888	0,25647	0,25406	0,25164	0,24923	0,24681	0,2443
1	0,24197	0,23955	0,23713	0,23471	0,2323	0,22988	0,22747	0,22506	0,22265	0,2202
1,1	0,21785	0,21546	0,21307	0,21069	0,20831	0,20594	0,20357	0,20121	0,19886	0,1965
1,2	0,19419	0,19186	0,18954	0,18724	0,18494	0,18265	0,18037	0,1781	0,17585	0,173
1,3	0,17137	0,16915	0,16694	0,16474	0,16256	0,16038	0,15822	0,15608	0,15395	0,1518
1,4	0,14973	0,14764	0,14556	0,1435	0,14146	0,13943	0,13742	0,13542	0,13344	0,1314
1,5	0,12952	0,12758	0,12566	0,12376	0,12188	0,12001	0,11816	0,11632	0,1145	0,112
1,6	0,11092	0,10915	0,10741	0,10567	0,10396	0,10226	0,10059	0,09893	0,09728	0,0956
1,7	0,09405	0,09246	0,09089	0,08933	0,0878	0,08628	0,08478	0,08329	0,08183	0,0803
1,8	0,07895	0,07754	0,07614	0,07477	0,07341	0,07206	0,07074	0,06943	0,06814	0,0668
1,9	0,06562	0,06438	0,06316	0,06195	0,06077	0,05959	0,05844	0,0573	0,05618	0,0550
2	0,05399	0,05292	0,05186	0,05082	0,0498	0,04879	0,0478	0,04682	0,04586	0,0449
2,1	0,04398	0,04307	0,04217	0,04128	0,04041	0,03955	0,03871	0,03788	0,03706	0,0362
2,2	0,03547	0,0347	0,03394	0,03319	0,03246	0,03174	0,03103	0,03034	0,02965	0,0289
2,3	0,02833	0,02768	0,02705	0,02643	0,02582	0,02522	0,02463	0,02406	0,02349	0,0229
2,4	0,02239	0,02186	0,02134	0,02083	0,02033	0,01984	0,01936	0,01888	0,01842	0,0179
2,5	0,01753	0,01709	0,01667	0,01625	0,01585	0,01545	0,01506	0,01468	0,01431	0,0139
2,6	0,01358	0,01323	0,01289	0,01256	0,01223	0,01191	0,0116	0,0113	0,011	0,0107
2,7	0,01042	0,01014	0,00987	0,00961	0,00935	0,00909	0,00885	0,00861	0,00837	0,0081
2,8	0,00792	0,0077	0,00748	0,00727	0,00707	0,00687	0,00668	0,00649	0,00631	0,0061
2,9	0,00595	0,00578	0,00562	0,00545	0,0053	0,00514	0,00499	0,00485	0,0047	0,0045
3	0,00443	0,0043	0,00417	0,00405	0,00393	0,00381	0,0037	0,00358	0,00348	0,0033
3,1	0,00327	0,00317	0,00307	0,00298	0,00288	0,00279	0,00271	0,00262	0,00254	0,0024
3,2	0,00238	0,00231	0,00224	0,00216	0,0021	0,00203	0,00196	0,0019	0,00184	0,0017
3,3	0,00172	0,00167	0,00161	0,00156	0,00151	0,00146	0,00141	0,00136	0,00132	0,0012
3,4	0,00123	0,00119	0,00115	0,00111	0,00107	0,00104	0,001	0,00097	0,00094	0,000
3,5	0,00087	0,00084	0,00081	0,00079	0,00076	0,00073	0,00071	0,00068	0,00066	0,0006
3,6	0,00061	0,00059	0,00057	0,00055	0,00053	0,00051	0,00049	0,00047	0,00046	0,0004
3,7	0,00042	0,00041	0,00039	0,00038	0,00037	0,00035	0,00034	0,00033	0,00031	0,000
3,8	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024	0,00023	0,00022	0,00021	0,0002
3,9	0,0002	0,00019	0,00018	0,00018	0,00017	0,00016	0,00016	0,00015	0,00014	0,0001
4	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00011	0,0001	9,7E-05	9,3E-0

2. Нормальное распределение

Функция распределения нормированного нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,5199	0,52392	0,5279	0,5319	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,5596	0,56356	0,56749	0,5714	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,5987	0,60257	0,60642	0,6103	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,6368	0,64058	0,64431	0,648	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,6736	0,67724	0,68082	0,6844	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,7088	0,71226	0,71566	0,719	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,7422	0,74537	0,74857	0,7517	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,7734	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,8023	0,80511	0,80785	0,8106	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,8289	0,83147	0,83398	0,8365	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,8531	0,85543	0,85769	0,8599	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,8749	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,8944	0,89617	0,89796	0,8997	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,9115	0,91308	0,91466	0,9162	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,9265	0,92785	0,92922	0,9306	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,9394	0,94062	0,94179	0,9429	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,9505	0,95154	0,95254	0,9535	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,9599	0,9608	0,96164	0,9625	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,9678	0,96856	0,96926	0,9699	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,9744	0,975	0,97558	0,9761	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,9798	0,9803	0,98077	0,9812	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,9842	0,98461	0,985	0,9854	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,9878	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,9906	0,99086	0,99111	0,9913	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,9929	0,99305	0,99324	0,9934	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,9946	0,99477	0,99492	0,9951	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,996	0,99609	0,99621	0,9963	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,997	0,99711	0,9972	0,9973	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,9978	0,99788	0,99795	0,998	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,9984	0,99846	0,99851	0,9986	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,9989	0,99889	0,99893	0,999	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,9992	0,99921	0,99924	0,9993	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,9994	0,99944	0,99946	0,9995	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,9996	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,9997	0,99973	0,99974	0,9997	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,9998	0,99981	0,99982	0,9998	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,9999	0,99987	0,99988	0,9999	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,9999	0,99992	0,99992	0,9999	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,9999	0,99994	0,99995	0,9999	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	1	0,99996	0,99996	1	0,99997
4	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	1	0,99998	0,99998	1	0,99998
4,1	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998	1	0,99998	0,99998	1	0,99999
4,2	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	1	0,99999	0,99999	1	0,99999
4,3	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	1	0,99999	0,99999	1	0,99999
4,4	0,99999	0,99999	1							


Экономический факультет