

# Параметрический тест Гольдфельда-Квондта

- Тест Гольдфельда-Квондта проверяет гипотезу

$H_0 : u_i$  — гомоскедастичны против гипотезы

$H_1 : u_i$  — гетероскедастичны (с  
возрастающей дисперсией)

- 1-й шаг

Ранжируем наблюдения в порядке  
возрастания значений независимой  
переменной  $x$ .

- 2-й шаг

Выбираем  $C$  центральных наблюдений переменной и исключаем их из выборки. Число  $C$  обычно принимают равным от одной четвертой до одной трети общего числа наблюдений. Остаток наблюдений делится на две подвыборки, первая из которых состоит из наименьших значений переменной, вторая – из наибольших.

- 3-й шаг

Строим две эконометрические модели  
на основе каждой из подвыборок,  
содержащих по  $(n - C)/2$  наблюдений

- 4-й шаг

Рассчитываем суммы квадратов ошибок

$$S_1 = \sum u_1^2$$

$$S_2 = \sum u_2^2$$

- 5-й шаг

Рассчитываем значение критерия

$$F^* = \frac{S_2}{S_1}$$

(соответствует  $F$ -распределению с числом степеней свободы  $\nu_1 = \nu_2 = [(n - C)/2] - k$  и уровнем значимости  $\alpha$  )

Если  $F^* \leq F_{табл.}$ , то гипотеза  $H_0 : u_i$  о  
гомоскедастичности величин  $u_i$   
принимается

Проранжируем выборку по возрастанию  
численности проживающих



| Наблюдение | Доход кафе, грн. | Число конкурентов,<br>ед. | Численность<br>проживающих, чел. | Доход семьи, грн. |
|------------|------------------|---------------------------|----------------------------------|-------------------|
| 10         | 108052           | 2                         | 37852                            | 14987             |
| 24         | 98388            | 4                         | 39334                            | 14988             |
| 15         | 103324           | 2                         | 39462                            | 16194             |
| 6          | 91259            | 5                         | 48484                            | 15039             |
| 26         | 101260           | 3                         | 49200                            | 16839             |
| 8          | 160931           | 2                         | 50244                            | 26435             |
| 22         | 109622           | 3                         | 52933                            | 18760             |
| 4          | 122015           | 2                         | 55249                            | 20967             |
| 19         | 121886           | 3                         | 57386                            | 16702             |
| 32         | 117146           | 3                         | 60457                            | 20307             |
| 13         | 105564           | 3                         | 61951                            | 19001             |
| 1          | 107919           | 3                         | 65044                            | 13240             |
| 33         | 163538           | 2                         | 65065                            | 20111             |
| 11         | 144788           | 3                         | 66921                            | 30902             |
| 5          | 152827           | 3                         | 73775                            | 19576             |
| 30         | 105067           | 7                         | 83416                            | 22833             |
| 25         | 140791           | 3                         | 95120                            | 18505             |
| 14         | 102568           | 5                         | 100441                           | 20058             |
| 2          | 118866           | 5                         | 101376                           | 22554             |
| 9          | 98496            | 6                         | 104300                           | 24024             |
| 27         | 139517           | 4                         | 113566                           | 28915             |
| 21         | 152937           | 3                         | 114520                           | 26502             |
| 3          | 98579            | 7                         | 124989                           | 16916             |
| 7          | 123550           | 8                         | 138809                           | 21857             |
| 16         | 127030           | 5                         | 139900                           | 21384             |
| 18         | 125343           | 6                         | 149894                           | 15289             |
| 12         | 164571           | 4                         | 166332                           | 31573             |
| 17         | 166755           | 6                         | 171740                           | 18800             |
| 31         | 136872           | 6                         | 183953                           | 14409             |
| 20         | 134594           | 6                         | 185105                           | 19093             |
| 28         | 115236           | 9                         | 194125                           | 19033             |
| 23         | 149884           | 5                         | 203500                           | 33242             |
| 29         | 136749           | 7                         | 233844                           | 19200             |

Выберем число  $C = 9$

Исключим девять центральных  
наблюдений, оставив две выборки

по  $\frac{33-9}{2} = 12$  наблюдений

| Наблюдение | Доход кафе, грн. | Число конкурентов, ед. | Численность<br>проживающих, чел. | Доход семьи, грн. |
|------------|------------------|------------------------|----------------------------------|-------------------|
| 10         | 108052           | 2                      | 37852                            | 14987             |
| 24         | 98388            | 4                      | 39334                            | 14988             |
| 15         | 103324           | 2                      | 39462                            | 16194             |
| 6          | 91259            | 5                      | 48484                            | 15039             |
| 26         | 101260           | 3                      | 49200                            | 16839             |
| 8          | 160931           | 2                      | 50244                            | 26435             |
| 22         | 109622           | 3                      | 52933                            | 18760             |
| 4          | 122015           | 2                      | 55249                            | 20967             |
| 19         | 121886           | 3                      | 57386                            | 16702             |
| 32         | 117146           | 3                      | 60457                            | 20307             |
| 13         | 105564           | 3                      | 61951                            | 19001             |
| 1          | 107919           | 3                      | 65044                            | 13240             |
|            |                  |                        |                                  |                   |
|            |                  |                        |                                  |                   |
|            |                  |                        |                                  |                   |
|            |                  |                        |                                  |                   |
|            |                  |                        |                                  |                   |
|            |                  |                        |                                  |                   |
|            |                  |                        |                                  |                   |
|            |                  |                        |                                  |                   |
| 21         | 152937           | 3                      | 114520                           | 26502             |
| 3          | 98579            | 7                      | 124989                           | 16916             |
| 7          | 123550           | 8                      | 138809                           | 21857             |
| 16         | 127030           | 5                      | 139900                           | 21384             |
| 18         | 125343           | 6                      | 149894                           | 15289             |
| 12         | 164571           | 4                      | 166332                           | 31573             |
| 17         | 166755           | 6                      | 171740                           | 18800             |
| 31         | 136872           | 6                      | 183953                           | 14409             |
| 20         | 134594           | 6                      | 185105                           | 19093             |
| 28         | 115236           | 9                      | 194125                           | 19033             |
| 23         | 149884           | 5                      | 203500                           | 33242             |
| 29         | 136749           | 7                      | 233844                           | 19200             |

Строим уравнения регрессии, находим остатки,  
рассчитываем их суммы квадратов

| Доход кафе<br>(наблюдаемые значения) | Доход кафе<br>(предсказанные значения) | Остатки  | Квадраты остатков                   |
|--------------------------------------|----------------------------------------|----------|-------------------------------------|
| 108052                               | 105064,6                               | 2987,3   | 8924273,6                           |
| 98388                                | 94935,8                                | 3452,1   | 11917376,2                          |
| 103324                               | 109581,2                               | -6257,2  | 39153532,7                          |
| 91259                                | 91309,5                                | -50,5    | 2557,9                              |
| 101260                               | 108147,1                               | -6887,1  | 47433223,1                          |
| 160931                               | 147472,3                               | 13458,6  | 181134387,5                         |
| 109622                               | 115510,9                               | -5888,9  | 34679340,8                          |
| 122015                               | 128852,6                               | -6837,6  | 46753995,6                          |
| 121886                               | 108887,7                               | 12998,2  | 168954772,4                         |
| 117146                               | 122117,5                               | -4971,5  | 24716257,5                          |
| 105564                               | 117715,0                               | -12151,0 | 147648076,4                         |
| 107919                               | 97771,1                                | 10147,8  | 102978879,8                         |
| Сумма квадратов остатков             |                                        |          | $S_1 = \sum u_1^2$ <b>814296674</b> |

| Доход кафе<br>(наблюдаемые значения) | Доход кафе<br>(предсказанные значения) | Остатки   | Квадраты остатков                    |
|--------------------------------------|----------------------------------------|-----------|--------------------------------------|
| 152937                               | 151368,32                              | 1568,67   | 2460747,3                            |
| 98579                                | 115153,09                              | -16574,09 | 274700739,3                          |
| 123550                               | 112708,73                              | 10841,26  | 117533112,5                          |
| 127030                               | 137871,75                              | -10841,75 | 117543716,6                          |
| 125343                               | 128580,40                              | -3237,40  | 10480801,9                           |
| 164571                               | 158019,57                              | 6551,42   | 42921227,6                           |
| 166755                               | 135659,44                              | 31095,55  | 966933679,6                          |
| 136872                               | 136198,22                              | 673,77    | 453971,5                             |
| 134594                               | 138992,18                              | -4398,18  | 19344034,5                           |
| 115236                               | 115944,41                              | -708,41   | 501854,7                             |
| 149884                               | 159361,39                              | -9477,39  | 89820964,8                           |
| 136749                               | 142242,44                              | -5493,44  | 30177979,6                           |
| Сумма квадратов остатков             |                                        |           | $S_2 = \sum u_2^2$ <b>1672872830</b> |

$$F^* = \frac{S_2}{S_1} = \frac{1672872830}{814296674} = 2,05$$

$$v_1 = v_2 = [(n - C) / 2] - k = [(33 - 9) / 2] - 4 = 8$$

$$\alpha = 0,05$$

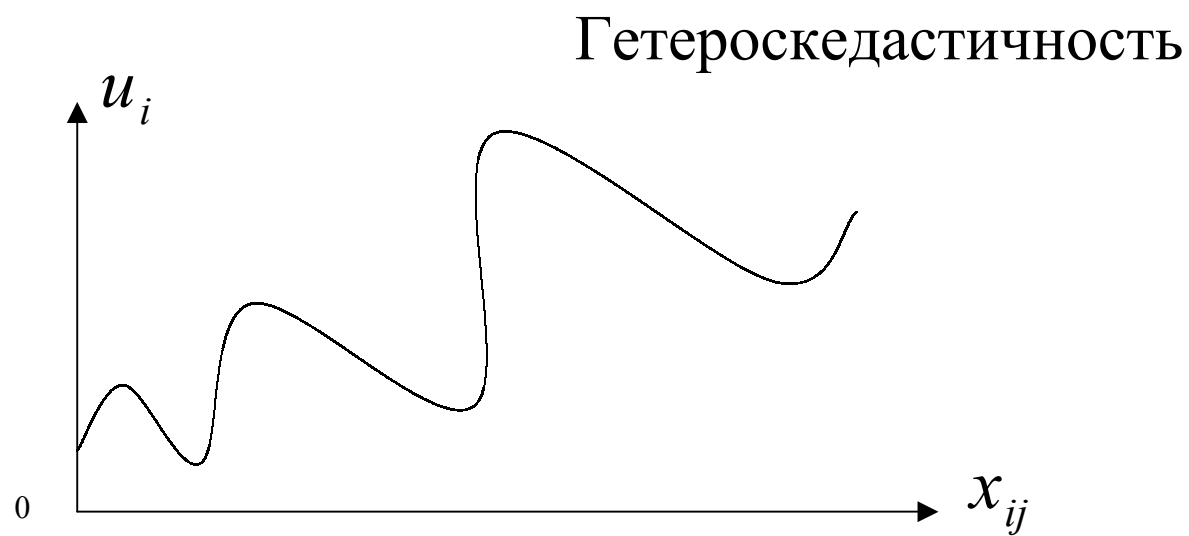
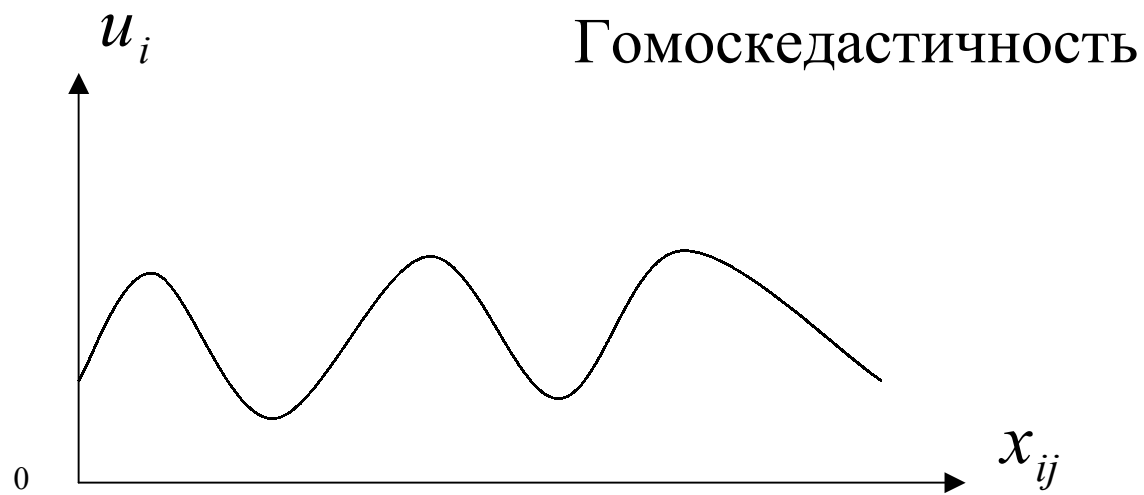
$$(F_{табл.} = 3,44)$$

**Вывод:** имеет место гомоскедастичность  
ошибок модели

## Непараметрический тест Гольдфельда-Квондта

- В основе теста лежит оценка числа вершин величины остатков, получаемых после упорядочения наблюдений переменной  $x_j$ . Оценка осуществляется визуально путем анализа графика изменения остатков  $u_i$  при изменении значений переменной  $x_j$ .





# Тест Глейсера

- 1-й шаг

Рассчитываются параметры уравнения регрессии и находятся величины отклонений  $u_i$

- 2-й шаг

Строятся уравнения регрессии,  
увязывающие модули остатков и фактор  
пропорциональности

$$|u| = \alpha_0 + \alpha_1 x + \varepsilon \quad |u| = \alpha_0 + \alpha_1 x^{-1} + \varepsilon$$

$$|u| = \alpha_0 + \alpha_1 x^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \quad |u| = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x} + \varepsilon$$

$$|u| = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x^2} + \varepsilon$$

Выбирается та модель, которая наиболее точно описывает связь между рассматриваемыми величинами

Если оба параметра  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  являются значимыми (т.е.  $\alpha_0 \neq 0$  и  $\alpha_1 \neq 0$ ), то имеет место смешанная гетероскедастичность.

Если  $\alpha_0 = 0$ , а  $\alpha_1 \neq 0$ , то — чистая

## Тест Бреуша-Пэйдана

- Осуществляет попытку определить гетероскедастичность путем оценки общей значимости вторичного уравнения регрессии, построенного на основе квадратов отклонений зависимой переменной и сразу нескольких факторов пропорциональности

- 1-й шаг

Находим отклонения на основе построенного уравнения регрессии

## 2-й шаг

Строим вторичное уравнение регрессии.

Зависимая переменная – квадраты отклонений. Независимые переменные – те из основной модели, которые влияют на вариацию отклонений

$$u^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j x_j + \varepsilon$$

$p$  – число факторов, определяющих вариацию отклонений

- 3-й шаг

Проверяем статистическую значимость уравнения, формулируя гипотезы

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0,$$

$$H_1 : \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \dots, \alpha_p \neq 0.$$

Рассчитываем статистику

$$L = \frac{SSR}{2 \left[ \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{n} \right]^2}$$



Для больших по размеру выборок  $L$  имеет  $\chi^2$ -распределение с числом степеней свободы, равным  $p$  и уровнем значимости  $\alpha$  .

Если

$$L > \chi_{табл.}^2 ,$$

то нулевая гипотеза отвергается и  
уравнение считается значимым.

Т.о. делается вывод о наличии  
гетероскедастичности

## Тест Уайта

- В качестве независимых переменных (факторов пропорциональности) выступают все исходные независимые переменные, их квадраты и попарные произведения

- 1-й шаг

Находим отклонения наблюдаемых значений зависимой переменной от расчетных

- 2-й шаг

Строим вторичное уравнение регрессии

$$\begin{aligned} u^2 = & \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m + \\ & + \beta_1 x_1^2 + \dots + \beta_m x_m^2 + \\ & + \gamma_1 x_1 x_2 + \dots + \gamma_m x_{m-1} x_m + \varepsilon \end{aligned}$$

- 3-й шаг

Проверяем общую значимость уравнения с помощью критерия  $\chi^2$

Рассчитываем статистику  $nR^2$ , где  $R^2$  – нескорректированный коэффициент детерминации, которая имеет  $\chi^2$ -распределение с числом степеней свободы, равным числу угловых коэффициентов модели, и уровнем значимости  $\alpha$

Если

$$nR^2 > \chi_{табл.}^2 ,$$

то гипотеза об отсутствии  
гетероскедастичности остатков  
отвергается

## Обобщенный метод наименьших квадратов (метод Эйткена)

Пусть модель описывается уравнением

$$Y = X\hat{A} + u$$

и имеет дисперсию остатков, которая описывается выражением

$$Var(u) = \sigma_u^2 Z$$



Фактор пропорциональности  $Z$  представлен в виде симметричной, положительно определенной матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Диагональные элементы определяют пропорции изменения дисперсий в зависимости от наблюдения объясняющей переменной  $x$

Если  $Z = x_j$  и

$$Var(u) = \sigma_u^2 x_j,$$

то

$$\lambda_i = \frac{1}{x_{ij}}$$

Если  $Z = x_j^2$  и

$$Var(u) = \sigma_u^2 x_j^2 ,$$

то

$$\lambda_i = \frac{1}{x_{ij}^2}$$

$$Z = P' P$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Используя соотношение  $Z = P'P$  и  
вытекающие из него

$$P^{-1}Z(P^{-1})' = E$$

и

$$(P^{-1})'P^{-1} = Z^{-1},$$

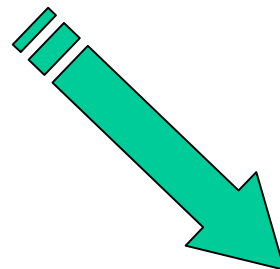
преобразуем исходное уравнение регрессии

$$P^{-1}Y = P^{-1}X\hat{A} + P^{-1}u$$

$$Y^* = P^{-1}Y$$

$$X^* = P^{-1}X$$

$$u^* = P^{-1}u$$



$$Y^* = X^* \hat{A} + u^*$$

Используя выражение  $P^{-1}Z(P^{-1})' = E$  ,  
можно показать, что

$$Var(u^*) = \sigma_u^2 E$$

$$\hat{A} = \left[ (X^*)' X^* \right]^{-1} (X^*)' Y^* = (X' Z^{-1} X)^{-1} X' Z^{-1} Y$$

Дисперсионно-ковариационная матрица

$$Var(\hat{A}) = \hat{\sigma}_u^2 \left[ (X^*)' X^* \right]^{-1} = \sigma_u^2 (X' Z^{-1} X)^{-1}$$



## Несмещенная оценка дисперсии остатков

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_u^2 &= \frac{(Y^* - X^* \hat{A})' (Y^* - X^* \hat{A})}{n - k} = \frac{(Y - X\hat{A})' Z^{-1} (Y - X\hat{A})}{n - k} = \\ &= \frac{u' Z^{-1} u}{n - k}.\end{aligned}$$

Разложим общую сумму квадратов на сумму квадратов регрессии и ошибок

$$Y'Z^{-1}Y = \hat{A}'X'Z^{-1}Y + u'Z^{-1}u$$

Рассчитаем общую дисперсию

$$\sigma_{\text{общ.}}^2 = \frac{Y'Z^{-1}Y}{n-1},$$

дисперсию, объясняемую регрессией

$$\sigma_{\text{рег.}}^2 = \frac{\hat{A}'X'Z^{-1}Y}{k-1}$$

и дисперсию ошибок

$$\sigma_{ош.}^2 = \frac{u' Z^{-1} u}{n - k}$$

Если имеет место система соотношений

$$Var(u) = V$$

$$Y = X\hat{A} + u$$

$$M(u) = 0$$

где  $V = \sigma_u^2 Z$  — известная симметричная положительно определенная матрица, то вектор  $\hat{A}$  рассчитывается как

$$\hat{A} = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} Y,$$

а дисперсионно-ковариационная матрица определяется из выражения

$$Var(\hat{A}) = \hat{\sigma}_u^2 (X' V^{-1} X)^{-1}$$

# Имеются данные о затратах на питание и общих затратах

| Наблюдение | Затраты на питание | Общие затраты |
|------------|--------------------|---------------|
| 1          | 3,3                | 14            |
| 2          | 3,2                | 15            |
| 3          | 3                  | 15            |
| 4          | 3,2                | 17            |
| 5          | 3,1                | 17            |
| 6          | 3,3                | 17            |
| 7          | 3,4                | 18            |
| 8          | 3,5                | 19            |
| 9          | 3,2                | 20            |
| 10         | 4,1                | 21            |
| 11         | 3,5                | 22            |
| 12         | 3,8                | 39            |
| 13         | 4                  | 55            |
| 14         | 3,7                | 72            |
| 15         | 4,9                | 80            |
| 16         | 4,1                | 85            |
| 17         | 4,95               | 90            |

$$S = 5$$

| Наблюдение | Затраты на питание | Общие затраты | Наблюдение | Затраты на питание | Общие затраты |
|------------|--------------------|---------------|------------|--------------------|---------------|
| 1          | 3,3                | 14            |            |                    |               |
| 2          | 3,2                | 15            |            |                    |               |
| 3          | 3                  | 15            | 12         | 3,8                | 39            |
| 4          | 3,2                | 17            | 13         | 4                  | 55            |
| 5          | 3,1                | 17            | 14         | 3,7                | 72            |
| 6          | 3,3                | 17            | 15         | 4,9                | 80            |
|            |                    |               | 16         | 4,1                | 85            |
|            |                    |               | 17         | 4,95               | 90            |

# Расчеты для первой подвыборки

| <i>Регрессионная статистика</i> |                |
|---------------------------------|----------------|
| <b>Множественный R</b>          | <b>0,021</b>   |
| <b>R-квадрат</b>                | <b>0,00046</b> |
| <b>Нормированный R-квадрат</b>  | <b>-0,249</b>  |
| <b>Стандартная ошибка</b>       | <b>0,131</b>   |
| <b>Наблюдения</b>               | <b>6</b>       |

| <b>Дисперсионный анализ</b> |           |                |                |               |                     |
|-----------------------------|-----------|----------------|----------------|---------------|---------------------|
|                             | <i>df</i> | <i>SS</i>      | <i>MS</i>      | <i>F</i>      | <i>Значимость F</i> |
| <b>Регрессия</b>            | <b>1</b>  | <b>0,00003</b> | <b>0,00003</b> | <b>0,0018</b> | <b>0,9678</b>       |
| <b>Остаток</b>              | <b>4</b>  | <b>0,0683</b>  | <b>0,0171</b>  |               |                     |
| <b>Итого</b>                | <b>5</b>  | <b>0,0683</b>  |                |               |                     |

|                   | <i>Коеф-ты</i>  | <i>Стандартная<br/>ошибка</i> | <i>t-стат.</i> | <i>P-<br/>Значение</i> | <i>Нижние<br/>95%</i> | <i>Верхние<br/>95%</i> |
|-------------------|-----------------|-------------------------------|----------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| <b>Y-пересеч.</b> | <b>3,213</b>    | <b>0,698</b>                  | <b>4,602</b>   | <b>0,01</b>            | <b>1,275</b>          | <b>5,152</b>           |
| <b>Перем. X 1</b> | <b>-0,00189</b> | <b>0,044</b>                  | <b>-0,0429</b> | <b>0,968</b>           | <b>-0,124</b>         | <b>0,12</b>            |

### ВЫВОД ОСТАТКА

| <i>Наблюдение</i>         | <i>Предсказанное Y</i> | <i>Остатки</i> | <i>Квадраты остатков</i> |
|---------------------------|------------------------|----------------|--------------------------|
| <b>1</b>                  | <b>3,187</b>           | <b>0,113</b>   | <b>0,013</b>             |
| <b>2</b>                  | <b>3,185</b>           | <b>0,015</b>   | <b>0,0002</b>            |
| <b>3</b>                  | <b>3,185</b>           | <b>-0,185</b>  | <b>0,0342</b>            |
| <b>4</b>                  | <b>3,181</b>           | <b>0,0189</b>  | <b>0,00036</b>           |
| <b>5</b>                  | <b>3,181</b>           | <b>-0,081</b>  | <b>0,0066</b>            |
| <b>6</b>                  | <b>3,181</b>           | <b>0,1189</b>  | <b>0,0141</b>            |
| <b><math>S_1 =</math></b> |                        |                | <b>0,0683</b>            |



# Расчеты для второй подвыборки

| <i>Регрессионная статистика</i> |              |
|---------------------------------|--------------|
| <b>Множественный R</b>          | <b>0,65</b>  |
| <b>R-квадрат</b>                | <b>0,42</b>  |
| <b>Нормированный R-квадрат</b>  | <b>0,278</b> |
| <b>Стандартная ошибка</b>       | <b>0,466</b> |
| <b>Наблюдения</b>               | <b>6</b>     |

| <b>Дисперсионный анализ</b> |           |               |              |              |                     |
|-----------------------------|-----------|---------------|--------------|--------------|---------------------|
|                             | <i>df</i> | <i>SS</i>     | <i>MS</i>    | <i>F</i>     | <i>Значимость F</i> |
| <b>Регрессия</b>            | <b>1</b>  | <b>0,635</b>  | <b>0,635</b> | <b>2,926</b> | <b>0,162</b>        |
| <b>Остаток</b>              | <b>4</b>  | <b>0,8675</b> | <b>0,217</b> |              |                     |
| <b>Итого</b>                | <b>5</b>  | <b>1,502</b>  |              |              |                     |

|                   | <i>Коеф-ты</i> | <i>Стандартная<br/>ошибка</i> | <i>t-стат.</i> | <i>P-<br/>Значение</i> | <i>Нижние<br/>95%</i> | <i>Верхние<br/>95%</i> |
|-------------------|----------------|-------------------------------|----------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| <b>Y-пересеч.</b> | <b>2,964</b>   | <b>0,771</b>                  | <b>3,847</b>   | <b>0,018</b>           | <b>0,825</b>          | <b>5,104</b>           |
| <b>Перем. X 1</b> | <b>0,0182</b>  | <b>0,011</b>                  | <b>1,711</b>   | <b>0,162</b>           | <b>-0,011</b>         | <b>0,0478</b>          |

### ВЫВОД ОСТАТКА

| <i>Наблюдение</i>         | <i>Предсказанное Y</i> | <i>Остатки</i> | <i>Квадраты остатков</i> |
|---------------------------|------------------------|----------------|--------------------------|
| <b>1</b>                  | <b>3,674</b>           | <b>0,1257</b>  | <b>0,0158</b>            |
| <b>2</b>                  | <b>3,966</b>           | <b>0,0344</b>  | <b>0,0012</b>            |
| <b>3</b>                  | <b>4,275</b>           | <b>-0,5750</b> | <b>0,3307</b>            |
| <b>4</b>                  | <b>4,421</b>           | <b>0,4793</b>  | <b>0,2298</b>            |
| <b>5</b>                  | <b>4,512</b>           | <b>-0,4117</b> | <b>0,1695</b>            |
| <b>6</b>                  | <b>4,603</b>           | <b>0,3473</b>  | <b>0,1206</b>            |
| <b><math>S_2 =</math></b> |                        |                | <b>0,8675</b>            |

$$F^* = \frac{S_2}{S_1} = \frac{0,867509357}{0,068301887} = 12,7011$$

$$F_{табл.} = 6,39$$

Имеет место гетероскедастичность

Применим метод 1МНК

| <i>Регрессионная статистика</i> |              |
|---------------------------------|--------------|
| <b>Множественный R</b>          | <b>0,843</b> |
| <b>R-квадрат</b>                | <b>0,711</b> |
| <b>Нормированный R-квадрат</b>  | <b>0,691</b> |
| <b>Стандартная ошибка</b>       | <b>0,325</b> |
| <b>Наблюдения</b>               | <b>17</b>    |

| <i>Дисперсионный анализ</i> |           |               |               |              |                     |
|-----------------------------|-----------|---------------|---------------|--------------|---------------------|
|                             | <i>df</i> | <i>SS</i>     | <i>MS</i>     | <i>F</i>     | <i>Значимость F</i> |
| <b>Регрессия</b>            | <b>1</b>  | <b>3,899</b>  | <b>3,899</b>  | <b>36,82</b> | <b>0,00002</b>      |
| <b>Остаток</b>              | <b>4</b>  | <b>1,588</b>  | <b>0,1059</b> |              |                     |
| <b>Итого</b>                | <b>5</b>  | <b>5,4876</b> |               |              |                     |

|            | <i>Коэф-ты</i> | <i>Стандартная<br/>ошибка</i> | <i>t-стат.</i> | <i>P-<br/>Значение</i> | <i>Нижние<br/>95%</i> | <i>Верхние<br/>95%</i> |
|------------|----------------|-------------------------------|----------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| Y-пересеч. | <b>3,026</b>   | <b>0,131</b>                  | <b>23,06</b>   | <b>3,9702E-13</b>      | <b>2,746</b>          | <b>3,3054</b>          |
| Перем. X 1 | <b>0,0176</b>  | <b>0,0029</b>                 | <b>6,068</b>   | <b>0,00002</b>         | <b>0,0114</b>         | <b>0,0237</b>          |

| <i>Наблюдение</i> | <i>Предсказанное Y</i> | <i>Остатки</i> |
|-------------------|------------------------|----------------|
| <b>1</b>          | <b>3,27</b>            | <b>0,028</b>   |
| <b>2</b>          | <b>3,28</b>            | <b>-0,089</b>  |
| <b>3</b>          | <b>3,28</b>            | <b>-0,289</b>  |
| <b>4</b>          | <b>3,32</b>            | <b>-0,12</b>   |
| <b>5</b>          | <b>3,32</b>            | <b>-0,22</b>   |
| <b>6</b>          | <b>3,32</b>            | <b>-0,024</b>  |
| <b>7</b>          | <b>3,34</b>            | <b>0,058</b>   |
| <b>8</b>          | <b>3,35</b>            | <b>0,14</b>    |
| <b>9</b>          | <b>3,37</b>            | <b>-0,176</b>  |
| <b>10</b>         | <b>3,39</b>            | <b>0,705</b>   |
| <b>11</b>         | <b>3,41</b>            | <b>0,088</b>   |
| <b>12</b>         | <b>3,71</b>            | <b>0,089</b>   |
| <b>13</b>         | <b>3,99</b>            | <b>0,008</b>   |
| <b>14</b>         | <b>4,28</b>            | <b>-0,58</b>   |
| <b>15</b>         | <b>4,42</b>            | <b>0,47</b>    |
| <b>16</b>         | <b>4,51</b>            | <b>-0,41</b>   |
| <b>17</b>         | <b>4,60</b>            | <b>0,34</b>    |



Найдем произведение  $X'Z^{-1}$

$$X'Z^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0714 & 0,0667 & 0,0667 & 0,0588 & 0,0588 & 0,0588 & 0,0556 & 0,0526 & 0,05 & 0,0476 & 0,0455 & 0,0256 & 0,0182 & 0,0139 & 0,0125 & 0,0118 & 0,0111 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем произведение  $X'Z^{-1}X$

$$X'Z^{-1}X = \begin{pmatrix} 0,72558 & 17 \\ 17 & 616 \end{pmatrix}$$

Обратим полученное выражение

$$(X'Z^{-1}X)^{-1} = \begin{pmatrix} 3,89978 & -0,1076 \\ -0,1076 & 0,00459 \end{pmatrix}$$



Найдем произведение  $X'Z^{-1}Y$

$$X'Z^{-1}Y = \begin{pmatrix} 2,48722 \\ 62,25 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем вектор оценок  $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3,00002 \\ 0,01826 \end{pmatrix}$$

Уравнение регрессии  $\hat{Y} = 3,00002 + 0,01826X$

По сравнению с полученным ранее уравнением

$$\hat{Y} = 3,025773574 + 0,017551703X$$

оценки нового уравнения считаются более  
эффективными