Тема 4

Эконометрические модели на основе систем одновременных уравнений

Общие положения. Понятие системы одновременных структурных уравнений

- Между большинством экономических показателей существуют обратные связи

- Наряду с зависимостями типа $y = f(x)$ мы имеем еще и зависимости типа

$$x = f(y)$$

- Данная ситуация влечет за собой нарушение предположения о независимости переменных x и величин остатков u

$$\operatorname{cov}(x,u)\neq 0$$

Определение

- Система уравнений, которая описывает взаимную зависимость между переменными, носит название **системы одновременных уравнений**

Примеры систем одновременных уравнений

1. Пусть необходимо оценить спрос на некоторый продукт. Общеизвестно, что потребность в каком-либо товаре зависит как от его цены, так и цен на другие товары, и дохода. Учитывая этот факт, размер спроса может быть представлен в виде функции

$$D = a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 I + u$$

Обозначения

- P_1 – средняя цена на продукт
- P_2 – цены на другие продукты
- I – размер дохода
- u – величина остатка

- Наряду с тем, что спрос есть функция от цены, цена также определяется спросом. Отсюда цену на рассматриваемый продукт можно представить в виде

$$P_1 = b_0 + b_1 D + b_2 R + \varepsilon$$

R – индекс погодных условий

- Выражение для цены на искомый продукт

$$P_1 = b_0 + b_1\left(a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 I + u\right) + b_2 R + \varepsilon$$

P_1 является функцией от величины остатка u , что является нарушением классического предположения их независимости для регрессионных моделей

2. Модель, описывающая зависимость между денежной массой и уровнем доходов

$$M = b_0 + b_1 I + u$$

M – денежная масса

I – уровень реального дохода

Уровень реального дохода является функцией от денежной массы, инвестиционных решений и других факторов

$$I = \alpha_0 + \alpha_1 M + \alpha_2 K + \ldots + v$$

K – инвестиции

Осуществляем подстановку. Получаем

$$I = \alpha_0 + \alpha_1 \left(b_0 + b_1 I + u \right) + \alpha_2 K + \ldots + v$$

Переменная I является функцией от величины остатков u и, следовательно,

$$\operatorname{cov}\left(I, u \right) \neq 0$$

3. Кейнсианская модель определения дохода

$$C = a_0 + a_1 I + u$$

$$0 < a_1 < 1$$

I – величина дохода

$$I_t = C_t + K_t$$

C_t – затраты на потребление

K_t – инвестиции

t – время

Величина K_t может рассматриваться как сбережения S_t (накопления)

$$K_t = S_t$$

Величины C и I являются взаимозависимыми, а это влечет за собой зависимость между I и остатками u .

4. Модель Филипса «зарплата-цена»

$$\begin{cases} W_t^0 = a_0 + a_1 UN_t + a_2 P_t^0 + u_{1t} \\ P_t^0 = b_0 + b_1 W_t^0 + b_2 R_t^0 + b_3 M_t^0 + u_{2t} \end{cases}$$

W^0 – норма изменения зарплаты в денежном выражении

UN – уровень безработицы, %

P^0 – норма изменения цены

R^0 – норма изменения затрат капитала

M^0 – норма изменения цен на импортируемое сырье

t – время

u – остатки

- Переменные W^0 и P^0 взаимозависимы

- Так как они коррелируют с соответствующими случайными величинами u , то 1МНК применим быть не может

5. Модель равновесия на рынке товаров

- функция потребления $C_t = a_0 + a_1 I_{dt}, \quad 0 < a_1 < 1$
- функция налогов $T_t = b_0 + b_1 I_t, \quad 0 < b_1 < 1$
- функция инвестиций $K_t = \gamma_0 + \gamma_1 r_t,$
- государственные расходы $G_t = \overline{G}$
- национальный доход $I_t = C_t + K_t + G_t$
- чистый доход $I_{dt} = I_t - T_t$

I – национальный доход,

C – затраты на потребление,

K – запланированные или желаемые чистые инвестиции,

G – затраты государственного сектора,

T – налоги,

r – ставка процента,

I_d – чистый доход.

- Путем подстановки уравнений с последующими преобразованиями получаем так называемую IS -модель

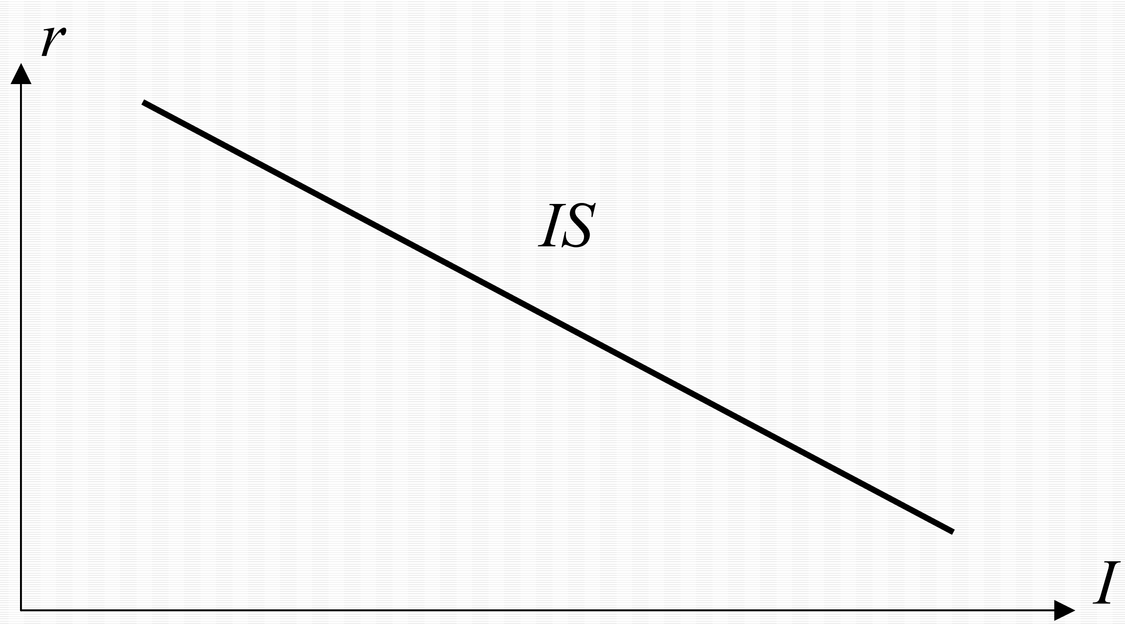
$$I_t = \pi_0 + \pi_1 r_t$$

где

$$\pi_0 = \frac{a_0 - b_0 a_1 + \gamma_0 + \overline{G}}{1 - a_1(1 - b_1)}$$

$$\pi_1 = \frac{1}{1 - a_1(1 - b_1)}$$

- Модель описывает условие равновесия на рынке товаров. Она позволяет найти комбинацию величины процентной ставки и дохода, обеспечивающую равновесие рынка товаров. Графически модель выглядит следующим образом



- Если оценивать функцию потребления изолированно, то невозможно будет получить эффективные, несмещенные оценки. Отсюда оценка параметров модели должна бы осуществлена комплексно и метод 1МНК здесь не применим

6. *LM*-модель

- Модель позволяет определить соотношение процентной ставки и уровня доходов, при котором обеспечивается равновесие на рынке денег

- функция спроса на деньги $M_t^d = a + bI_t - cr_t$
- функция предложения денег $M_t^s = \overline{M}$
- условие равновесия $M_t^d = M_t^s$

I – доход

$\overline{M}$ – средний уровень предложения денег

r – процентная ставка.

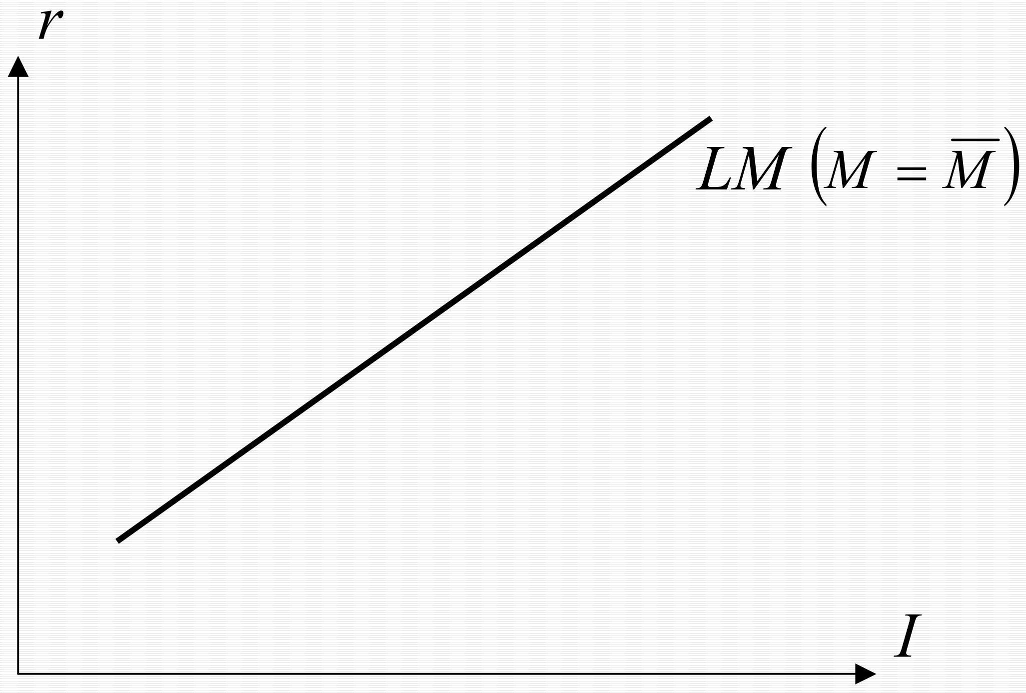
LM-модель

$$I_t = \lambda_0 + \lambda_1 M + \lambda_2 r_t$$

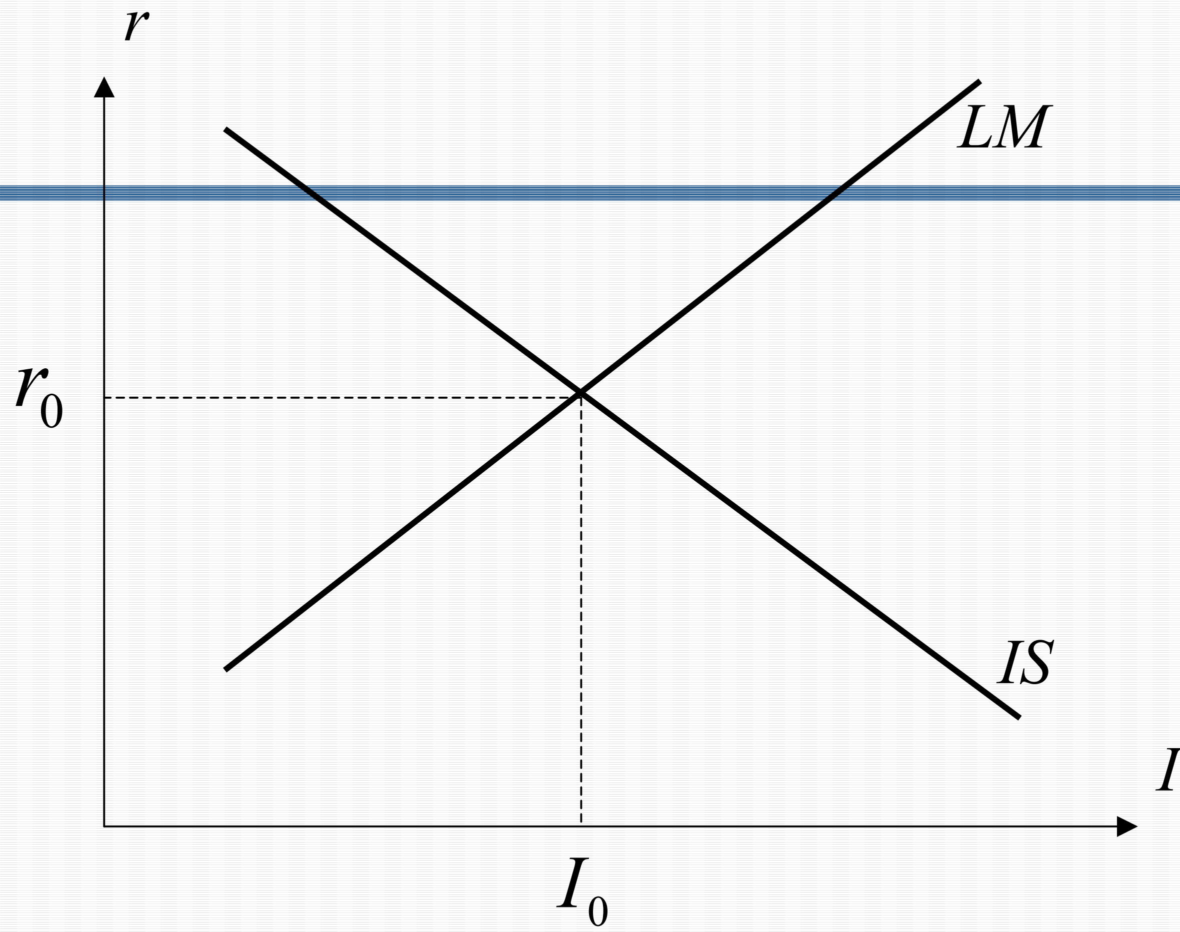
где

$$\lambda_0 = -\frac{a}{b} \qquad \lambda_1 = \frac{1}{b} \qquad \lambda_2 = \frac{c}{b}$$

Графический вид модели



- Кривые IS и LM, соответственно, показывают, что все множество процентных ставок согласуется с равновесием на рынке товаров и рынке денег.
- Только одна процентная ставка и один уровень дохода будут одновременно удовлетворять условию равновесия на этих рынках



r
LM
r_0
IS
I
I_0

7. Эконометрическая модель Лоренса Клейна

- функция потребления

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 \left(W + W^{/}\right)_t + \beta_3 P_{t-1} + u_{1t}$$

- инвестиционная функция

$$K_t = \beta_4 + \beta_5 P_t + \beta_6 P_{t-1} + \beta_7 D_{t-1} + u_{2t}$$

- спрос на труд

$$W_t = \beta_8 + \beta_9 \left(I + T - W^{/}\right)_t + \beta_{10} \left(I + T - W^{/}\right)_{t-1} + \beta_{11} t + u_{3t}$$

- тождества

$$I_t + T_t = C_t + K_t + G_t \qquad I_t = W_t + W_t^{/} + P_t$$

$$D_t = D_{t-1} + K_t$$

C – затраты на потребление

K – инвестиции

G – затраты государственного сектора

P – прибыль

W – зарплата в частном секторе

W' – зарплата в государственном секторе

D – запасы капитала

T – налоги

I – доход после уплаты налогов

t – время

u_1, u_2, u_3 – случайные величины

- переменные

$$C \quad K \quad W \quad I \quad P \quad D$$

– взаимозависимые или эндогенные

$$P_{t-1} \quad D_{t-1} \quad I_{t-1}$$

– заранее определенные

- Смещение оценок, которое здесь имеет место, носит название **смещения одновременных уравнений**

8. Размер валового внутреннего продукта как функция от производственных ресурсов, основных производственных фондов, рабочей силы и материальных ресурсов

$$X_t = a_0 F_t^{a_1} L_t^{a_2} u_t$$

$$M_t = b_0 + b_1 X_t + v_t$$

$$I_t = X_t - M_t$$

I_t – внутренний валовой продукт

X_t – выпуск продукции

M_t – материальные ресурсы

F_t – основные производственные фонды

L_t – рабочая сила

t – время

$u_t,\ v_t$ – случайные переменные (остатки)

$a_0,\ a_1,\ a_2,\ b_0,\ b_1$ – параметры модели, которые необходимо определить

- Модифицикация модели с учетом лаговой переменной X_{t-1} (объемы производства в данный период зависят от их объемов в предыдущем периоде времени)

$$X_t = a_0 X_{t-1}^{a_1} F_t^{a_2} L_t^{a_3} u_t$$

$$M_t = b_0 + b_1 X_t + v_t$$

$$I_t = X_t - M_t$$

- В такой формулировке переменные X_t и u_t становятся зависимыми, что приводит к смещенности оценок, если их рассчитывать методом 1МНК

9. Зависимость между себестоимостью продукции, производительностью труда и уровнем заработной платы

$$T_c = \alpha_0 T_n^{\alpha_1} T_з^{\alpha_2} u$$

$$T_n = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m + u_1$$

$$T_з = b_0 + b_1 x_1^{/} + b_2 x_2^{/} + \ldots + b_m x_m^{/} + u_2$$

$$T_c = k T_з$$

T_c – индекс снижения себестоимости продукции

T_n – темп роста производительности труда

$T_з$ – темп роста заработной платы

$x_i, \; x_i^{/}$ – факторы, влияющие на производительность труда и заработную плату

Нахождение параметров модели должно быть осуществлено при одновременном решении всех уравнений системы

- Эконометрическая модель представляет собой совокупность соотношений, которые описывают взаимосвязи между экономическими показателями.
- Эти взаимосвязи могут иметь как стохастический, так и детерминированный характер.
- Системы одновременных структурных уравнений включают, как правило, линейные соотношения. Нелинейности чаще всего аппроксимируются линейными уравнениями

Эконометрическая модель в общем виде на основе системы одновременных структурных уравнений

$$\begin{cases} y_{1t} = a_{11}y_{1t} + \ldots + a_{1k}y_{kt} + b_{10}x_{0t} + \ldots + b_{1m}x_{mt} + u_{1t} \\ y_{2t} = a_{21}y_{1t} + \ldots + a_{2k}y_{kt} + b_{20}x_{0t} + \ldots + b_{2m}x_{mt} + u_{2t} \\ \vdots \\ y_{kt} = a_{k1}y_{1t} + \ldots + a_{kk}y_{kt} + b_{k0}x_{0t} + \ldots + b_{km}x_{mt} + u_{kt} \end{cases}$$

$$x_{0t} = 1$$

В матричной форме

$$Y = AY + BX + u$$

Определение

- *Эконометрическая модель в виде системы уравнений непосредственно отражает структуру связей между переменными и поэтому носит название **структурной формы эконометрической модели***

- Решение системы структурных уравнений относительно переменных y

$$\begin{cases} Y_{1t} = r_{10}x_{0t} + r_{11}x_{1t} + \ldots + r_{1m}x_{mt} + v_{1t} \\ Y_{2t} = r_{20}x_{0t} + r_{21}x_{1t} + \ldots + r_{2m}x_{mt} + v_{2t} \\ \vdots \\ Y_{kt} = r_{k0}x_{0t} + r_{k1}x_{1t} + \ldots + r_{km}x_{mt} + v_{kt} \end{cases}$$

- Преобразование исходной системы в матричной форме относительно Y

$$Y - AY = BX + u$$

$$(E - A)Y = BX + u$$

$$Y = (E - A)^{-1} BX + (E - A)^{-1} u$$

$$Y = RX + v$$

где

$$R = (E - A)^{-1} B \qquad v = (E - A)^{-1} u$$

Определение

- *Эконометрическая модель, представленная системой уравнений относительно переменных* Y *, носит название* ***приведенной*** *или* ***усеченной,*** *или* ***редуцированной формы модели***

- Параметры структурной модели оценивают прямое влияние заранее определенных переменных на эндогенные переменные

- Параметры редуцированной модели оценивают и прямое, и непрямое влияние на эндогенные переменные

Причины для использования редуцированной формы уравнений

- Так как уравнениям в редуцированной форме не присуще свойство одновременности, они не нарушают классического предположения о независимости экзогенных переменных x и ошибок u . Следовательно, данные уравнения могут быть оценены методом 1МНК без необходимости иметь дело с проблемами одновременных уравнений.

- Иногда коэффициенты редуцированной модели могут быть использованы для расчета коэффициентов структурной модели. Для этих целей используется (довольно редко) непрямой метод наименьших квадратов.

- Интерпретация коэффициентов редуцированной формы как мультипликаторов (коэффициентов эластичности) позволяет использовать их при интерпретации экономических показателей.

- Возможно, наиболее важной причиной является то, что уравнения в редуцированной форме играют важную роль при использовании двушагового метода наименьших квадратов (2МНК) для оценки параметров одновременных уравнений