

Оценка смещения параметров модели



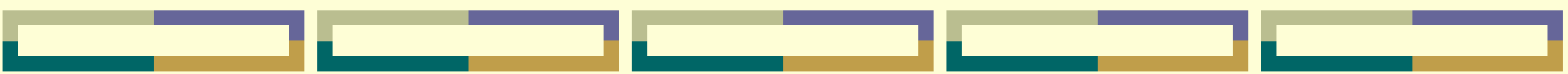


Рассмотрим кейнсианскую модель
определения дохода

$$C = a_0 + a_1 I + u \quad 0 < a_1 < 1$$

$$I_t = C_t + K_t$$


Age Group	Male	Female	Not specified	Other	Unknown
18-24	45%	55%	0%	0%	0%
25-34	40%	60%	0%	0%	0%
35-44	35%	65%	0%	0%	0%
45-54	30%	70%	0%	0%	0%
55-64	25%	75%	0%	0%	0%

- 
- Оценка параметра a_1 уравнения регрессии называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно самой оценке

$$M(a_1) = \hat{a}_1$$

- Для нашего случая имеем

$$M(a_1) = \hat{a}_1 + M \left[\frac{\sum u_t (I_t - \bar{I})}{\sum (I_t - \bar{I})^2} \right]$$




● Если показать, что отношение

$$\frac{\sum u_t (I_t - \bar{I})}{\sum (I_t - \bar{I})^2}$$

не является нулем, то полученная
оценка параметра a_1 является
смещенной





Методы оценки параметров систем одновременных уравнений

- Метод не прямых наименьших квадратов;
 - Метод инструментальных переменных;
 - Двухшаговый метод наименьших квадратов;
- 

- 
- Метод наибольшей вероятности ограниченной информации;
 - Метод смешанного оценивания;
 - Трехшаговый метод наименьших квадратов;
 - Метод наибольшей вероятности полной информации.
- 

Двухшаговый метод наименьших квадратов (2МНК)

(метод инструментальных переменных)

- Нарушения условия независимости переменных и остатков можно избежать, если сумеем найти такую переменную, которая
 - является хорошей заменой для эндогенной (зависимой) переменной;
 - не коррелирует с ошибками (остатками) модели.

- 
- Подставляя данную переменную вместо эндогенной в уравнение системы мы, тем самым, обеспечиваем выполнение необходимого условия

$$\text{cov}(x, u) = 0$$




● Рассмотрим некоторую систему
одновременных уравнений

$$y_{1t} = \beta_0 + \beta_1 y_{2t} + \beta_2 x_t + u_{1t}$$

$$y_{2t} = \alpha_0 + \alpha_1 y_{1t} + \alpha_2 z_t + u_{2t}$$


- 
- Если мы найдем переменную, которая сильно коррелирует с переменной y_2 , но не коррелирует с u , то мы сможем подставить ее в первое уравнение системы и, тем самым, избежать нарушения классического предположения.





Метод 2МНК использует
редуцированную форму уравнений. Вся
процедура разбивается на два шага

1 шаг Применение метода 1МНК к
каждому из редуцированных уравнений
по каждой из эндогенных переменных



- 
- Так как независимые переменные, к числу которых относят также и лаговые переменные, не коррелируют с ошибками в редуцированных уравнениях, то получаемые оценки r_s методом 1МНК уравнений в редуцированной форме являются несмещенными
- 

- 
- Эти оценки могут быть использованы для расчета оценок эндогенных переменных

$$\hat{y}_{1t} = r_0 + r_1 x_t + r_2 z_t$$

$$\hat{y}_{2t} = r_3 + r_4 x_t + r_5 z_t$$




● **2 шаг** Замена переменных y_i на инструментальные переменные $\widehat{y}_i$ только в правых частях структурных одновременных уравнений. Оценка преобразованных структурных уравнений методом 1МНК



- 
- Таким образом, на втором шаге производится оценка параметров системы уравнений

$$y_{1t} = \beta_0 + \beta_1 \hat{y}_{2t} + \beta_2 x_t + u_{1t}$$

$$y_{2t} = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{y}_{1t} + \alpha_2 z_t + u_{2t}$$

методом 1МНК



Метод 2МНК имеет ряд особенностей

- Оценки 2МНК все еще смещенные, но уже состоятельные. Чем больше выборка, тем более точные оценки системы одновременных уравнений мы получаем, тем меньше вариация получаемых оценок.
- Смещение оценок, получаемых с помощью 2МНК для малых выборок, имеет противоположный знак по отношению к смещению оценок, получаемых с помощью 1МНК

- Если получаемые инструментальные переменные слабо подходят в качестве замены эндогенным переменным (R^2 имеет низкое значение), то метод 2МНК не подходит для решения проблемы одновременных уравнений.
- Если объясняющие (независимые) переменные сильно коррелируют друг с другом, то 2МНК не дает хороших результатов. Мультиколлинеарность ведет к смещению оценок.
- t -статистики для оценки значимости параметров, получаемых с помощью 2МНК, являются более точными по сравнению с их аналогами, получаемыми методом 1МНК

**Рассмотрим наивную линейную
кейнсианскую макроэкономическую модель
экономики США**

$$I_t = C_t + K_t + G_t + NX_t$$

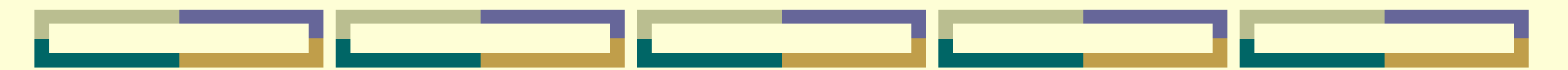
$$C_t = \beta_0 + \beta_1 ID_t + \beta_2 C_{t-1} + u_{1t}$$

$$ID_t = I_t - T_t$$

$$K_t = \beta_3 + \beta_4 I_t + \beta_5 ra_t + u_{2t}$$

$$ra_t = \frac{r_t + r_{t-1}}{2}$$

$$r_t = \beta_6 + \beta_7 I_t + \beta_8 M1_t + u_{3t}$$

I_t – валовой внутренний продукт в году t

C_t – общее личное потребление в году t

K_t – общие валовые частные домашние инвестиции в году t

G_t – правительственные расходы (покупка товаров и услуг) в году t

NX_t – чистый экспорт товаров и услуг (экспорт минус импорт) в году t





T_t – налоги в году t

r_t – ставка процента в году t

$M1_t$ – предложение денег (денежная масса $M1$) в году t

ID_t – доход, доступный для использования в году t

ra_t – среднее между r_t и r_{t-1} (ставка процента с лагом в 6 месяцев)





Эндогенные переменные

I_t C_t K_t ID_t r_t ra_t

Экзогенные переменные

G_t NX_t T_t $M1_t$ r_{t-1} C_{t-1}





Применим метод 2МНК

- Несмотря на то, что в модели шесть эндогенных переменных, только три из них представлены в правых частях стохастических уравнений. Таким образом, нужны только три редуцированных уравнения для оценки их с помощью 2МНК
- 



1 шаг.

Найдем инструментальные переменные $\hat{I}_t$, $\hat{I}\hat{D}_t$ и $\hat{r}\hat{a}_t$

Так, для $\hat{I}\hat{D}_t$ имеем

$$\hat{I}\hat{D}_t = 232,6 - 0,6G_t - 0,73NX_t + 0,08T_t + 1,17C_{t-1} + 9,8r_{t-1} - 0,27M1_t$$

Для данного уравнения $R^2 = 0,998$ $t_1 = -2,5$

$$t_2 = -4,3 \quad t_3 = 0,6 \quad t_4 = 17,8$$

$$t_5 = 2,7 \quad t_6 = -2,1 \quad DW = 2,51$$




2 шаг.

Используем найденные значения инструментальных переменных для того, чтобы рассчитать параметры уравнений (2), (4) и (6). Воспользуемся методом 1МНК. Получим следующие три уравнения регрессии.

Для сравнения запишем уравнения, полученные прямым расчетом методом 1МНК, без применения процедуры замены переменных, используемой в методе 2МНК.



Метод 2МНК

$$\hat{C}_t = -52,2 + 0,61\hat{I}\hat{D}_t + 0,37C_{t-1}$$

$$R^2 = 0,996$$

$$t_1 = 2,8 \quad t_2 = 1,6 \quad DW = 0,71$$

$$\hat{K}_t = -72,0 + 0,24\hat{I}_t - 13,9\hat{r}\hat{a}_t$$

$$R^2 = 0,924$$

$$t_1 = 13,4 \quad t_2 = -3,8 \quad DW = 1,74$$

$$\hat{r}_t = -10,2 + 0,008\hat{I}_t - 0,015M1_t$$

$$R^2 = 0,585$$

$$t_1 = 3,4 \quad t_2 = -2,0 \quad DW = 0,49$$

Метод 1МНК

$$\hat{C}_t = -55,3 + 0,64ID_t + 0,34C_{t-1}$$

$$R^2 = 0,996$$

$$t_1 = 3,8 \quad t_2 = 1,9 \quad DW = 0,69$$

$$\hat{K}_t = -70,4 + 0,23I_t - 13,1ra_t$$

$$R^2 = 0,924$$

$$t_1 = 13,4 \quad t_2 = -3,6 \quad DW = 1,77$$

$$\hat{r}_t = -9,8 + 0,0082I_t - 0,014M1_t$$

$$R^2 = 0,585$$

$$t_1 = 3,33 \quad t_2 = -2,0 \quad DW = 0,48$$

Идентификация модели

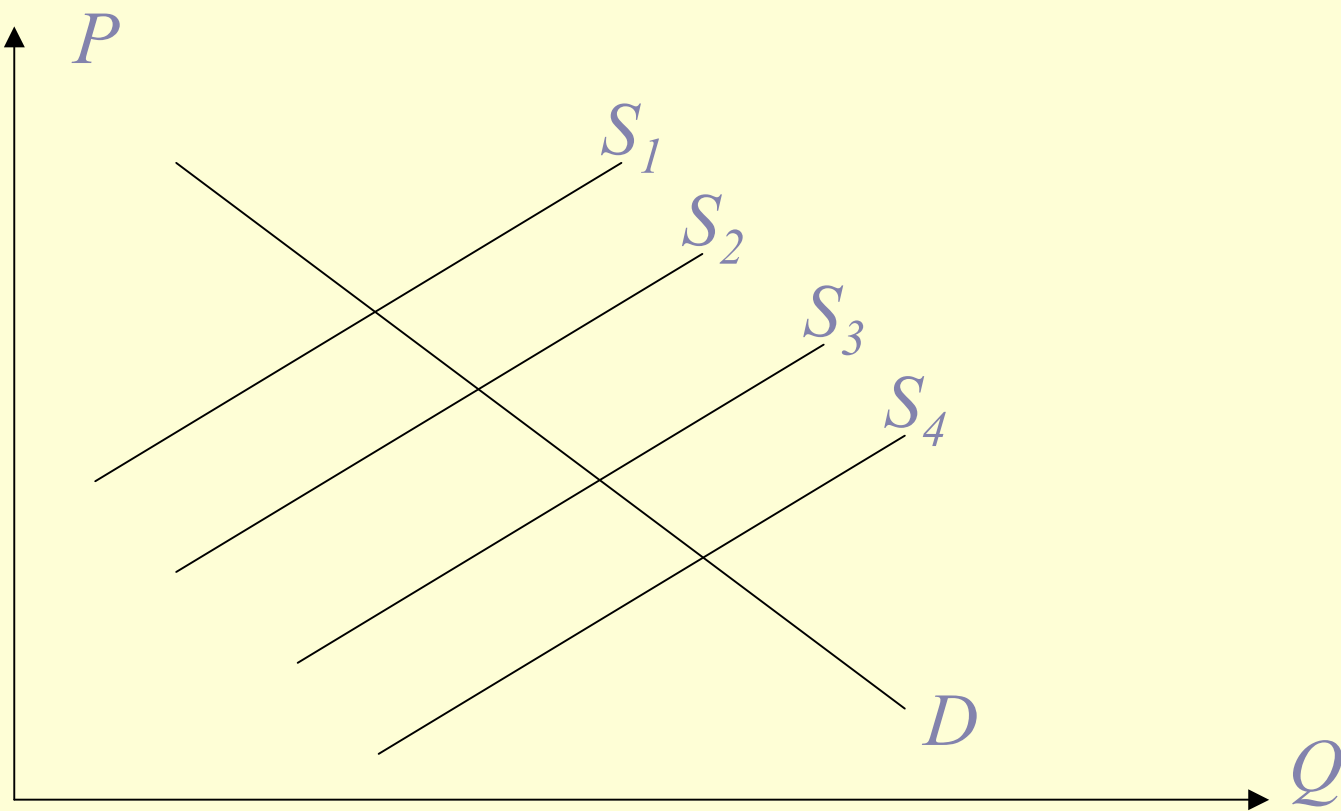
- Пусть имеется система одновременных уравнений для спроса и предложения товара. В качестве независимой переменной выступает цена товара P

$$Q_{Dt} = a_0 + a_1 P_t + u_{Dt}$$

$$Q_{St} = b_0 + b_1 P_t + u_{St}$$

- 
- Чтобы их различить, необходимо иметь некоторые заранее заданные переменные, которые позволят сделать эти различия. Добавим во второе уравнение новую переменную Z

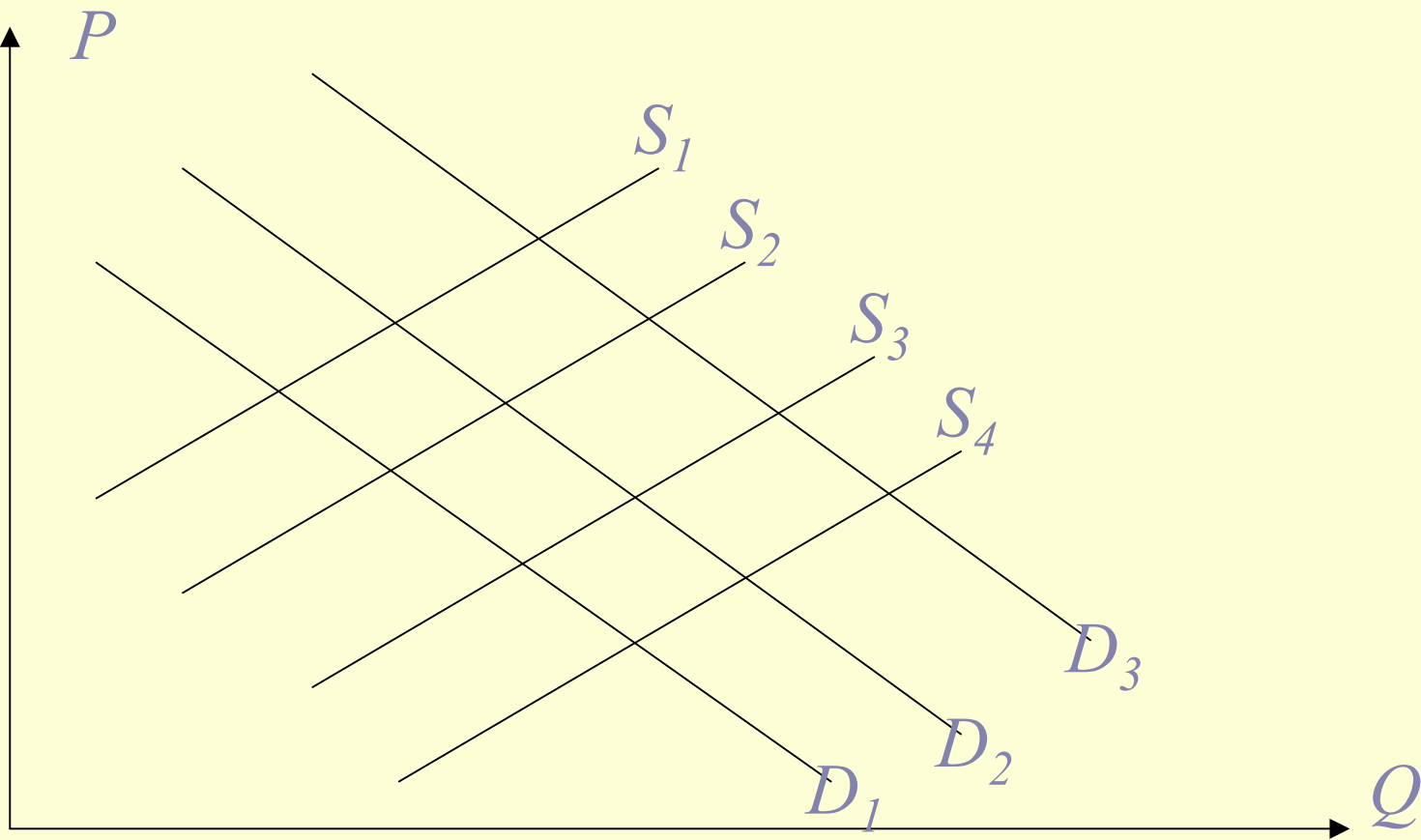
$$Q_{St} = b_0 + b_1 P_t + b_2 Z_t + u_{St}$$

- 
- Если бы переменная Z присутствовала и в уравнении спроса, то различить два уравнения снова было бы невозможно

$$Q_{Dt} = a_0 + a_1 P_t + a_2 Z_t + u_{Dt}$$

$$Q_{St} = b_0 + b_1 P_t + b_2 Z_t + u_{St}$$

Правило

■ *необходимо иметь хотя бы одну объясняющую переменную в каждом уравнении, которой нет в другом*

■ Например

$$Q_{Dt} = a_0 + a_1 P_t + a_2 X_t + u_{Dt}$$

$$Q_{St} = b_0 + b_1 P_t + b_2 Z_t + u_{St}$$

- 
- Для идентификации уравнений используются **условие порядка** и **условие ранга**





Условие порядка (необходимое, но не достаточное условие идентификации)

- **Условие порядка** – систематический метод для определения, может ли конкретное уравнение из системы одновременных уравнений быть потенциально идентифицированным. Если уравнение удовлетворяет условию порядка, то оно идентифицировано во всех (но только в ограниченном их числе) случаях.
- 



Для применения условия порядка
необходимо определить

- количество независимых заранее определенных переменных (экзогенных и лаговых) для всей системы;
 - количество угловых коэффициентов, которые оцениваются для конкретного уравнения
- 

Условие порядка

- Необходимым условием для уравнения быть идентифицированным является то, что число заранее определенных (независимых) переменных в системе должно быть больше или равно числу угловых коэффициентов в уравнении, которое идентифицируется


$$K \geq b_s$$

K – число заранее определенных экзогенных переменных,

b_s – число оцениваемых угловых коэффициентов для идентифицируемого уравнения





Другое определение

- Число заранее определенных переменных в системе уравнений, которое исключено из уравнения, должно быть больше или равно числу эндогенных переменных, включенных в уравнение, минус один
- 


$$K - k \geq m - 1$$

k – число заранее определенных переменных в отдельном уравнении,

m – число эндогенных переменных в отдельном уравнении





Пусть имеется система одновременных уравнений

$$Q_{Dt} = a_0 + a_1 P_t + a_2 X_{1t} + a_3 X_{2t} + u_{Dt}$$

$$Q_{St} = b_0 + b_1 P_t + b_2 X_{3t} + u_{St}$$

$$Q_{St} = Q_{Dt}$$




$Q_{Dt} \quad P_t \quad Q_{St}$ — эндогенные переменные

$X_{3t} \quad X_{2t} \quad X_{1t}$ — экзогенные переменные



- 
- Первое уравнение идентифицировано, так как число заранее заданных переменных в системе одновременных уравнений равно числу угловых коэффициентов, которые необходимо оценить в данном уравнении:

$$3 = 3$$


- 
- Второе уравнение также идентифицировано с помощью условия порядка, так как число независимых переменных по-прежнему равно 3, а число оцениваемых угловых коэффициентов в данном уравнении – 2. Таким образом, условие порядка выполняется:

$$3 > 2$$

- Рассматриваемый случай носит название *переидентификации*
- 

Ранговое условие идентификации

- В системе одновременных уравнений, состоящей из M уравнений и содержащей M эндогенных переменных, уравнение будет идентифицированным тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из коэффициентов, которые соответствуют исключенным переменным рассматриваемого уравнения во всех других уравнениях модели кроме данного, равен $M - 1$



Рассмотрим систему одновременных уравнений

$$\begin{aligned}y_{1t} &= b_{10} && + b_{12}y_{2t} &+ b_{13}y_{3t} &+ \gamma_{11}x_{1t} && + u_{1t} \\y_{2t} &= b_{20} && + b_{23}y_{3t} &+ \gamma_{21}x_{1t} &+ \gamma_{22}x_{2t} && + u_{2t} \\y_{3t} &= b_{30} &+ b_{31}y_{1t} && + \gamma_{31}x_{1t} &+ \gamma_{32}x_{2t} && + u_{3t} \\y_{4t} &= b_{40} &+ b_{41}y_{1t} &+ b_{42}y_{2t} && &+ \gamma_{43}x_{3t} &+ u_{4t}\end{aligned}$$

y_1, y_2, y_3, y_4 — эндогенные переменные

x_1, x_2, x_3 — экзогенные переменные





Проверим условие порядка

Уравнение	$K - k$	$m - 1$	Идентификация
1	2	2	Да
2	1	1	Да
3	1	1	Да
4	2	2	Да





Рассмотрим применение рангового условия

Перепишем систему уравнений таким образом, что все параметры, кроме ошибок, перенесены в левую часть

Ур-е	1	y_1	y_2	y_3	y_4	x_1	x_2	x_3
1	$-b_{10}$	1	$-b_{12}$	$-b_{13}$	0	$-\gamma_{11}$	0	0
2	$-b_{20}$	0	1	$-b_{23}$	0	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0
3	$-b_{30}$	$-b_{31}$	0	1	0	$-\gamma_{31}$	$-\gamma_{32}$	0
4	$-b_{40}$	$-b_{41}$	$-b_{42}$	0	1	0	0	$-\gamma_{43}$





Рассмотрим первое уравнение.

Построим матрицу коэффициентов при переменных

$$y_4 \quad x_2 \quad x_3 \quad ,$$

включенных в остальные уравнения модели

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & 0 \\ 1 & 0 & -\gamma_{43} \end{pmatrix}$$




Для того чтобы найти ранг матрицы, необходимо
рассчитать определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & 0 \\ 1 & 0 & -\gamma_{43} \end{vmatrix} = 0$$





Так как определитель равен нулю, то ранг матрицы не равен

$$M - 1$$

Отсюда условие ранга не выполняется и первое уравнение не может быть идентифицировано

Идентифицированным является только четвертое уравнение





Процедура проверки идентификации системы уравнений с помощью рангового условия

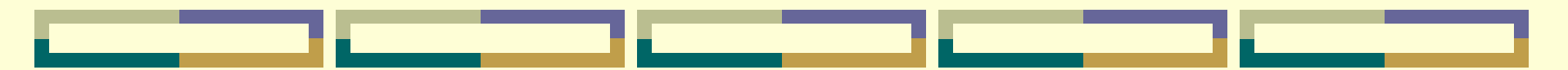
- **1 шаг.** Записываем систему уравнений в табличной форме;
- **2 шаг.** Вычеркиваем коэффициенты ряда для идентифицируемого уравнения;

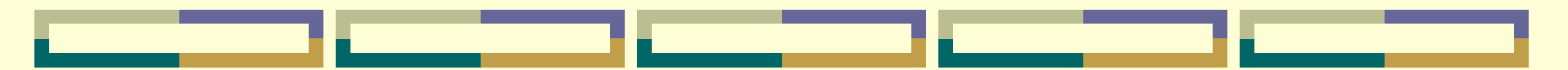


- 
- 3 шаг. Вычеркиваем столбцы, соответствующие нулевым коэффициентам рассматриваемого уравнения;
 - 4 шаг. Получаем необходимую матрицу и рассчитываем ее ранг. Если ранг равен $M - 1$, то уравнение идентифицировано, если меньше $M - 1$, то нет
- 

- 
- **Общее правило проверки соответствия уравнений системы одновременных уравнений условию идентификации**



- 
- Если $K - k > m - 1$ и $\text{Rank}A = M - 1$, то уравнение переидентифицировано;
 - Если $K - k = m - 1$ и $\text{Rank}A = M - 1$, то уравнение точно идентифицировано;
- 



Если $K - k \geq m - 1$ и $\text{Rank}A < M - 1$, то уравнение не идентифицировано;

Если $K - k < m - 1$, то структурное уравнение недоопределено.

В этом случае $\text{Rank}A < M - 1$.





Рекурсивные модели

- Модель называется **рекурсивной**, если ее структурные уравнения можно записать таким образом, что первое содержит в правой части только независимые переменные, второе – только независимые и одну эндогенную и так далее.
- 


$$\begin{aligned}y_1 &= f(x_1, \dots, x_k, u_1), \\y_2 &= f(x_1, \dots, x_k, y_1, u_2), \\y_3 &= f(x_1, \dots, x_k, y_1, y_2, u_3), \\&\vdots\end{aligned}$$

- К рекурсивным моделям может быть применен метод 1МНК последовательно, начиная с первого уравнения
- 