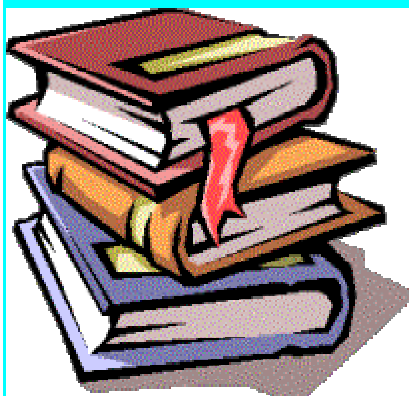


Министерство образования и науки Украины
Донецкий национальный университет



ЭКОНОМЕТРИЯ

Программа курса, методические указания
и контрольные задания для студентов заочного отделения

Донецк - 1998 г.

Эконометрия. Программа курса, методические указания и контрольные задания для студентов заочного отделения / сост . О.Г. Кривенчук, Н.Г. Гузь. Донецк; ДонГУ. 1998. 24 с.

Пособие содержит программу курса «Эконометрия», задания для выполнения контрольной работы студентам заочного отделения экономических специальностей и методические указания по выполнению индивидуальной работы.

Составители: О.Г. Кривенчук, доцент, кандидат экономических наук
 Н.Г. Гузь, доцент, доктор экономических наук

Общие замечания к изучению курса «Эконометрия» и выполнению контрольной работы.

1. Планами обучения студентов-заочников экономических специальностей по курсу «Эконометрия» предусмотрено чтение лекций (10 часов), проведение практических и лабораторных занятий (8 часов), выполнение контрольной работы и сдачу экзамена.

Студент должен самостоятельно освоить программу курса и продемонстрировать при защите контрольной работы основные навыки применения теоретических знаний при решении конкретных экономических задач.

2. Контрольная работа состоит из трех заданий. Номер варианта выбирается по последней цифре номера зачетной книжки. Цифра «0» соответствует десятому варианту.

3. В контрольной работе необходимо указать фамилию, имя, отчество, курс, группу, номер зачетной книжки, номер варианта, дату отсылки работы, домашний адрес студента.

4. Решение задач следует сопровождать подробными пояснениями с приведением всех формул, по которым производился расчет. Помимо получения результатов решения требуется детальный экономический анализ и соответствующие выводы и предложения, связанные с управлением экономическим процессом.

5. В конце работы указать литературные источники, которые студент использовал при изучении курса.

Если расчеты производились с использованием вычислительной техники, указать вид техники, название программ и основные действия, которые выполнены с их помощью.

Программа курса «Эконометрия».

Введение. Предмет курса. Исторический экскурс. Место и значение эконометрии среди других дисциплин фундаментальной подготовки специалистов-экономистов. Задачи и методы прикладной эконометрии. Этапы экономического анализа.

Тема 1. Эконометрическое моделирование. Понятие модели. Основные этапы моделирования. Классификация экономико-математических моделей. Связь и различие между регрессионными и эконометрическими моделями. Примеры задач регрессионного анализа (классического и обобщенного эконометрического).

Тема 2. Регрессионное уравнение, систематическая часть регрессанда. Линейное уравнение множественной регрессии. 1-МНК оценщик: формирование целевой функции, нахождение системы нормальных уравнений, решение системы в матричном виде. Интерпретация оценок $\hat{\beta}_k$. Нахождение математического ожидания величины $y - (\hat{y}_t)$. Нахождение вектора ошибок $\hat{u}_t$, относительной ошибки прогноза, дисперсии возмущений (ошибок). Стандартизированные регрессионные коэффициенты, коэффициенты эластичности, ковариационная матрица оцененных коэффициентов регрессии. Желаемые статистические свойства оценщиков. Выводы о применимости 1-МНК оценщика в эмпирических исследованиях.

Тема 3. Показатели адекватности регрессионной модели. Коэффициенты детерминации, t - тесты, F - тесты.

Тема 4. Обобщенные регрессионные модели, связь с эконометрическими моделями. Сущность понятия «обобщенная линейная регрессионная модель», ковариационная матрица вектора возмущений, обобщенный МНК. Автокорреляция возмущений, проведение d - тестов, метод Эйткена. Пространственная корреляция возмущений. Гетероскедастичность возмущений и оценка Эйткена.

Тема 5. Оценка параметров системы одновременных уравнений. Взаимозависимость уравнений. Односторонняя функциональная зависимость. Рекурсивные модели, блочно-рекурсивные, как эконометрические модели. Модель оптимизации или принятия решения. Макроэкономическая модель I (простейшая версия мультипликаторной модели Кейнса). Понятие уравнения поведения (уравнения реакции). Приведенная (редуцированная) форма модели. Мультипликаторы линейной взаимозависимой системы. Макроэкономическая модель II. Понятие идентификации параметров уравнения эконометрической комплексной модели.

Тема 6. Агрегированные модели долгосрочного развития экономики. Функция выпуска, функция затрат. Понятие изокванты, предельной нормы

замещения, эластичности замещения ресурсов, средней фондоотдачи, предельной фондоотдачи. Функция Кобба-Дугласа. Функция с постоянной эластичностью замещения (функция СЭС); кусочно-линейная производственная функция.

Тема 7. Производственные функции при моделировании и анализе экономических систем. Построение производной функции. Применение функции в управлении производством. Особенности расчета и исследования экономических характеристик степенной производственной функции.

Список рекомендуемой литературы по курсу «Эконометрия».

1. Аллен Р. «Математическая эконометрия». – М.: Иностранная литература, 1963. – 606 с.
2. Винн Р., Холден К. «Введение в прикладной эконометрический анализ». – М.: Финансы и статистика, 1981. – 283 с.
3. Гранберг А.Г. Статистическое моделирование и прогнозирование. – М.: Финансы и статистика, 1990. – 378 с.
4. Дадаян В.С. Моделирование глобальных экономических процессов. – М.: Экономика, 1984. – 276 с.
5. Джонстон ДЖ. Эконометрические методы. – М.: Статистика, 1965. – 361 с.
6. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 1 – 365., т. II – 379 с.
7. Кейн Э. Экономическая статистика и эконометрия. Вып. 1, 2 – М.: 1977.
8. Клас А., Гергели К., Колек Ю., Шуян И. Введение в эконометрическое моделирование. – М.: Статистика, 1978.
9. Клейнер Г.Б. Производные функции. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 221 с.
10. Колек Ю., Шуян И. Эконометрические модели в социалистических странах. – М.: Экономика, 1978. – 151 с.
11. Лизер С. Эконометрические методы и задачи. – М.: 1971. – 247 с.
12. Ляшенко И.Н. Макромодели экономического роста. – К.: Вища школа. 1979. – 151 с.
13. Маленко Э. Лекции по микроэкономическому анализу. – М.: Наука, 1985. – 422 с.
14. Маленко Э. Статистические методы эконометрии. – М.: Статистика, 1975. – 321 с.
15. Мартинос С. Методические проблемы построения и применения эконометрических моделей. – Вильнюс: Макскас. 1979. – 170 с.
16. Пирогов Г., Федоровский Ю. Проблемы структурного оценивания в эконометрии. – М.: Статистика, 1979.
17. Райцин В.Я. Математические методы и модели планирования уровня жизни. – М.: Экономика, 1970. – 389 с.
18. Теория и практика статистического моделирования экономики. (Под редакцией Б.П. Суворова). – М.: Финансы и статистика, 1985. – 271 с.

19. Гинтнер Г. Введение в эконометрию. – М.: Статистика, 1965. – 361 с.
20. Шаттелес Т. Современные эконометрические методы. – М.: Статистика, 1975. – 161 с.
21. Гинтнер Г. Введение в эконометрию. – М.: Статистика, 1964.
22. Грубер И. Эконометрия 1. Введение во множественную регрессию и эконометрию. 1995. (часть 1, 2).
Грубер И. Эконометрия 2. Введение во множественную регрессию и эконометрию. 1995. (часть 3, 4). Перевод г. Киев 1995 г., доцент, к.э.н. А.Б. Воронова.

Контрольные задания.

Первое задание.

Вариант 1. На основании данных **таблицы 1** (приложения) в разрезе цехов основного производства машиностроительного завода необходимо:

- а) проверить однородность совокупности наблюдений, отобрать показатели для построения производственной функции производительности труда;
- б) построить производственную функцию;
- в) дать оценку достоверности функции и ее параметров;
- г) найти экономические характеристики взаимосвязи и сделать выводы по управлению уровнем производительности труда на основе производственной функции.

Вариант 2. На основе данных таблицы 1 (приложения):

- а) проверить однородность совокупности наблюдений, отобрать показатели для построения производственной функции заработной платы;
- б) построить производственную функцию;
- в) дать оценку достоверности функции и ее параметров;
- г) найти экономические характеристики взаимосвязи и сделать выводы по управлению уровнем заработной платы.

Вариант 3. Используя данные **таблицы 1** (приложения) необходимо:

- а) отобрать показатели для построения производственной функции нормы выработки;
- б) проверить однородность совокупности наблюдений;
- в) построить производственную функцию;
- г) проверить достоверность ее параметров;
- д) рассчитать экономические характеристики взаимосвязи и сделать выводы на основе количественных характеристик связи.

Вариант 4. На 10 промышленных предприятиях приведены данные, характеризующие объем производства продукции, среднегодовую стоимость производственных фондов и численность работающих (таблица 2 приложения). Используя эти данные, необходимо:

- а) определить аналитическую форму зависимости объема производства от стоимости фондов и численности работающих;
- б) построить производственную функцию;
- в) дать оценку достоверности производственной функции и ее параметров;
- г) определить экономические характеристики, сделать выводы об эффективности использования производственных ресурсов.

Вариант 5. По 10 сельскохозяйственным предприятиям приведены данные об урожайности зерновых, количестве внесенных удобрений на 1 га, затратах труда на 1 га (таблица 3 приложения). Используя эти данные, необходимо:

- а) определить аналитическую форму зависимости урожайности от внесенных удобрений и затрат труда;
- б) построить производственную функцию;
- в) дать оценку достоверности функции и ее параметров;
- г) определить экономические характеристики взаимосвязи по производственной функции и сделать выводы об эффективности использования удобрений и трудовых ресурсов.

Вариант 6. На основании данных **таблицы 4** (приложения) выполнить задание, аналогичное варианту 1.

Вариант 7. На основании данных таблицы 4 (приложения) выполнить задание, аналогичное варианту 2.

Вариант 8. На основании данных таблицы 4 (приложения) выполнить задание, аналогичное варианту 3.

Вариант 9. На основании данных **таблицы 5** (приложения) выполнить задание, аналогичное варианту 4.

Вариант 10. На основании данных **таблицы 6** (приложения) выполнить задание, аналогичное варианту 5.

Второе задание.

Построить производственную функцию типа $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, используя данные о выпуске продукции y , затратах труда x_1 и затратах производственных фондов x_2 за десять лет.

Рассчитайте характеристики:

- среднюю производительность труда;
- среднюю фондоотдачу;
- предельную производительность труда;
- предельную фондоотдачу;
- эластичность выпуска продукции по затратам труда;
- эластичность выпуска продукции по производственным фондам;
- потребность в производственных фондах;
- потребность в ресурсах труда;
- фондовооруженность труда;
- предельную норму замещения затрат труда производственными фондами;
- эластичность замещения ресурсов.

Найдите прогноз выпуска продукции y_{np} для заданных значений x_1 и x_2 .
Данные к заданию по вариантам приведены в таблицах 7 и 8 (приложения).

Третье задание.

Приведите пример из Вашей сферы деятельности, который с помощью эконометрической модели описывал бы зависимость количественного показателя от одной или нескольких переменных.

Методические указания по выполнению первого задания.

Первое задание желательно выполнять с помощью ЭВМ. При этом используются пакеты прикладных программ по математической статистике, в частности построение регрессионной модели, расчет основных характеристик модели.

Вниманию студентов предлагается программа STAT, разработанная в ДонГУ на кафедре математики и математических методов в экономике. Работа с программой в диалоговом режиме на русском языке.

Результаты условного примера приведены в [таблицах 9 - 15](#) (приложения).

Ниже приводятся основные формулы для проведения расчетов, при этом предлагается воспользоваться расчетами с помощью действия над матрицами, которые приводятся без выводов и доказательств. Поэтому при отсутствии программ по статистике промежуточные расчеты можно осуществлять с помощью программ, производящих действия над матрицами (LOTUS и др.).

Регрессионное уравнение имеет вид

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

при определении коэффициентов β по методу наименьших квадратов получаем их значение $\hat{\beta}$, решая систему нормальных уравнений.

В матричном виде это решение находится по формуле

$$\hat{\beta} = (x'x)^{-1} x'y$$

Матрица X включает $x_{t1} = 1$ (где t - число наблюдений), в таком случае β_1 - свободный член уравнения регрессии.

После подстановки данных наблюдений в полученную регрессионную модель найдем значения $\hat{y}$ - оцененную множественную функцию регрессии.

Вектор ошибок:

$$u = y - \hat{y} = y - x \hat{\beta}$$

Относительная оценка прогноза:

$$\frac{\hat{u}_t}{y_t} \cdot 100 \text{ (в \%)}$$

Дисперсия возмущений (ошибок)

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= \frac{\text{сумма квадратов ошибок}}{\text{число степеней свободы}} = \frac{\sum_{t=1}^T u_t^2}{T - K} = \\ &= \frac{y'y - \hat{y}'y}{T - K} = \frac{y'y - \hat{\beta}'x'y'}{T - K} \end{aligned}$$

где T - длина ряда

k - количество регрессоров

Если ошибки уже оценены, то

$$\sigma_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T - K}$$

Средняя ошибка аппроксимации

$$\overline{E} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\hat{u}_t}{y_t}$$

В экономических расчетах допустима погрешность модели 10-15 %.

Стандартизированные регрессионные коэффициенты

$$\hat{\beta}_k^S = \hat{\beta}_k \frac{S_k}{S_y} \quad (k = 2, \dots, K; S_y > 0)$$

где S_k - эмпирическое стандартное (среднеквадратическое) отклонения k -го регрессора x_k ,

S_y - эмпирическое стандартное отклонение регрессанда y .

Так как для x_1 $S_1 = 0$, то $\hat{\beta}_1^S$ не имеет смысла.

$$S_k = \sqrt{\sigma_k^2}$$

$$S_y = \sqrt{\sigma_y^2}$$

Корень квадратный из дисперсии.

Коэффициенты эластичности:

$\varepsilon_k = \frac{\partial y_t}{\partial x_{tk}} \cdot \frac{x'_k}{y'}$ ($y' \neq 0$; $k = 2, \dots, K$), где y' и x'_k - значения y и x_k , определяющие точку регрессионной функции, для которой вычисляется коэффициент эластичности.

Для линейного регрессионного уравнения

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_{tk}} = \hat{\beta}_k$$

Значит:

$$\hat{\varepsilon}_k = \hat{\beta}_k \frac{x'_k}{y'}; \quad (y' \neq 0)$$

Средняя эластичность при $x'_k = \bar{x}$; $y' = \bar{y}$

$$\hat{\bar{\varepsilon}}_k = \hat{\beta}_k \frac{\bar{x}_k}{\bar{y}}$$

Нахождение истинной ковариационной матрицы для $\hat{\beta}$.

Дисперсии $\sigma_{\hat{\beta}_k}^2$ и ковариации $\sigma_{\hat{\beta}_k \hat{\beta}_{k'}}$ можно определить с помощью действий над матрицами

$$\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_u^2 (x'x)^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{\beta}_1}^2 & \sigma_{\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2} & \dots & \sigma_{\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_k} \\ \sigma_{\hat{\beta}_2 \hat{\beta}_1} & \sigma_{\hat{\beta}_2}^2 & \dots & \sigma_{\hat{\beta}_2 \hat{\beta}_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{\hat{\beta}_k \hat{\beta}_1} & \sigma_{\hat{\beta}_k \hat{\beta}_2} & \dots & \sigma_{\hat{\beta}_k}^2 \end{bmatrix}$$

Отрицательный знак при $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k \hat{\beta}_{k'}}$ говорит об обратной связи.

О силе этой связи лучше говорят коэффициенты корреляции:

$$R_{\hat{\beta}_k \hat{\beta}_{k'}} = \frac{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k \hat{\beta}_{k'}}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{k'}}}$$

Показателем адекватности регрессионной модели является коэффициент детерминации R^2 - квадрат эмпирического коэффициента корреляции между двумя рядами наблюдений: y_t - теоретическими и $\hat{y}_t$ - расчетными ($t = 1 \dots T$)

$$R^2 = \frac{\left[\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})(\hat{y}_t - \bar{y}) \right]^2}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2 \sum_{t=1}^T (\hat{y}_t - \bar{y})^2}$$

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

Иначе:

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{y}_t - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}$$

Простейшее вычисление R^2 :

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^T y_t^2 - \left(\sum_{t=1}^T y_t \right)^2 / T}{\hat{\beta}' X' Y - \left(\sum_{t=1}^T y_t \right)^2 / T}$$

Частный коэффициент детерминации ΔR_k^2 показывает предельный вклад k -го регрессора в R^2 .

$$\Delta R_k^2 = \frac{(1 - R^2) t_k^2}{T - K},$$

где $t_k = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\beta_k}}$ - это t -статистика для k -го регрессионного коэффициента

$$\hat{\sigma}_{\beta_k} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (\hat{y}_t - \bar{y})^2}{(n - 2) \sum_{t=1}^T (x_k - \bar{x}_k)^2}} - \text{стандартная ошибка параметра регрессии}$$

Если $t_k > t_\alpha$, то параметр $\hat{\beta}_k$ статистически достоверный (значимый).

Значимость всей модели и ее параметров в совокупности определяется по критерию Фишера. Упрощенный расчет:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{T - K}{K - 1}$$

F сравнивается с $F_{\text{табл.}}$ при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы $\nu_1 = T - K$ $\nu_2 = T - 1$

Если $F > F_{\text{табл.}}$, уравнение статистически значимо (достоверно).

Наличие автокорреляции возмущений можно проверить с помощью d -статистики Дарбина-Уотсона:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^T (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2}$$

Таблицы d - критерия содержат $d_n(\alpha, K, T)$ и $d_e(\alpha, K, T)$ - нижнее и верхнее значения для одностороннего теста; $d_n(\frac{\alpha}{2}, K, T)$ и $d_e(\frac{\alpha}{2}, K, T)$ для двухстороннего теста.

При проведении теста на наличие автокорреляции (двухстороннего) если $d < d_n(\frac{\alpha}{2})$ или $d > 4 - d_n(\frac{\alpha}{2})$, автокорреляция есть;

если $d_e(\frac{\alpha}{2}) < d < 4 - d_e(\frac{\alpha}{2})$, автокорреляции нет;

если $d_n(\frac{\alpha}{2}) \leq d \leq d_e(\frac{\alpha}{2})$, или $4 - d_e(\frac{\alpha}{2}) \leq d \leq 4 - d_n(\frac{\alpha}{2})$, неопределенность принятия решений.

При проведении теста на положительную автокорреляцию

если $d < d_n(\alpha)$, автокорреляция есть;

если $d > d_e(\alpha)$, автокорреляции нет;

если $d_n(\alpha) \leq d \leq d_e(\alpha)$, неопределенность принятия решений.

При проведении теста на отрицательную автокорреляцию

если $d > 4 - d_n(\alpha)$, автокорреляция есть;

если $d < 4 - d_e(\alpha)$, автокорреляции нет;

если $4 - d_e(\alpha) \leq d \leq 4 - d_n(\alpha)$, неопределенность принятия решений.

Желательно обнаружить автокорреляцию, если она есть, чем ошибочно принять нулевую гипотезу. Поэтому часто инклюзивную область (область неопределенности принятия решений) присоединяют к области отклонения нулевой гипотезы, то есть считают, что автокорреляция есть.

Коэффициент парной корреляции:

$$r_{kk'} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{tk} x_{tk'} - \bar{x}_k \bar{x}_{k'}}{S_k S_{k'}}$$

$$r_{yx_k} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t x_{tk} - \bar{y} \bar{x}_k}{S_y S_k} = \frac{\sum_{t=1}^T (x_{tk} - \bar{x}_k)(y_t - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (x_{tk} - \bar{x})^2 \sum_t (y_t - \bar{y})^2}}.$$

При упрощенном анализе на основании коэффициентов парной корреляции можно судить о мультиколлинеарности – наличии тесной линейной связи между регрессорами.

На основании приведенных выше показателей можно проводить эконометрический анализ полученной модели, делать выводы о ее достоверности, о достоверности ее отдельных параметров, обобщении этой модели, причинах отклонений (мультиколлинеарность, автокорреляция, гетероскедастичность). При необходимости применяются другие оценки обобщенной модели: либо модифицируются исходные данные, либо метод наименьших квадратов.

Методические указания по выполнению второго задания.

Имеются данные о производстве продукции и затратах ресурсов за десять лет.

Таблица 1

Годы	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
Выпуск продукции	4,2	5,1	6,2	7,3	8,4	9,5	10,5	11,4	12,1	12,9
Затраты труда	1,7	1,9	2,2	2,5	2,9	3,2	3,5	3,7	4,0	5,2
Затраты фондов	4,7	5,6	6,6	7,7	8,9	9,8	11,2	12,7	13,8	15,0

Построить производственную функцию и рассчитать ее параметры.

Распространенной производственной функцией, описывающей зависимость между рассмотренными в примере факторами, является функция Кобба-Дугласа.

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

Здесь y обозначает величину выпуска продукции; x_1 - затраты труда; x_2 - объем производственных фондов; a_0, a_1, a_2 - параметры (постоянные величины).

По своей математической форме это уравнение является степенной функцией. Если вместо переменных величин использовать логарифмы, то функция становится линейной:

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2,$$

$$y = A_0 + a_1 L + a_2 K$$

где $y = \ln y$, $A_0 = \ln a_0$, $L = \ln x_1$, $K = \ln x_2$. Применив метод наименьших квадратов, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} mA_0 + a_1 \sum_{i=1}^m L_i + a_2 \sum_{i=1}^m K_i = \sum_{i=1}^m Y_i \\ \sum_{i=1}^m L_i A_0 + a_1 \sum_{i=1}^m L_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^m L_i K_i = \sum_{i=1}^m L_i Y_i \\ \sum_{i=1}^m K_i A_0 + a_1 \sum_{i=1}^m L_i K_i + a_2 \sum_{i=1}^m K_i^2 = \sum_{i=1}^m K_i Y_i \end{cases}$$

Расчеты по формированию системы уравнений приведены в таблице

Таблица 2

i	Y _i (lny)	L _i (lnx ₁)	K _i (lnx ₂)	L _i ²	K _i ²	L _i K _i	L _i Y _i	K _i Y _i
1	1,4351	0,5306	1,5476	0,2816	2,3950	0,6211	0,7615	2,2210
2	1,6292	0,6419	1,7228	0,4120	2,9679	1,1058	1,0458	2,8068
3	1,8245	0,7885	1,8871	0,6217	3,5610	1,4880	1,4386	3,4430
4	1,9879	0,9183	2,0412	0,8396	4,1666	1,8704	1,8215	4,0577
5	2,1282	1,0647	1,1861	1,1336	4,7788	2,3275	2,2666	4,6525
6	2,2513	1,1632	2,2824	1,3529	5,2093	2,6549	2,6187	5,1334
7	2,3514	1,2528	2,4159	1,5694	5,8366	3,0267	2,9458	5,6804
8	2,4336	1,3083	2,5416	1,7117	6,4598	2,5416	3,1839	6,1852
9	2,7932	1,3863	2,6247	1,9218	6,8889	3,6386	3,4563	6,5439
10	2,5572	1,6487	2,7080	2,7181	7,3335	4,4648	4,2161	6,9249
Σ	21,0916	10,7013	21,9574	12,5624	49,5974	23,7394	23,7548	47,6588

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 10 A_0 + 10,7013 a_1 + 21,9574 a_2 = 21,0916 \\ 10,7013 A_0 + 12,5624 a_1 + 23,7394 a_2 = 23,7548 \\ 21,9574 A_0 + 23,7394 a_1 + 49,5974 a_2 = 47,6538 \end{cases}$$

Решив систему, получаем

$$A_0 = 0,2231; a_1 = 0,8; a_2 = 0,8.$$

$$a_0 = 1,25; a_1 = 0,8; a_2 = 0,8.$$

Функция имеет вид:

$$y = 1,25 x_1^{0,8} x_2^{0,8}$$

Рассчитаем основные характеристики производственной функции

1) средняя производительность труда:

$$\mu_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{1,25 x_1^{0,8} x_2^{0,8}}{x_1} = \frac{1,25 x_2^{0,8}}{x_1^{0,2}}$$

С увеличением затрат труда (величины x_1) средняя производительность труда снижается. Это вызвано тем, что объем производственных фондов остается неизменным. Увеличение же производственных фондов ведет к росту производительности труда.

2) средняя фондоотдача

$$\mu_1 = \frac{y}{x_2} = \frac{1,25 x_1^{0,8} x_2^{0,8}}{x_2} = \frac{1,25 x_1^{0,8}}{x_2^{0,2}}$$

С увеличением фондов средняя фондоотдача уменьшается. Увеличение ресурсов труда (при неизменных фондах) ведет к росту фондоотдачи.

3) *предельная производительность труда*

$$v_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 1,25 \cdot 0,8 \cdot x_1^{-0,2} \cdot x_2^{0,8}.$$

С увеличением затрат труда при неизменных фондах предельная производительность труда снижается. С увеличением объема фондов при неизменных трудовых ресурсах (т.е. с ростом фондовооруженности труда) предельная производительность труда возрастает. Одновременное изменение обоих переменных может привести к различным результатам.

4) *предельная фондоотдача*

$$v_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = 1,25 \cdot 0,8 \cdot x_1^{0,8} \cdot x_2^{-0,2}.$$

С увеличением объема производственных фондов при неизменных трудовых ресурсах предельная фондоотдача снижается. С увеличением объема трудовых ресурсов при неизменных фондах предельная фондоотдача возрастает.

5) *эластичность выпуска продукции по затратам труда*

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{y}; \quad \varepsilon_1 = a_1 = 0,8 \%$$

Данный показатель обозначает, что при увеличении затрат труда на 1% выпуск продукции увеличивается на 0,8%.

б) *эластичность выпуска продукции по производственным фондам*

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y}; \quad \varepsilon_2 = a_2 = 0,8 \%$$

Смысл показателя аналогичен предыдущему.

Производственная функция позволяет рассчитать потребность в одном из ресурсов при заданных объеме и величине другого ресурса. Потребность в ресурсах труда равна:

$$x_1 = \left\{ \frac{y}{a_0 x_2^{a_2}} \right\}^{\frac{1}{a_1}} = \left\{ \frac{y}{1,25 x_2^{0,8}} \right\}^{\frac{1}{0,8}}$$

Потребность в производственных фондах составляет:

$$x_2 = \left\{ \frac{y}{a_0 x_1^{a_1}} \right\}^{\frac{1}{a_2}} = \left\{ \frac{y}{1,25 x_1^{0,8}} \right\}^{\frac{1}{0,8}}$$

Производственная функция позволяет исследовать вопросы соотношения, замещения, взаимодействия ресурсов. В частности, на основе соотношения $\frac{x_2}{x_1}$ определяется важный экономический показатель – фондовооруженность труда:

$$\frac{x_2}{x_1} = a_0^{-\frac{1}{a_2}} \cdot y^{\frac{1}{a_2}} \cdot x_1^{-1-\frac{a_1}{a_2}} = 1,25^{-\frac{1}{0,8}} \cdot y^{\frac{1}{0,8}} \cdot x_1^{-2}.$$

Взаимодействующие в рамках производственной функции ресурсы могут замещать друг друга. Предельная норма замещения затрат труда производственными фондами в данной задаче равна:

$$h = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = - \frac{a_1 x_2}{a_2 x_1} = - \frac{x_2}{x_1}.$$

Предельная норма замещения, как видно из полученного соотношения, зависит не только от параметров функции (коэффициентов a_1 и a_2), но и от соотношения объемов ресурсов. Знак минус означает, что при фиксированном объеме производства увеличение одного ресурса соответствует уменьшению другого, и наоборот.

Влияние соотношения объемов ресурсов на предельную норму замещения находит свое выражение в показателе эластичности замещения ресурсов, который определяется как отношение относительных приращений фондовооруженности труда и предельной нормы замещения ресурсов:

$$\omega = \frac{d(x_2 / x_1)}{dh} \cdot \frac{h}{x_2 / x_1},$$

$$\text{где } h = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2} \quad h = \frac{dx_2(x_1)}{dx_1}$$

Эластичность замещения ресурсов для рассматриваемой функции равна единице, т.е. изменению фондовооруженности труда на 1% соответствует изменение предельной нормы замещения также на 1%.

Показатели адекватности классической регрессионной модели

В эмпирических экономических и социальных исследованиях из множества вариантов уравнений, которые отличаются регрессорами - "входящими х-ми", необходимо выбрать наиболее адекватную регрессионную функцию.

Для оценки адекватности функции имеющимся выборочным данным очень часто применяется коэффициент детерминации R^2 .

а) R^2 - квадрат эмпирического коэффициента корреляции между двумя рядами наблюдений - y_t ($t=1, \dots, T$) (теоретическими значениями регрессанда) и

$\hat{y}_t$ ($t=1, \dots, T$) (его расчетными значениями)

$$R^2 = \frac{\left[\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})(\hat{y}_t - \bar{y}) \right]^2}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2 \sum_{t=1}^T (\hat{y}_t - \bar{y})^2} \quad (25)$$

$$0 \leq R^2 \leq 1, \\ \text{б) } R^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{y}_t - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}. \quad (26)$$

Частное от деления суммы квадратов регрессии около средней на сумму квадратов наблюдаемой совокупности около средней.

$$\text{в) } R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2} \quad (27)$$

в числителе: сумма квадратов погрешностей

в знаменателе: сумма квадратов совокупности около средней.

Если $R^2=1$ - случай полной адекватности, когда все наблюдаемые значения лежат в регрессионной гиперплоскости $R^2=0$. Функция регрессии в этом случае ничего не объясняет.

Это возможно при

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y} \text{ и } \hat{\beta}_2 = \dots = \hat{\beta}_k = 0$$

$$\hat{y}_t = \bar{y} \text{ для всех } t.$$

Регрессионное уравнение оценено тем лучше, чем больше R^2 .

Из двух вариантов регрессионных уравнений, отличающихся регрессорами, лучшим считается тот, у которого R^2 больше (при прочих равных условиях).

Связь между R^2 и количеством регрессоров R .

Если включить в модель дополнительный регрессор ($K+1$ -й), то всегда коэффициент детерминации будет больше

$$R^2(K+1) \geq R^2(K).$$

Их разница ΔR^2 может быть определена после двойного расчета коэффициентов детерминации, однако это вычисление можно упростить.

Частный коэффициент детерминации ΔR_k^2 показывает предельный (граничный) вклад k -го регрессора в R^2 , или показывает, на какую величину уменьшится коэффициент детерминации, если k -й регрессор (и только он!) будет исключен из группы регрессоров.

$$\Delta R_k^2 = \frac{(1 - R^2) t_k^2}{T - K}, \quad (28)$$

где $t_k = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}_{\beta_k}}$ - это t -статистика для k -го регрессионного коэффициента

R^2 – коэффициент детерминации;

T – число наблюдений;

K – число регрессоров;

$T-K$ – число степеней свободы.

Увеличение регрессоров приводит к росту R^2 , однако снижает число степеней свободы ($T-K$), что отрицательно сказывается при применении t – тестов и F – тестов, а также при построении доверительных и прогнозных интервалов.

Поэтому преимущество имеет скорректированный коэффициент детерминации, учитывающий число степеней свободы.

Скорректированный коэффициент детерминации по Тейлору:

$$\bar{R}_T^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{T-1}{T-K}. \quad (29)$$

Скорректированный коэффициент детерминации по Анемии:

$$\bar{R}_A^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{T+K}{T-K}. \quad (30)$$

Важное свойство скорректированных коэффициентов детерминации заключается в том, что приращение $\Delta \bar{R}_T^2$ и $\Delta \bar{R}_A^2$ может оказаться как положительным, так и отрицательным, то есть при отрицательном новая модель с дополнительным регрессором будет хуже, чем модель с меньшим числом регрессоров.

При этом $\bar{R}_A^2$ изменяется на большую величину, чем $\bar{R}_T^2$ после включения дополнительного регрессора, значит лучше отражает уменьшение числа степеней свободы.

t-тесты, как показатели адекватности модели

R^2 ; $\bar{R}_T^2$; $\bar{R}_A^2$; ΔR_k^2 - эти критерии относятся к регрессионному уравнению, как к совокупности, то есть к уравнению в целом .

t-тесты и F – тесты используются для проверки гипотез об истинных, но неизвестных значениях отдельных коэффициентов регрессии (или нескольких коэффициентов).

Условия проведения t-теста – наличие классической регрессионной модели с выполнением предпосылки о нормальном распределении:

а) вектор возмущений $U := (U_1; U_2; U_T)'$ является t-мерным нормально распределенным с нулевым вектором математического ожидания и единичной ковариационной матрицей σ_u^2 ;

б) регрессионная матрица X детерминирована и имеет полный ранг K.

Такие предпосылки дают возможность посредством t-тестов статистически проверить определенные гипотезы о числовых значениях коэффициентов β_k ($1 \leq k \leq K$) и о значениях отдельных линейных комбинаций этих коэффициентов.

t- тест двусторонней пары гипотез

Вопрос: существенно ли влияет k-й регрессор в генеральной выборке на регрессанд, иначе отличается ли истинное значения коэффициента β_k от нуля?

Утверждение, которое статистически должно быть подтверждено тестом, формируется как альтернативная гипотеза.

Двусторонняя альтернативная гипотеза:

$$H_0 : \beta_k = \beta_k^* ;$$

$$H_A : \beta_k \neq \beta_k^* .$$

Частный случай, когда регрессор не влияет на регрессанд $\beta_k^* = 0$.

$H_A : \beta_k \neq 0$.

Нулевая гипотеза

$H_0 : \beta_k = 0$.

Ошибки первого ряда : нулевая гипотеза отвергается, хотя она верна.

Ошибки второго ряда: нулевая гипотеза не отвергается, хотя она неверна.

Расчетная (или эмпирическая) величина t-статистики:

$$t = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k^*}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k}}. \quad (31)$$

Если нулевая гипотеза ($H_0 : \beta_k = \beta_k^*$) действительна, то для классической линейной модели рассчитанная по формуле (31) t- статистика является реализацией центральной t- распределенной случайной величины с T-K степенями свободы.

Гипотеза H_0 отклоняется, если

$$|t| > t(\alpha, T - K),$$

где $|t|$ - абсолютное значение t-статистики,

$t(\alpha, T-K)$ - табличное значение t- распределения (t- критерия) для уровня значимости α и T-K степеней свободы.

Иначе

$$P(T \leq t(2\alpha, T - K)) = 1 - \alpha. \quad (32)$$

Эта величина называется $(1-\alpha)$ – квантиль t- распределения с (T-K) степенями свободы.

α - является вероятностью ошибки первого рода, то есть нулевая гипотеза отвергается, хотя она верна.

t- тест односторонней пары гипотез представлен в двух вариантах:

$$I. H_0 : \beta_k \leq \beta_k^* ;$$

$$H_A : \beta_k > \beta_k^*. \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \text{II. } H_0 : \quad & \beta_k \geq \beta_k^*; \\ H_A : \quad & \beta_k < \beta_k^*. \end{aligned} \tag{34}$$

Области принятия гипотез имеют следующие границы:

для первого случая (33),

если $t \leq t(2\alpha, T - K)$, принимается H_0 ;

если $t > t(2\alpha, T - K)$, отклоняется H_0 ;

для второго случая (34),

если $t \geq t(2\alpha, T - K)$, принимается H_0 ;

если $t < t(2\alpha, T - K)$, отклоняется H_0 ;

Схема проведения t- теста

Шаг 1: сформулировать пару гипотез H_0 и H_A .

Шаг 2: выбрать уровень значимости α .

Шаг 3 найти в таблицах t- критерий.

Шаг 4: рассчитать t – статистику.

Шаг 5: сравнить t- расчетное с t – табличным.

Шаг 6: интерпретировать результат теста.

Чаще всего $\alpha=0,05$ или $\alpha=0,01$ (иногда его получают расчетным путем, используя компьютерные программы).

t - тест подтверждает предположение, что $\beta_k \neq \beta_k^*$

Если $\beta_k^*=0$, то t - статистика в области отклонения названной гипотезы свидетельствует о том, что k-й регрессор в генеральной совокупности оказывает влияние на регрессанд.

β_k (для $\alpha=\dots$) - статистически значимо отличается от нуля.

β_k (для $\alpha=\dots$) - статистически защищено от нуля.

Говорить β_k - является значимым неточно, так как статистически незначимое может быть экономически значимым.

В области принятия гипотезы $H_0 : \beta_k = 0$ t - тест не позволяет отвергнуть нулевую гипотезу.

Доверительный интервал для регрессионного коэффициента β_k при доверительном уровне $1-\alpha$ является интервалом со случайно зависимыми границами; он включает (накрывает) истинное значение k -го регрессионного коэффициента с вероятностью $1-\alpha$.

Формула доверительного интервала имеет вид:

$$P \left[\hat{\beta}_k - t(\alpha, T - K) \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k} \leq \beta_k \leq \hat{\beta}_k + t(\alpha, T - K) \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k} \right] = 1 - \alpha. \quad (35)$$

F- тест гипотез для групп

регрессионных коэффициентов и линейных комбинаций

F - тест также применяется к линейной модели нормальной регрессии.

С помощью F - теста можно проверить только двусторонние гипотезы о значении нескольких коэффициентов или нескольких линейных комбинаций, а также сочетаний того и другого.

t - тест применим только для одного параметра или одной линейной комбинации.

Если применить F - тест для одного параметра, то он дает тот же результат, что и t - тест.

F - тестом статистически проверяется как единое целое (разовой проверкой):

а) двусторонняя гипотеза о значении одного, двух или нескольких регрессионных коэффициентов (t - тест только для одного коэффициента);

б) двусторонняя гипотеза о значении одной, двух или нескольких линейных комбинаций регрессионных коэффициентов;

в) совокупность гипотез о значении регрессионных коэффициентов и их линейных комбинаций.

Общая линейная гипотеза:

$$H_0 : C\beta = C^*; \quad (36)$$

$$H_A : C\beta \neq C^*.$$

C^* - вектор столбец, состоящий из m элементов

$$C_j^* (j = 1, 2, \dots, m)$$

$\beta := (\beta_1 \dots \beta_k)'$ - вектор-столбец K регрессионных коэффициентов, подлежащих оцениванию.

C -матрица размерности $m \times k$; m определяет количество строк в матрице C , или m - количество линейных уравнений (линейных гипотез), проверяемых F -тестом.

Пример:

$$a) C=(010) \quad c^*=0$$

проверит гипотезу $H_0 : \beta_2=0; \quad H_A : \beta_2 \neq 0;$

$$б) C=(1 \ 1 \ 0); \quad c^*=1$$

проверит гипотезу $\beta_1+\beta_2=1;$

$$в) c=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad c^*=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

проверит гипотезы $\beta_2=0$ и $\beta_1+\beta_2=1$.

Чтобы с помощью F -теста проверить гипотезы, необходимо вычислить F -статистику по формуле:

$$F = \frac{(C\hat{\beta} - C^*)'[C(X'X)^{-1}C']^{-1}(C\hat{\beta} - C^*)}{m\sigma_m^2}. \quad (37)$$

Формула (37) в ряде случаев значительно упрощается.

Проверим гипотезу о том, что ни один регрессор не оказывает влияние на регрессанд:

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_K = 0;$$

$$H_A : \beta_k \neq 0, \text{ хотя бы для одного } k.$$

Рассчитываем F -статистику по формуле:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{T-K}{K-1}. \quad (38)$$

Правило применения F-тестов:

Нулевая гипотеза отклоняется, если

$$F > F(1-\alpha; m; T-K),$$

где F – рассчитано по формуле (38);

$F(1-\alpha; m; T-K)$ – квантиль F – распределения (табличное значение или F - критерий).

$$m = K - 1,$$

K – число регрессоров, включая свободный член;

$T - K$ – число степеней свободы;

α - уровень значимости, который в экономических расчетах часто принимается 0,05; 0,01.

Может оказаться, что F-тест подтвердит статистическую значимость всей совокупности параметров β , в тоже время каждый параметр окажется статистически не значим.

Если F-тест проверяет один коэффициент или одну линейную комбинацию, тогда $m = 1$, расчетные значения $F = t^2$, а табличные значения $[t(\alpha, T - K)]^2 = F(1 - \alpha; 1; T - K)$, то есть результаты F -теста и t-теста совпадают.

Изложенный в данном методическом пособии материал является основой для изучения дальнейших тем курса «Эконометрия», связанных с обобщением классической регрессионной модели, методами оценки параметров в отдельных случаях несостоятельности классической модели, а также практическим применением моделей для экономического анализа, прогнозирования и управления.

Список рекомендуемой литературы по курсу «Эконометрия»

23. Аллен Р. Математическая эконометрия. – М.: Иностранная литература, 1963. – 606 с.
24. Винн Р., Холден К. Введение в прикладной эконометрический анализ. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 283 с.

25. Гранберг А.Г. Статистическое моделирование и прогнозирование. – М.: Финансы и статистика, 1990. – 378 с.
26. Дадаян В.С. Моделирование глобальных экономических процессов. – М.: Экономика, 1984. – 276 с.
27. Джонстон Д. Эконометрические методы. – М.: Статистика, 1965. – 361 с.
28. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.: Финансы и статистика, 1986. – Т. I – 365., Т. II – 379 с.
29. Доугерти К. Введение в эконометрику: Пер. с англ. – М.: ИНФРА –М, 1999. – XIV, 402 с.
30. Єлейко В. Основи економетрії: У 2 ч. – Львів: ТЗОВ «МАРКА Лтд», 1995. – 192 с., Ч. 1.
31. Кейн Э. Экономическая статистика и эконометрия. Вып. 1, 2 – М.: 1977.
32. Клас А., Гергели К., Колек Ю., Шуян И. Введение в эконометрическое моделирование. – М.: Статистика, 1978.
33. Клейнер Г.Б. Производные функции. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 221 с.
34. Колек Ю., Шуян И. Эконометрические модели в социалистических странах. – М.: Экономика, 1978. – 151 с.
35. Лизер С. Эконометрические методы и задачи. – М.: 1971. – 247 с.
36. Ляшенко И.Н. Макромодели экономического роста. – К.: Вища школа. 1979. – 151 с.
37. Маленко Э. Лекции по микроэкономическому анализу. – М.: Наука, 1985. – 422 с.
38. Маленко Э. Статистические методы эконометрии. – М.: Статистика, 1975. – 321 с.
39. Мартинос С. Методические проблемы построения и применения эконометрических моделей. – Вильнюс: Макскас. 1979. – 170 с.
40. Пирогов Г., Федоровский Ю. Проблемы структурного оценивания в эконометрии. – М.: Статистика, 1979.
41. Райцин В.Я. Математические методы и модели планирования уровня жизни. – М.: Экономика, 1970. – 389 с.
42. Теория и практика статистического моделирования экономики. (Под редакцией Б.П. Суворова). – М.: Финансы и статистика, 1985. – 271 с.
43. Гинтнер Г. Введение в эконометрию. – М.: Статистика, 1965. – 361 с.
44. Шаттелес Т. Современные эконометрические методы. – М.: Статистика, 1975. – 161 с.
45. Гинтнер Г. Введение в эконометрию. – М.: Статистика, 1964.
46. Грубер И. Эконометрия I. Введение во множественную регрессию и эконометрию. 1995. (часть 1, 2).
Грубер И. Эконометрия 2. Введение во множественную регрессию и эконометрию. 1995. (часть 3, 4). Перевод г. Киев 1995 г., доцент, к.э.н. А.Б. Воронова.

- 47.Христиановский В.В., Москардини А, Гузь Н.Г., Лаулер К, Кривенчук О.Г. Прикладная эконометрия: Учебное издание / Донецк: Донецкий госуниверситет, 1998, 173 с.
- 48.Гузь Н.Г. Выбор и регулирование в микроэкономике. – Донецк: ИЭП НАН Украины, 1997. 195 с.

П Р И Л О Ж Е Н И Я

Номер цеха	Производитель ность труда (тыс. грн./чел.- день)	Фондоемкость продукции (грн.)	Коэффициент текучести рабочей силы (%)	Удельный вес прогулов (%)	Выполнение норм выработки (%)	Размер премии к зарплате (коэф.)	Среднемесячна я зарплата (грн.)	Процент продукции, сданой без доработки	Средний тарифный разряд
1	2550	0,0041	9,7	0,45	130,1	0,34	45	96,4	4,0
2	2220	0,0032	15,1	0,44	127,4	0,23	48	98,9	4,0
3	2301	0,0030	13,2	0,92	150,6	1,26	39	92,4	3,8
4	2454	0,0021	8,6	0,87	148,7	0,26	56	94,2	3,5
5	1828	0,0017	22,8	1,02	139,3	0,74	40	96,8	4,2
6	2785	0,0016	11,8	0,62	140,6	0,46	53	94,2	4,6
7	2460	0,0026	16,6	0,38	151,8	0,44	47	98,2	5,2
8	1953	0,0050	14,0	1,92	187,6	0,55	45	51,8	4,3
9	1728	0,0030	14,2	1,12	119,4	0,65	44	95,0	3,9
10	1080	0,0027	7,1	0,72	126,2	0,47	46	98,8	4,5
11	975	0,0011	12,2	0,80	121,5	0,63	43	94,1	3,5
12	1113	0,0019	9,8	0,93	130,6	0,56	37	95,2	3,8
13	2239	0,0052	16,8	0,27	119,8	1,10	53	94,3	4,3
14	2740	0,0040	17,3	0,50	126,0	0,80	60	97,5	4,8
15	2150	0,0029	14,8	0,62	130,6	1,01	61	51,2	4,2

Таблица 2

Предприятия	Объем продукции (тыс. грн)	Среднегодовая стоимость основных производственных фондов (тыс. грн.)	Количество работающих (тыс. чел.)
1	5300	1530	2,5
2	5480	1600	2,8
3	6290	1700	2,3
4	6300	1790	3,0
5	6150	1870	3,1
6	6250	1840	2,8
7	6500	2020	2,3
8	6480	2190	2,4
9	6550	2290	2,5
10	7290	2480	2,6

Таблица 3

Номер хозяйства	Урожайность (ц/га)	Количество органических удобрений на 1 га (кг)	Затраты труда на 1 га (чел-дн.)
1	18,3	92	3,0
2	22,0	121	3,1
3	19,4	146	2,9
4	24,7	175	3,2
5	16,4	183	2,8
6	21,9	197	3,3
7	18,9	208	2,5
8	17,0	247	2,2
9	19,3	271	2,7
10	24,4	285	3,2

Таблица 4

Номер цеха	Производительность труда (тыс. грн./чел.-день)	Фондоемкость продукции (грн.)	Коэффициент текучести рабочей силы (%)	Удельный вес прогулов (%)	Выполнение норм выработки (%)	Размер премии к зарплате (коэф.)	Среднемесячная зарплата (грн.)	Процент продукции, сданой без доработки	Средний тарифный разряд
1	2481	0,0053	9,4	1,00	131,9	0,45	42	90,6	4,7
2	2532	0,0060	8,7	0,80	145,3	0,43	46	98,4	4,9
3	2600	0,0063	8,3	0,95	138,0	0,37	52	93,2	5,2
4	2620	0,0070	8,0	0,96	140,1	0,51	48	90,9	5,4
5	2158	0,0071	8,6	0,88	135,0	0,60	36	91,3	4,0
6	2000	0,0045	16,8	1,01	128,0	0,40	35	88,1	3,8
7	2780	0,0072	10,4	1,12	153,0	0,63	41	70,6	4,7
8	1953	0,0048	15,5	0,96	123,5	0,36	39	82,3	2,9
9	2026	0,0049	20,4	0,78	111,0	0,38	40	92,4	4,0
10	1897	0,0050	17,8	0,82	121,0	0,43	35	95,3	3,7
11	1973	0,0051	15,8	1,16	128,3	0,47	45	98,0	3,5
12	2483	0,0071	9,6	1,09	146,2	0,53	49	87,1	4,5
13	2556	0,0072	19,8	1,21	138,5	0,60	53	90,3	4,6
14	2701	0,0078	12,3	1,35	153,6	0,71	52	96,9	4,1
15	2613	0,0070	11,1	1,15	147,3	0,62	56	93,2	4,7

Таблица 5

Предприятия	Объем продукции (тыс. грн)	Среднегодовая стоимость основных производственных фондов (тыс. грн.)	Количество работающих (тыс. чел.)
1	7500	2600	2,8
2	6450	1930	3,2
3	6490	2020	3,6
4	7100	2420	3,8
5	7250	2650	2,9
6	6490	2040	3,3
7	6380	2010	2,8
8	4970	1840	3,1
9	5380	1970	3,6
10	650	2150	3,7

Таблица 6

Номер хозяйства	Урожайность (ц/га)	Количество органических удобрений на 1 га (кг)	Затраты труда на 1 га (чел-дн.)
1	22,3	330	3,1
2	18,2	343	2,8
3	25,4	396	3,5
4	23,4	412	3,7
5	28,9	426	4,0
6	27,3	440	3,8
7	24,5	458	3,3
8	28,1	464	3,9
9	27,5	424	3,9
10	29,3	395	4,0

Таблица 7

Год	Выпуск продукции	Затраты труда, x_1									
		В А Р И А Н Т									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	5,3	1,8	1,4	2,0	1,6	2,3	1,9	2,1	1,5	2,3	2,2
2	6,4	1,9	1,6	2,5	2,0	2,9	2,2	2,8	1,9	2,8	2,5
3	7,1	2,3	2,5	2,8	2,4	3,2	2,6	3,4	2,2	3,1	3,1
4	8,0	2,5	2,7	3,1	3,1	3,6	3,3	3,9	2,5	3,4	3,8
5	9,5	3,1	3,0	3,4	3,7	4,1	3,9	4,2	2,9	4,0	4,2
6	10,3	3,7	3,9	4,0	4,2	4,5	4,2	4,6	3,1	4,8	4,5
7	11,2	4,2	4,3	4,6	4,8	5,2	4,8	5,1	3,4	5,2	5,0
8	12,6	4,5	5,1	4,9	5,3	5,4	5,3	5,8	4,2	5,6	5,6
9	13,8	5,2	5,7	5,4	5,8	6,0	5,9	6,2	4,8	6,0	6,0
10	14,3	5,8	6,2	6,3	6,4	6,6	6,5	6,7	5,6	6,4	6,4
Данные для прогноза		8,5	11,3	12,0	10,7	14,2	15,3	12,8	10,4	9,6	14,5

Таблица 8

Год	Затраты производственных фондов, x_2									
	В А Р И А Н Т									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3,5	4,2	4,0	3,8	4,1	3,4	4,3	3,5	5,3	3,9
2	4,2	5,6	5,4	4,5	5,6	4,6	5,8	4,6	6,4	4,8
3	5,6	7,3	6,2	5,4	6,7	5,8	6,2	5,4	8,2	5,6
4	6,7	8,4	7,3	6,8	7,8	6,4	7,4	7,2	9,4	7,3
5	7,8	9,2	8,4	8,2	8,4	7,5	8,5	8,3	10,1	8,4
6	8,3	10,1	9,5	8,9	9,2	8,4	9,1	9,6	11,5	9,5
7	9,4	11,6	10,7	10,1	10,4	9,2	10,3	10,1	12,6	11,4
8	10,5	12,8	11,4	11,6	11,5	10,4	11,6	12,2	13,3	12,6
9	11,8	13,4	12,4	12,4	12,6	11,6	12,4	13,4	14,5	13,4
10	14,1	15,2	13,9	14,2	14,3	12,9	13,5	15,2	15,8	14,5
Данные для прогноза	23,6	28,5	24,7	25,6	22,4	28,2	24,3	30,2	28,5	27,6

Таблица 9

Множественный регрессионный анализ

Наблюдения

Y	X ₁	X ₂	X ₃
539,10	10,40	2,17	20,20
667,60	11,50	2,23	17,00
689,00	11,20	2,31	12,50
779,50	13,60	2,76	17,20
678,90	11,10	2,34	11,70
729,70	12,20	2,86	8,80
644,60	14,40	2,55	11,00
841,60	15,50	3,37	11,70

Таблица 10

Уравнение линейной регрессии

$$Y = 237,166382 - 2,096547 * X_1 + 194,300415 * X_2 + 1,075840 * X_3$$

Коэффициент корреляции	R	0,85790
Значимость коэффициента корреляции по критерию Фишера	F _k	3,71689
Значимость уравнения регрессии по критерию Фишера	F _u	3,71689
Коэффициент детерминации	D	0,73599
Скорректированный коэффициент детерминации	D*	0,38397
Коэффициент Дарбина-Уотсона	DW	1,25056

Таблица 11

Переменная	Средние значения переменных	Среднеквадрат. отклонения	Коэффициенты вариации
Y	696,2500	84,9369	0,1220
X ₁	12,4875	1,6944	0,1357
X ₂	2,5738	0,3802	0,1477
X ₃	13,7625	3,6418	0,2646

Таблица 12

Стандартная ошибка параметров регрессии	
SE ₁	903,361
SE ₂	9,101
SE ₃	200,829
SE ₄	0,753

Таблица 13

Коэффициенты эластичности		Коэффициенты парной корреляции		Стандартные коэффициенты регрессии		Коэффициенты частной детерминации	
E_1	-0,038	$R(Y/X_1)$	0,7051	B_1	-0,0418	D_1	-0,0401
E_2	0,718	$R(Y/X_2)$	0,8566	B_2	0,8698	D_2	1,0123
E_3	-0,021	$R(Y/X_3)$	-0,4431	B_3	-0,0461	D_3	0,0278

Таблица 14

Коэффициенты корреляции $X(i)/X(j)$	X 1	X 2	X 3
X 1	1,0000	0,8390	-0,3726
X 2	0,8390	1,0000	-0,4743
X 3	-0,3726	-0,4743	1,0000

Таблица 15

Погрешность корреляции

Y_n	Y_p	$Y_n - Y_p$
539,1000	615,2622	-76,1622
667,6000	628,0567	39,5433
689,0000	649,0710	39,9290
779,5000	726,4180	53,0820
678,9000	655,9703	22,9297
729,7000	757,8203	-28,1202
644,6000	690,6079	-46,0079
841,6000	846,8749	-5,2750
Средняя ошибка аппроксимации		$e = 0,005956$