Министерство образования РФ
Уральский государственный технический университет – УПИ
Нижнетагильский технологический институт

С.Е.Демин, Е.Л.Демина

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

(конспект лекций)

г. Нижний Тагил 2003 г.

Прежде чем приступить к изучению конкретных геометрических объектов и их свойств, заметим, что аналитическая геометрия главным образом рассматривает уравнения этих объектов в координатном пространстве $\mathbf{R}^3$ (или $\mathbf{R}^2$), т.е. в некоторой трехмерной декартовой системе координат **Oxyz** (или **Oxy**). Причем, под уравнениями геометрических объектов (прямой линии, плоскости, конуса, гиперболы, окружности и т.п.) мы будем понимать всякое уравнение, устанавливающее связь между координатами (x, y, z) всех точек, принадлежащих данному геометрическому объекту.

§ 1. Плоскость в трехмерном пространстве

Рассмотрим в прямоугольной системе координат **Oxyz** произвольную поверхность **S** (рис. 1.1.) и уравнение **F(x, y, z)= 0 .**

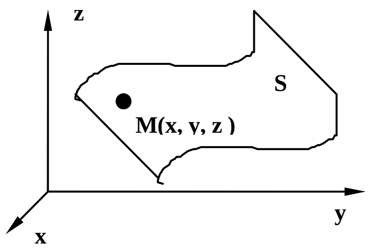


Рис.1.1.

Определение. Уравнение **F(x, y, z)= 0** называется **уравнением данной поверхности** S, если этому уравнению удовлетворяют координаты **x,y,z** любой точки **M(x,y,z)**$\in$ **S** и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на поверхности.

Пример 1. Уравнение $\mathbf{F \equiv x^2+y^2+z^2+1=0}$ не определяет никакой поверхности.

Пример 2. Найти уравнение сферы радиуса **R** с центром в точке $\mathbf{O_1(a,b,c)}$ (рис. 1.2.).

Решение:

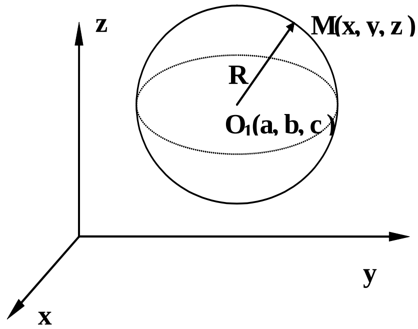


Рис.1.2.

По определению сферы расстояние от любой ее точки **M(x,y,z)** до центра **O_1 (a, b, c)** равно радиусу **R**, то есть **O_1 M = R**, или

$$O_1M = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

Откуда и получаем искомое уравнение сферы

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 .$$

В частности, если центр сферы совпадает с началом координат, то есть **a=b=c=0**, то уравнение сферы примет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Пример 3. Простейшей поверхностью является плоскость.

1.1. Векторное уравнение плоскости. Общее уравнение плоскости

Рассмотрим некоторую плоскость ***P*** и точку ***M(x,y,z)*** на этой плоскости, так называемую текущую точку плоскости. Пусть кроме этого определен вектор $\mathbf{n}$ ***(A,B,C)*** - нормаль к плоскости и некоторая точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - фиксированная точка на этой плоскости. Обозначим через $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ - радиус векторы точек M_0 и M_1 (рис. 1.3.).

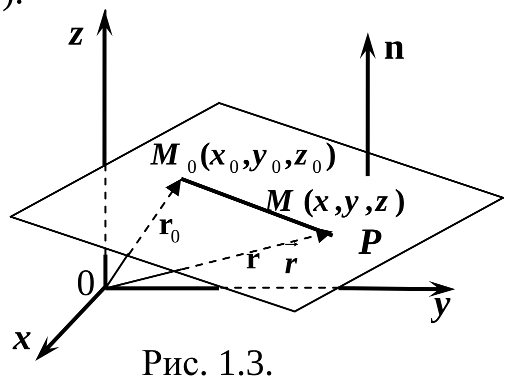


Рис. 1.3.

Очевидно, что вектор $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ лежит в плоскости. Ясно также, что векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{n}$ перпендикулярны, следовательно, их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \qquad (1.1)$$

Уравнение (1.1) называется **уравнением плоскости в векторной форме.**

Выражая скалярное произведение через координаты перемножаемых векторов, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.2) называется **уравнением плоскости, проходящей через данную точку**.

Обозначая через D выражение $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$, запишем уравнение (1.2) в виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1.3)$$

Уравнение (1.3) называется **общим уравнением плоскости**. Заметим, что общее уравнение плоскости линейно относительно переменных $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$.

Можно доказать и обратное, что всякому линейному уравнению вида (1.3) в пространстве соответствует плоскость. Подчеркнем, что коэффициенты $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ при переменных $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, и $\boldsymbol{z}$ дают нам ни что иное, как координаты вектора, перпендикулярного данной плоскости $\boldsymbol{P}$, т.е. нормали к плоскости $\boldsymbol{P}$.

Укажем некоторые случаи расположения плоскости в пространстве.

1. $\mathbf{D=0 \Rightarrow Ax + By + Cz= 0 \Rightarrow P \ni O(0,0,0)}$ (рис.1.4.)

2. $\mathbf{C = 0 \Rightarrow Ax + By + D = 0 \Rightarrow N = \{ A, B, 0 \} \perp Oz \Rightarrow \pi \,||\, Oz}$ (рис. 1.5).

3. $\mathbf{C = D = 0 \Rightarrow Ax + By = 0 \Rightarrow P \ni Oz}$ (рис. 1.6.)

4. $\mathbf{A = B = 0 \Rightarrow Cz + D = 0 \Rightarrow P \,||\, Oxy}$ (рис. 1.7.)

5. $\mathbf{A = B = D = 0 \Rightarrow Cz = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Rightarrow P = Oxy}$ (рис. 1.7.)

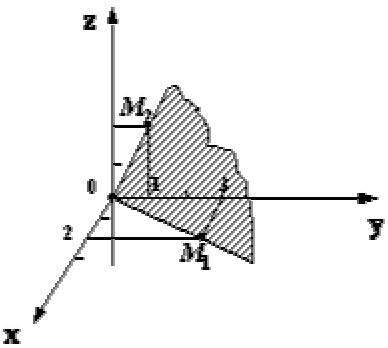


Рис.1.4.

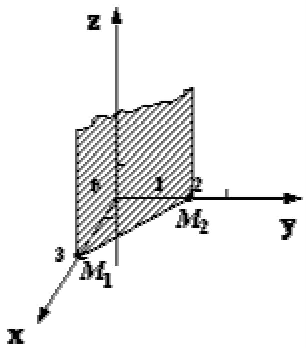


Рис.1.5.

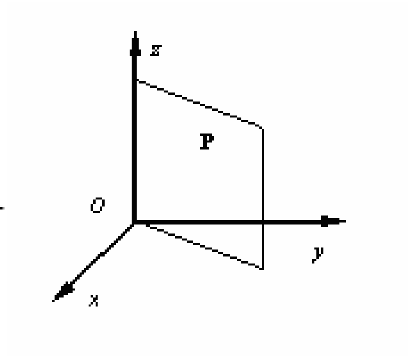


Рис.1.6.

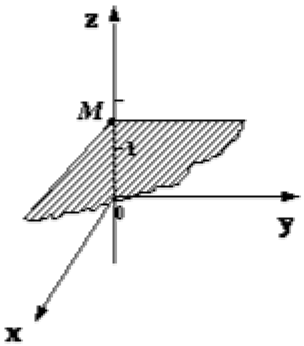


Рис.1.7.

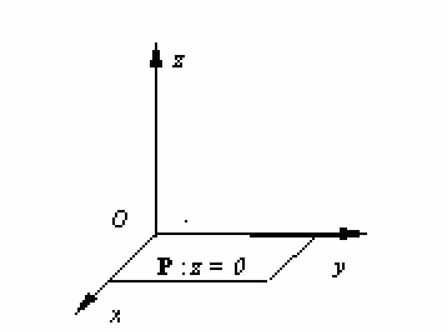


Рис.1.8.

1.2. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть $\mathbf{M_1(x_1,y_1,z_1) \in P}$, $\mathbf{M_2(x_2,y_2,z_2) \in P}$, $\mathbf{M_3(x_3,y_3,z_3) \in P}$ (рис.1.9.). Найдем уравнение плоскости **P**.

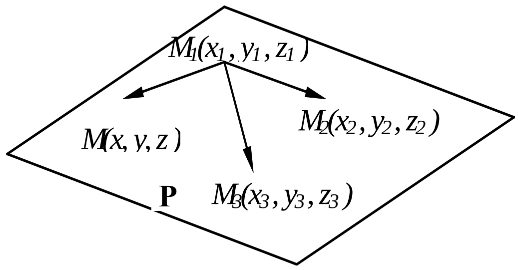


Рис.1.9.

Запишем условие компланарности векторов $\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$, $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ и $\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 . \tag{1.4}$$

Это и есть искомое **уравнение плоскости P , проходящей через три данные точки M_1 , M_2 , M_3** .

Пример 1. Составить уравнение плоскости P , проходящей через точки **$M_1(3,-1,2)$, $M_2(4,-1,-1)$, $M_3(2,0,2)$.**

Решение: Пусть **$M(x,y,z)$** произвольная точка плоскости.

Найдем координаты векторов: $\overline{M_1M} = \{x - 3; y + 1; z - 2\}$, $\overline{M_1M_2} = \{1;0;-3\}$, $\overline{M_1M_3} = \{-1;1;0\}$ и составим уравнение искомой плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y + 1 & z - 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 , \quad \text{или} \quad 3x + 3y + z - 8 = 0 .$$

Пример 2. Пусть даны три точки: **A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)** (рис.1.10).

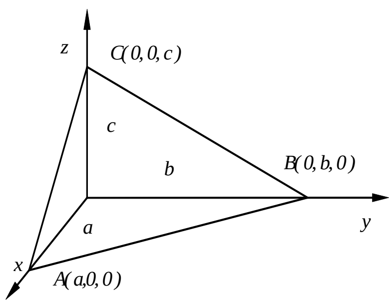


Рис.1.10.

Запишем уравнение плоскости P, проходящей через три заданные точки **A, B, C:**

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 .$$

Раскрывая определитель, получим $(x-a)bc+abz+acy=0$, или $bcx + acy + abz = abc$, или, после деления обеих частей на abc, имеем уравнение плоскости Р:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (1.5)$$

Уравнение (1.5) называют **уравнением плоскости в отрезках**.

Пример 3. Построить плоскость **Р** : $3x - 3y + 4z - 6 = 0$.

Решение: Разделив обе части уравнения на 6, получим уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{1{,}5}=1$ (рис.1.11.)

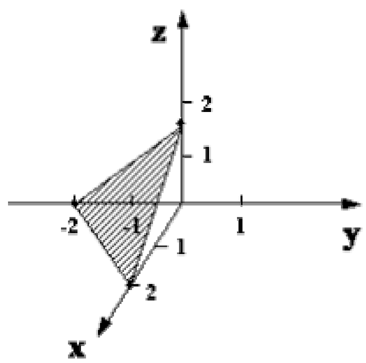


Рис.1.11.

1.3. Расстояние от точки до плоскости. Нормальное уравнение плоскости

Пусть плоскость Р задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ и дана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Тогда расстояние ρ от точки M_0 до плоскости Р определяется по формуле $\rho=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Доказательство

Расстояние от точки M_0 до плоскости Р — это, по определению, длина перпендикуляра **МК**, опущенного из точки M_0 на плоскость Р (рис. 1.12.).

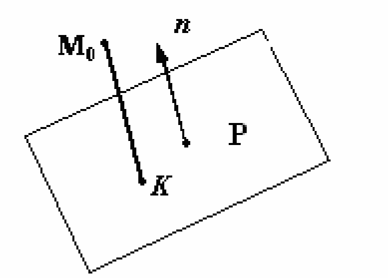


Рис. 1.12. Расстояние от точки до плоскости

Вектор $\overline{\mathbf{KM_0}}$ и нормальный вектор **n** плоскости P параллельны, то есть угол φ между ними равен 0 или π , если вектор **n** имеет направление противоположное, указанному на рис. 1.11. Поэтому

$\left|\bar{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{KM_0}}\right| = \left|\bar{\mathbf{n}}\right| \left|\overline{\mathbf{KM_0}}\right| \left|\cos\varphi\right| = \left|\bar{\mathbf{n}}\right| \cdot \rho$, откуда

$$\rho = \frac{\left|\bar{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{KM_0}}\right|}{\left|\bar{\mathbf{n}}\right|}.$$

Координаты точки **K,** которые нам неизвестны, обозначим $\mathbf{x_1}$**,** $\mathbf{y_1}$**,** $\mathbf{z_1}$. Тогда $\overline{\mathbf{KM_0}} = (\mathbf{x_0} - \mathbf{x_1}; \mathbf{y_0} - \mathbf{y_1}; \mathbf{z_0} - \mathbf{z_1})$. Так как **n =(A;B;C)**, то

$$\left|\bar{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{KM_0}}\right| = \mathbf{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}.$$

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, получим

$$\left|\bar{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{KM_0}}\right| = \mathbf{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}.$$

Точка **K** лежит на плоскости P , поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости: $\mathbf{Ax_1+By_1+Cz_1+D=0}$. Отсюда находим, что $\mathbf{Ax_1+By_1+Cz_1=-D}$. Подставив полученный результат в последнюю формулу, получим: $\left|\bar{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{KM_0}}\right| = \mathbf{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}$.

Уравнение $\dfrac{\mathbf{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}}{\pm\sqrt{\mathbf{A^2 + B^2 + C^2}}} = \mathbf{0}$ называется ***нормальным уравнением плоскости***.

Так как $\dfrac{\mathbf{A}}{\left|\bar{\mathbf{n}}\right|} = \mathbf{\cos\alpha}$, $\dfrac{\mathbf{B}}{\left|\bar{\mathbf{n}}\right|} = \mathbf{\cos\beta}$, $\dfrac{\mathbf{C}}{\left|\bar{\mathbf{n}}\right|} = \mathbf{\cos\gamma}$, то нормальное уравнение плоскости можно переписать в виде:

$$\mathbf{x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0}.$$

где **p** — расстояние от начала координат O(0, 0,0) до данной плоскости.

Действительно, $\mathbf{d = \rho\ (O\ (0,0,0)\ ,\ S)} = \dfrac{\left|\mathbf{0 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \cos\beta + 0 \cdot \cos\gamma - p}\right|}{\sqrt{\mathbf{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}}} = \mathbf{p}$.

Пример 1. Найти расстояние от точки $M_0(2,-1,-1)$ до плоскости P : $16x - 12y + 15z - 4 = 0$.

Решение: $\rho = \dfrac{|16 \cdot 2 - 12 \cdot (-1) + 15 \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{16^2 + 12^2 + 15^2}} = \dfrac{25}{25} = 1.$

1.4. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Угол между двумя плоскостями измеряется наименьшим углом между нормалями к ним (рис.1.14.).

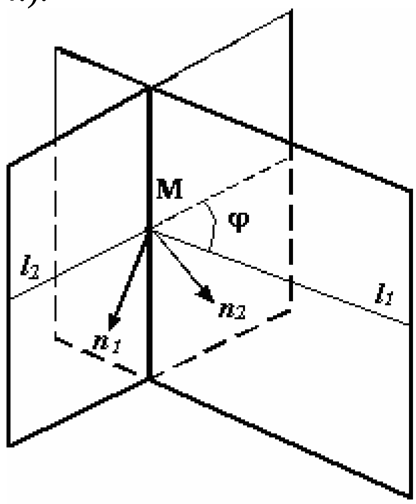


Рис.1.14.

Следовательно, если даны две плоскости $\boldsymbol{P}_1: \ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{z} + \boldsymbol{D}_1 = 0$ и $\boldsymbol{P}_2: \ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z} + \boldsymbol{D}_2 = 0$, то угол φ между ними можно вычислить из соотношения:

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = |\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2| \cdot \cos\varphi$$

Отсюда следует: $\cos\varphi = \dfrac{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2}{\sqrt{\boldsymbol{A}_1^2 + \boldsymbol{B}_1^2 + \boldsymbol{C}_1^2} \cdot \sqrt{\boldsymbol{A}_2^2 + \boldsymbol{B}_2^2 + \boldsymbol{C}_2^2}}$.

Интересны частные случаи взаимного расположения двух плоскостей в пространстве.

1. Условие параллельности двух плоскостей

Если две плоскости параллельны, то нормали к ним коллинеарны. Следовательно, условие параллельности двух плоскостей имеет вид:

$$\frac{\boldsymbol{A}_1}{\boldsymbol{A}_2} = \frac{\boldsymbol{B}_1}{\boldsymbol{B}_2} = \frac{\boldsymbol{C}_1}{\boldsymbol{C}_2}$$

2. Условие перпендикулярности двух плоскостей

Если две плоскости перпендикулярны, то перпендикулярны и нормали к ним, т.е. $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, откуда следует

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Заметим, что приведенные условия не только необходимы, но и достаточны соответственно для параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Пример 1. Вычислить угол между плоскостями

$$\mathbf{P_1\ :\ 2x - y + 2z + 15 = 0,\qquad P_2\ :\ 6x + 2y - 3z - 1 = 0.}$$

Решение: $\mathbf{n_1} = \{\,2, -1, 2\,\} \perp P_1$. $\mathbf{n_2} = \{\,6, 2, -3\,\} \perp P_2$.

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 6 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot(-3)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{3\cdot 7} = \frac{4}{21},$$

откуда $\varphi = \arccos\frac{4}{21}$.

Пример 2. Вычислить угол между плоскостями

$$\mathbf{P_1\ :\ 6x + 2y - 4z + 5 = 0,\qquad P_2\ :\ 9x + 3y - 6z - 2 = 0.}$$

Решение: $\mathbf{n_1} = \{\,6, 2, -4\,\} \perp P_1$. $\mathbf{n_2} = \{\,9, 3, -6\,\} \perp P_2$.

$$\cos\varphi = \frac{6\cdot 9 + 2\cdot 3 + (-4)\cdot(-6)}{\sqrt{6^2 + 2^2 + (-4)^2}\cdot\sqrt{9^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{84}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{126}} = 1$$

откуда $\varphi = 0$, то есть $\mathbf{P_1 \parallel P_2}$. Этот вывод также следует из того, что векторы $\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$ коллинеарны: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{-4}{-6}$.

1.5. Примеры решения задач

Пример 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,1,2)$ и параллельной данной плоскости $P : x + 2y - z + 3 = 0$ (рис.1.15.).

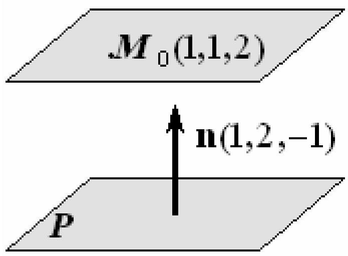


Рис.1.15

Решение. Искомая плоскость параллельна данной, следовательно нормаль к плоскости P $\mathbf{n}(1,2,-1)$ является нормалью также и к искомой плоскости (рис. 1.12), а тогда, принимая во внимание – уравнение плоскости, проходящей через данную точку, получим уравнение искомой плоскости:

$$1(x-1)+2(y-1)-1(z-2)=0$$

Или, раскрывая скобки и приводя подобные члены, окончательно получаем общее уравнение искомой плоскости: $x+2y-z-1=0$.

Пример 2. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(1,1,2)$ и перпендикулярную к двум данным плоскостям:

$P_1: x+2y-z+3=0$ и $P_2: 2x-y-2z-1=0$ (рис. 1.16.)

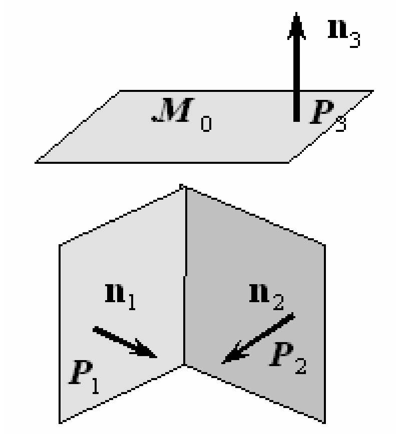


Рис.1.16.

Решение. Обозначим искомую плоскость P_3. Нам известна точка $M_0(1,1,2)$, ей принадлежащая, значит мы можем написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 - уравнение (2):

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-2)=0$$

В качестве нормали $\mathbf{n}_3$ мы можем взять вектор $\mathbf{n}_3=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$, т.к. в силу определения векторного произведения вектор $\mathbf{n}_3$ перпендикулярен как к вектору $\mathbf{n}_1(1,2,-1)$, так и к вектору $\mathbf{n}_2(2,-1,-2)$. Вычисляем

$$\mathbf{n}_3=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}.$$

Разложим данный определитель по элементам первой строки, тогда будет:

$$\mathbf{n}_3=\mathbf{i}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}+\mathbf{j}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}+\mathbf{k}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5\mathbf{i}-5\mathbf{k},$$

т.е. $\mathbf{n}_3(-5,0,5)$.

Тогда $\mathbf{-5(x-1)+0(y-1)-5(z-2)=0}$ и окончательно $x+z-3=0$.

Пример 3. Найти точку пересечения трёх плоскостей:

$P_1: x+y+z-3=0$, $P_2: 2x-y-z=0$ и $P_3: x+2y-z-2=0$. (рис.1.17.)

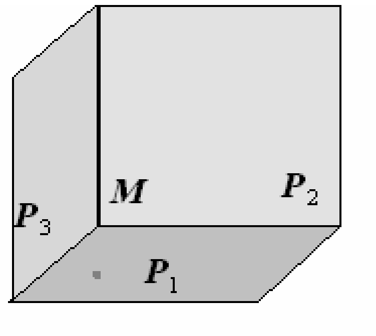


Рис.1.17.

Решение. Координаты точки пересечения плоскостей удовлетворяют каждому из уравнений плоскости, следовательно, решение задачи сводится к нахождению решения системы трёх алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ 2x-y-z&=0 \\ x+2y-z&=2 \end{aligned}\right\}.$$

Найдём решение этой системы по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Имеем $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\1&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&0&0\\1&2&-1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=9$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}3&1&1\\0&-1&-1\\2&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&0&0\\0&-1&-1\\2&2&-1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&-1\\2&-1\end{vmatrix}=9$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&0&-1\\1&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&3&0\\2&0&-1\\-1&2&0\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3&3\\-1&2\end{vmatrix}=9$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&3\\2&-1&0\\1&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&0&3\\2&-1&0\\5&0&2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3&3\\5&2\end{vmatrix}=9$$

Окончательно получим $\mathbf{x=1;\ y=1;\ z=1.}$ Итак, точка пересечения плоскостей M (1,1,1).

Пример 4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,-1,-1)$ и линию пересечения плоскостей (рис.1.18.)

$$P_1: x+y+z-3=0 \text{ и } P_2: 2x+y-z-2=0.$$

Решение. Возьмём на линии пересечения плоскостей две какие-нибудь (любые) различные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ так, чтобы координаты этих точек удовлетворяли системе двух уравнений, полученной из уравнений плоскостей.

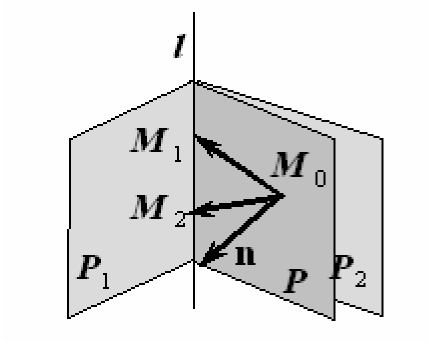


Рис.1.18.

Эта система содержит два уравнения с тремя неизвестными, значит она имеет бесчисленное множество решений (это есть множество точек, лежащих на линии пересечения плоскостей $\boldsymbol{l}$). Зафиксируем в этой системе переменную $\boldsymbol{z}$, положив, например, $\boldsymbol{z}_1 = 0$, тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 = 3 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = -1,\ \boldsymbol{y}_1 = 4.$$

Итак, мы нашли точку $\boldsymbol{M}_1(-1,4,0)$. Положим теперь $\boldsymbol{z}_2 = 1$, тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2 = 2 \\ 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = 1,\ \boldsymbol{y}_2 = 1.$$

Получим вторую точку $\boldsymbol{M}_2(1,1,1)$. Введём в рассмотрение векторы $\overrightarrow{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_1} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_2} = 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Теперь можно найти нормаль к искомой плоскости $\boldsymbol{P}$: $\mathbf{n} = \overrightarrow{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_1} \times \overrightarrow{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_2}$,

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Сокращая на 4, возьмём более простое выражение для нормали $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Теперь остаётся написать уравнение искомой плоскости $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P}\ :\ 4(\boldsymbol{x} - 1) + 1(\boldsymbol{y} + 1) - 2(\boldsymbol{z} + 1) = 0$$

Окончательно общее уравнение искомой плоскости: $2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} - 2 = 0$.

Пример 5. Вычислить высоту $\mathbf{h_S}$ пирамиды с вершинами в точках : S (0, 6, 4) , A (3, 5, 3) , B (-2, 11, -5) , C (1, -1, 4) .

Решение: Запишем уравнение грани **ABC** :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x-3} & \mathbf{y-5} & \mathbf{z-3} \\ \mathbf{-2-3} & \mathbf{11-5} & \mathbf{-5-3} \\ \mathbf{1-3} & \mathbf{-1-5} & \mathbf{4-3} \end{vmatrix} = \mathbf{2x - y - 2z + 5 = 0}$$

Найдем расстояние от точки S (0, 6, 4) до плоскости **2x – y - 2z + 5=0** :

$$\mathbf{h_S = \frac{|2 \cdot 0 - 6 - 2 \cdot 4 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3.}$$

1.6. Контрольные вопросы к § 1.

1. Что называется уравнением поверхности в пространстве? Приведите примеры поверхностей.
2. Дайте определение нормального вектора плоскости.
3. Как связаны между собой нормальные векторы двух плоскостей, если эти плоскости:
   а) параллельны;
   б) перпендикулярны?
4. Выведите уравнение плоскости, проходящей через данную точку и имеющей данный нормальный вектор.
5. Каков геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в общем уравнении плоскости?
6. Какие частные случаи общего уравнения плоскости называются неполными уравнениями плоскости? Приведите примеры.
7. Выведите уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
8. Сформулируйте и докажите условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
9. Выведите формулу для вычисления косинуса угла между плоскостями.
10. По какой формуле находится расстояние от данной точки до плоскости?

§ 2. Прямая линия в пространстве

Линию **L** в пространстве будем рассматривать как пересечение двух поверхностей $\mathbf{S_1}$ и $\mathbf{S_2}$, то есть геометрическое место точек, находящихся одновременно на двух поверхностях

$$F_1(x, y, z) = 0 \text{ и } F_2(x, y, z) = 0,$$

то есть $\mathbf{L = S_1 \cap S_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{F_1(x;y;z) = 0} \\ \mathbf{F_2(x;y;z) = 0} \end{cases}.$

Например, окружность $\mathbf{x^2 + y^2 = 16}$, получающаяся пересечением сферы $\mathbf{x^2+y^2+z^2=16}$ плоскостью $\mathbf{z = 0}$, определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{x^2 + y^2 + z^2 = 16} \\ \mathbf{z = 0} \end{cases}.$$

2.1. Общее уравнение прямой в пространстве

Прямую линию $\mathbf{L}$ в пространстве можно рассматривать как пересечение двух различных и непараллельных плоскостей P_1 и P_2.

$$\mathbf{L} = \mathbf{P_1} \cap \mathbf{P_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0} \\ \mathbf{A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0} \end{cases} \qquad (2.1)$$

Уравнения (2.1) называют ***общими уравнениями прямой*** $\mathbf{L}$. Уравнений типа (2.1), определяющих одну и ту же прямую $\mathbf{L}$, бесконечное множество, так как через прямую $\mathbf{L}$ можно провести бесконечное множество плоскостей (рис. 2.1).

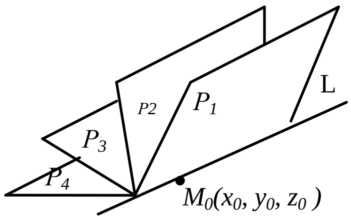


Рис. 2.1

Множество всех плоскостей, проходящих через заданную прямую **L**, называется ***пучком плоскостей***, прямая **L** — ***осью пучка***.

Заметим, что уравнение

$$\mathbf{A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda\,(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0}, \qquad (2.2)$$

где λ - параметр, при различных λ дает уравнение любой плоскости пучка, ось которого задана уравнением (2.2), кроме плоскости P_2:

$$\mathbf{A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.}$$

Уравнение (2.2) пучка плоскостей используется при решении задач, в которых требуется провести плоскость через заданную прямую, причем значение λ находится из какого-либо дополнительного условия.

Если (2.2) переписать в виде

$$\mathbf{{}^1\!/_\lambda \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0},$$

то P_2 получается как предельное значение при $\lambda \to \infty$.

2.2. Векторное уравнение прямой в пространстве

Положение прямой линии в пространстве можно задать различными способами. В частности, через данную точку $\boldsymbol{M_0(x_0,y_0,z_0)}$ параллельно данному ненулевому вектору $\mathbf{S}(\boldsymbol{m,n,p})$ можно провести единственную прямую (рис. 2.2.).

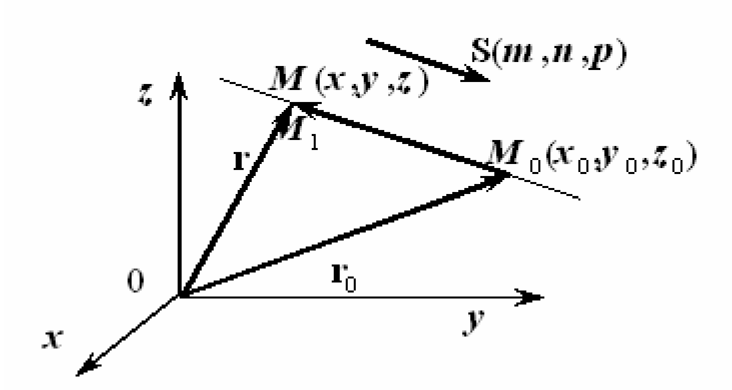


Рис.2.2.

Вектор $\mathbf{S}$ называется направляющим вектором прямой. Обозначим через $\mathbf{r}_0$ радиус-вектор точки M_0, а через $\mathbf{r}$ - радиус-вектор произвольной точки M, лежащей на прямой.

Очевидно, что векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{S}$ коллинеарны, но $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, следовательно $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \lambda\mathbf{S}$. Отсюда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{S} \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) называется **векторным уравнением** прямой линии в пространстве.

2.3. Параметрические и канонические уравнения прямой

Запишем уравнение (2.3) в виде:

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + \lambda m\mathbf{i} + \lambda n\mathbf{j} + \lambda p\mathbf{k} = (x_0 + \lambda m)\mathbf{i} + (y_0 + \lambda n)\mathbf{j} + (z_0 + \lambda p)\mathbf{k}$$

Примем теперь во внимание, что если два вектора равны, то совпадают их координаты в данном базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda m \\ y &= y_0 + \lambda n \\ z &= z_0 + \lambda p \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Уравнения (2.4) называются ***параметрическими уравнениями прямой***. Здесь в качестве параметра выступает λ. Придавая λ различные числовые значения из $(-\infty, +\infty)$, будем получать на прямой различные точки.

Исключая из уравнения (2.4) параметр λ, получим так называемые ***канонические уравнения прямой:***

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{2.5}$$

Эти уравнения называют ***каноническими уравнениями прямой*** $\mathbf{L}$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\bar{\mathbf{S}} = \{m, n, p\}$.

Очевидно, уравнения (2.5) представляют собой условия коллинеарности векторов $\overline{M_0M} = \{ x-x_0 , y-y_0 , z-z_0 \}$ и $\vec{S} = \{ m, n, p \}$.

Кроме того, канонические уравнения (2.5) представляют систему двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n}, \\ \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{p}, \end{cases}$$

определяющих соответственно две плоскости P_1 и P_2 , пересечение которых дает прямую **L** , проходящую через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеющую направляющий вектор $\vec{S} = \{ m, n, p \}$.

Пример 1. Даны точки **A(-1,2,3)** и **B(2,-3,1).** Составить уравнения прямой, проходящей через $M_0(3,-1,2)$ и параллельной вектору $\overline{AB}$.

Решение: По условию дана точка $M_0 (3 ,-1,2)$, то есть $x_0=3, y_0=-1, z_0=2$.

В качестве направляющего вектора возьмем $\vec{S} = \overline{AB} =\{3,-5,-2\}$, то есть **m =3, n = -5, p = -2.**

Используя (2.5), запишем канонические уравнения прямой:

$$L: \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-2} \quad (=t).$$

Приравняв все части равенства параметру **t** , получим параметрические уравнения прямой:

$$L: \begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = -5t - 1 \\ z = -2t + 2 \end{cases}.$$

Пример *2.* Написать канонические и параметрические уравнения перпендикуляра **L** к плоскости **P** : **2x - 3y + z - 7 = 0** , проходящего через точку $M_0 (-1, 2, 3)$.

Решение: По условию $x_0 = -1, y_0 =2, z_0 =3$. В качестве направляющего вектора возьмем вектор $\vec{S} = \{ 2, -3, 1 \} \perp P$. Тогда каноническое уравнение перпендикуляра имеет вид:

$$L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1} \quad (=t).$$

Приравняв все части последнего равенства параметру *t*, получим искомое параметрические уравнения прямой:

$$L: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

Пример 3. Приведем к каноническому виду уравнения прямой

$$\mathbf{L = P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}}.$$

Решение: Требуется записать канонические уравнения этой прямой **L** (рис. 2.3), для чего необходимо знание точки $\mathbf{M_0(x_0,y_0,z_0)} \in$ **L** и направляющего вектора $\bar{\mathbf{S}} \parallel \mathbf{L}$. Координаты точки $\mathbf{M_0(x_0,y_0,z_0)}$ находятся из заданной системы при произвольном значении одной из координат.

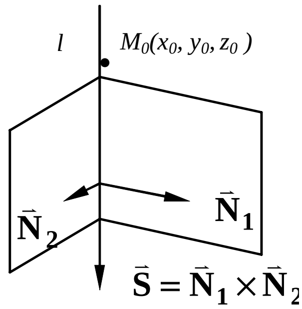


Рис 2.3.

В качестве направляющего вектора $\bar{\mathbf{S}}$ можно взять векторное произведение векторов $\overline{\mathbf{n_1}} \perp \mathbf{P}_1$ и $\overline{\mathbf{n_1}} \perp \mathbf{P_2}$, то есть $\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{n}}_1 \times \bar{\mathbf{n}}_2$.

Найдем $\mathbf{M_0(x_0,y_0,z_0)} \in$ **L**. Пусть $\mathbf{z_0 = 0}$, тогда для нахождения x_0 и y_0 получаем систему $\begin{cases} \mathbf{2x_0 + 3y_0 = 7} \\ \mathbf{3x_0 + y_0 = 0} \end{cases}$, решая которую, найдем $x_0 = -1$ и $y_0 = 3$, то есть $\mathbf{M_0(-1, 3, 0)}$.

Из условия задачи $\overline{\mathbf{n_1}} = \mathbf{\{2,3,-16\} \perp P_1}$, и $\overline{\mathbf{n_2}} = \mathbf{\{3,1,-17\} \perp P_2}$, поэтому

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{n}}_1 \times \bar{\mathbf{n}}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = \mathbf{-35i - 14j - 7k}.$$

В качестве направляющего вектора возьмем $\bar{\mathbf{S}}_1 = -\dfrac{1}{7}\bar{\mathbf{S}} = \{\,5;\ 2;\ 1\}$.

Итак, искомые канонические уравнения прямой

$$\mathbf{L:\ \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-0}{1}\ \ (=t).}$$

2.4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть даны две различные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Очевидно, что через эти две точки можно провести единственную прямую (рис.2.4.). В качестве направляющего вектора этой прямой возьмём вектор $\mathbf{S} = \overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2}$, а в качестве фиксированной точки можно взять любую из точек $\boldsymbol{M}_1$ или $\boldsymbol{M}_2$.

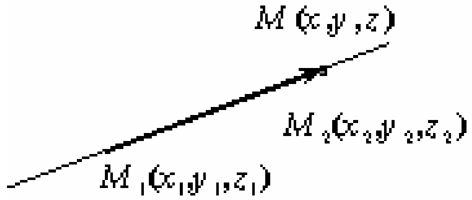


Рис.2.4.

Пусть это будет точка $\boldsymbol{M}_1$. Тогда канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пример 1. Найти параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $\mathbf{M_1(2,-5,1)}$ и $\mathbf{M_2(-1,1,2)}$.

Решение. В качестве точки M_0 можно взять любую из двух данных точек, пусть для определения $M_0 = M_1$. За направляющий вектор возьмем

$$\vec{\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{M_1M_2}} = \{\ \underbrace{\mathbf{x_2 - x_1}}_{\mathbf{m}},\ \underbrace{\mathbf{y_2 - y_1}}_{\mathbf{n}},\ \underbrace{\mathbf{z_2 - z_1}}_{\mathbf{p}}\ \} = \{\,-3;\, 6;\, 1\,\}.$$

Запишем каноническое уравнение прямой:

$$\mathbf{L}: \frac{\mathbf{x - 2}}{\mathbf{-3}} = \frac{\mathbf{y + 5}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{z - 1}}{\mathbf{1}} \quad \mathbf{(= t),}$$

откуда $\mathbf{L}: \begin{cases} \mathbf{x = -3t + 2} \\ \mathbf{y = 6t - 5} \\ \mathbf{z = t + 1} \end{cases}$ и есть искомые параметрические уравнения.

2.5. Угол между двумя прямыми. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Определение. ***Углом между двумя прямыми*** называется наименьший угол между их направляющими векторами.

Очевидно, что если

$$\boldsymbol{l}_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{l}_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$

то угол φ между прямыми $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ можно вычислить из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2}{|\mathbf{S}_1| \cdot |\mathbf{S}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

1) Если прямые $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ параллельны, то их направляющие векторы $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ коллинеарны, следовательно, условие параллельности двух прямых имеет вид:

$$\frac{\boldsymbol{m}_1}{\boldsymbol{m}_2}=\frac{\boldsymbol{n}_1}{\boldsymbol{n}_2}=\frac{\boldsymbol{p}_1}{\boldsymbol{p}_2}$$

2) Если прямые $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ перпендикулярны, то $\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2=0$, следовательно, условие перпендикулярности двух прямых имеет вид:

$$\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2+\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2=0$$

Заметим, что в силу рассмотренных ранее теорий полученные условия являются необходимыми и достаточными условиями соответственно параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.

Пример 1. Найти канонические уравнения прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M}_0(1,-1,2)$ и параллельной данной прямой $\boldsymbol{l}:\ \frac{\boldsymbol{x}+1}{2}=\frac{\boldsymbol{y}-1}{-1}=\frac{\boldsymbol{z}}{-1}$ (рис.2.5.).

Решение.

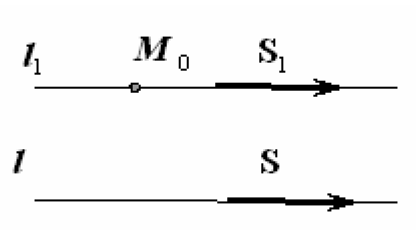


Рис.2.5.

Направляющий вектор данной прямой $\boldsymbol{l}$ есть $\mathbf{S}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

Искомая прямая $\boldsymbol{l}_1$ параллельна данной прямой $\boldsymbol{l}$, значит её направляющий вектор $\mathbf{S}_1=\mathbf{S}$. Фиксированная точка $\boldsymbol{M}_0(1,-1,2)$ лежит на искомой. Её канонические уравнения: $\frac{\boldsymbol{x}-1}{2}=\frac{\boldsymbol{y}+1}{-1}=\frac{\boldsymbol{z}-2}{-1}$.

Пример 2. Найти канонические уравнения прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M}_0(1,0,-1)$ и перпендикулярной к двум данным прямым

$$\boldsymbol{l}_1:\frac{\boldsymbol{x}}{1}=\frac{\boldsymbol{y}-1}{2}=\frac{\boldsymbol{z}+1}{-1}\quad \text{и}\quad \boldsymbol{l}_2:\ \frac{\boldsymbol{x}-1}{-1}=\frac{\boldsymbol{y}+1}{1}=\frac{\boldsymbol{z}}{1}\ \text{(рис.2.6.).}$$

Решение.

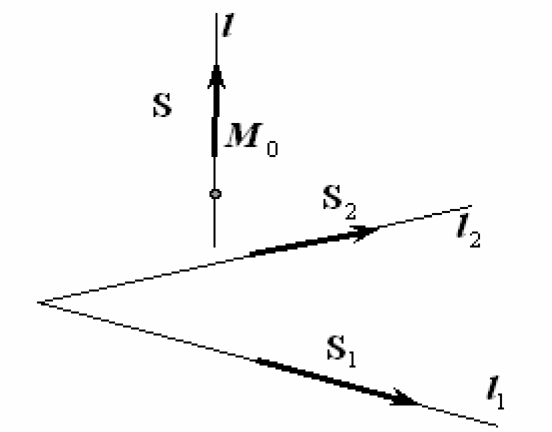


Рис.2.6.

В качестве направляющего вектора искомой прямой $\boldsymbol{l}$ возьмём вектор $\mathbf{S}=\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=3\mathbf{i}+3\mathbf{k}$. За направляющий вектор возьмём коллинеарный вектор $\mathbf{S_1}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{S}=\mathbf{(1;0;1)}$. Канонические уравнения прямой $\boldsymbol{l}$:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{1}.$$

2.6. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Определение. ***Углом между прямой и плоскостью*** называется угол между прямой и её проекцией на эту плоскость. (рис. 2.7.)

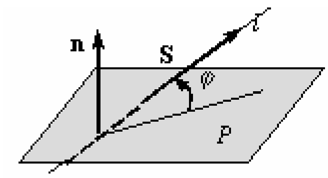


Рис.2.7.

Пусть плоскость $\boldsymbol{P}$ задана общим уравнением $\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}y+\boldsymbol{C}z+\boldsymbol{D}=0$, следовательно, нормаль к ней $\mathbf{n}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$.

Прямая задана каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, поэтому направляющий вектор прямой $\mathbf{S}=(m,n,p)$.В силу определения, если φ - угол между прямой и плоскостью, то

$$\cos(\mathbf{n};\mathbf{S}) = \sin\varphi = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}|}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{S}|} = \frac{|\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{p}|}{\sqrt{\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2}\cdot\sqrt{\boldsymbol{m}^2+\boldsymbol{n}^2+\boldsymbol{p}^2}}.$$

Пример 1. Вычислить угол между прямой l: $\dfrac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{4}} = \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{12}} = \dfrac{\mathbf{z-1}}{\mathbf{-3}}$ и плоскостью Р : **6x - 3y + 2z = 0 .**

Решение: Из данных уравнений имеем направляющий вектор $\vec{\mathbf{S}}$ = {4,12,-3} и нормальный вектор $\vec{\mathbf{N}}$ ={6,-3,2} плоскости **P** . По полученной формуле для искомого угла имеем:

$$\mathbf{\sin\varphi} = \frac{|\vec{\mathbf{S}}\cdot\vec{\mathbf{N}}|}{|\vec{\mathbf{S}}|\cdot|\vec{\mathbf{N}}|} = \frac{|\mathbf{4\cdot 6+12\cdot(-3)+(-3)\cdot 2}|}{\sqrt{\mathbf{4^2+12^2+(-3)^2}}\cdot\sqrt{\mathbf{6^2+(-3)^2+2^2}}} = \frac{\mathbf{18}}{\sqrt{\mathbf{169}}\cdot\sqrt{\mathbf{45}}} = \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{91}},$$

то есть $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{arcsin}^{\mathbf{18}}/_{\mathbf{19}}$**.**

1. Запишем ***условие параллельности*** прямой и плоскости.

Если прямая параллельна плоскости, то её направляющий вектор **S** перпендикулярен нормали **n**, следовательно, $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n} = 0$, значит, условие параллельности прямой и плоскости имеет вид

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{p} = 0$$

2. Запишем ***условие перпендикулярности*** прямой и плоскости.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то её направляющий вектор коллинеарен нормали к плоскости, следовательно, условие перпендикулярности прямой и плоскости имеет вид:

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{p}}$$

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M}_0(1,1,2)$ и перпендикулярной к данной плоскости $\boldsymbol{P}: \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} + 5 = 0$ (рис.2.8.)

Решение. В качестве направляющего вектора искомой прямой можно взять нормаль к данной плоскости $\mathbf{n}(1,-2,-1)$. Искомая прямая $\boldsymbol{l}$ имеет канонические уравнения: $\dfrac{\boldsymbol{x}-1}{1} = \dfrac{\boldsymbol{y}-1}{-2} = \dfrac{\boldsymbol{z}-2}{-1}$.

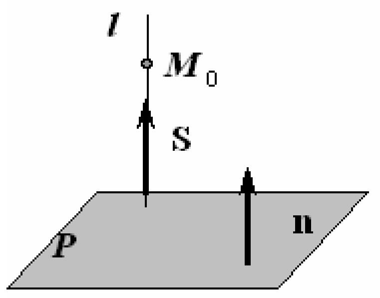


Рис. 2.8.

3. Запишем ***условие принадлежности*** прямой l и плоскости P:

$$\mathbf{M(x_0; y_0; z_0) \in P \iff Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0.}$$

4. Найдем ***координаты точки пересечения*** прямой и плоскости.

Запишем параметрические уравнения прямой $\boldsymbol{l}$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{mt + x_0} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{nt + y_0} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{pt + z_0} \end{aligned}\right\} .$$

Подставим выражения **x, y** и **z** в уравнение плоскости P :

$$\mathbf{A\,(mt + x_0) + B(nt + y_0) + C\,(pt + z_0) + D = 0}$$

или

$$\mathbf{(Am + Bn + Cp)\,t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.}$$

Если $\boldsymbol{l}$ не параллельна P, то есть $\mathbf{Am + Bn + Cp \neq 0}$, то отсюда находим

$$\mathbf{t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}} .$$

Подставляя найденное значение **t** в параметрическое уравнение прямой, получим искомую точку пересечения.

Пример 3. Найти координаты точки пересечения прямой
$\boldsymbol{l}$ **:** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{-1}$ и плоскости $\boldsymbol{P}$ **:** $x + 2y + 3z - 3 = 0$ (рис. 2.9.).

Решение.

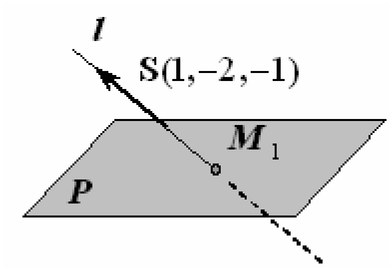


Рис. 2.9.

От канонических уравнений данной прямой перейдём к её параметрическим, положив $\dfrac{x-1}{1} = t$, $\dfrac{y-1}{-2} = t$, $\dfrac{z-2}{-1} = t$. Откуда следует

$$\left.\begin{aligned} x &= t + 1 \\ y &= -2t + 1 \\ z &= -t + 2 \end{aligned}\right\}$$

Выясним, при каком значении параметра t данная прямая l и плоскость P пересекаются. Для этого нужно найденные значения x , y и z подставить в уравнение плоскости P : $(t+1) + 2(-2t+1) + 3(-t+2) - 3 = 0$.

Отсюда следует, что $t=1$, т.е. при значении параметра $t=1$ прямая и плоскость пересекаются. Вернём $t=1$ в параметрическое уравнение прямой, получим координаты искомой точки

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1+1=2 \\ y_1 &= -2\cdot 1+1=-1 \\ z_1 &= -1+2=1 \end{aligned}\right\}.$$

Итак $M_1(2,-1,1)$.

Пример 4. Найти проекцию точки **A(4,-3,1)** на плоскость P: x+2y-z-3=0 (рис. 2.10.).

Решение:

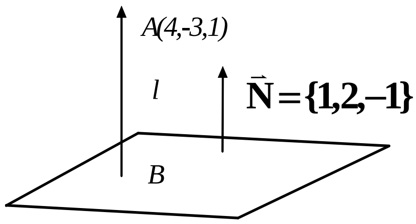


Рис. 2.10.

Напишем канонические уравнения прямой l, проходящей через точку A(4,-3,1) перпендикулярно плоскости P , то есть имеющей направляющий вектор $\bar{S}=\bar{N}=\{1,2,-1\}$:

$$\mathbf{l:}\ \frac{\mathbf{x-4}}{\mathbf{1}}=\frac{\mathbf{y+3}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{z-1}}{\mathbf{-1}}\ \ \mathbf{(=t),}$$

откуда получаем параметрические уравнения прямой l :

$$\mathbf{l:}\quad \begin{cases} \mathbf{x=t+4} \\ \mathbf{y=2t-3} \\ \mathbf{z=-t+1} \end{cases}.$$

Так как искомая проекция $\mathbf{B = l \cap P}$, то подставляя полученные **x, y** и **z** в уравнение плоскости, получим :

t + 4 + 2 (2 t - 3) - (- t + 1) - 3 = 0 или **6 t - 6 = 0 ,** то есть **t= 1.**

Подставляя значение t в систему, получаем координаты точки B: x=5, y=-1, z=0.

Итак, **B(5,-1,0).**

2.7. Примеры решения задач

Пример 1. Через точки M_1(-6,6,-5) и M_2(12,-6,1) проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

Решение: Запишем канонические и параметрические уравнения прямой $M_1 M_2$:

$$\frac{x+6}{12+6}=\frac{y-6}{-6-6}=\frac{z+5}{1+5}, \text{ или } \begin{cases} x=-6+18t \\ y=6-12t \\ z=-5+6t \end{cases}.$$

Найдем точку А пересечения прямой M_1 M_2 с плоскостью Оху: **z=0.** Подставим **x, y, z** из параметрических уравнений в уравнение плоскости Оху и найдем t : $\mathbf{t=5/6}$.

Из параметрических уравнений получим координаты точки А :

$$\mathbf{x=-6+18\cdot 5/6=9;} \quad \mathbf{y=6-12\cdot 5/6=-4;} \quad \mathbf{z=0.}$$

Аналогично находятся координаты точек В и С пересечения прямой M_1 M_2 с плоскостями x=0 и y = 0 .

Пример 2. Вычислить расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}.$$

Решение: Расстояние между данными прямыми равно высоте h треугольника АВС (рис. 2.11.).

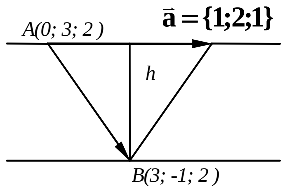


Рис. 2.11.

Так как $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\bar{a}|\cdot \mathbf{h}=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\overline{AB}\right|$, то $\mathbf{h}=\frac{\left|\bar{a}\times\overline{AB}\right|}{|\bar{a}|}$.

$\overline{AB}$={3-0; -1- 3;2-2}={3;-4;0};

$$\bar{a}\times\overline{AB}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}=4\vec{i}+3\vec{j}-10\vec{k}=\{4;3;-10\};$$

$|\bar{a}\times\overline{AB}|=\sqrt{4^2+3^2+(-10)^2}=5\sqrt{5}$; $|\bar{a}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$.

Таким образом, $\mathbf{h}=\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{30}}{6}$.

Пример 3. Найти канонические уравнения линии пересечения плоскостей $\boldsymbol{P}_1$: $x+y=0$ и $\boldsymbol{P}_2$: $2x+y-z-3=0$. (рис. 2.12.)

Решение. Для того, чтобы написать канонические уравнения прямой, мы должны знать точку $\boldsymbol{M}_0$ на этой прямой и её направляющий вектор $\mathbf{S}$.

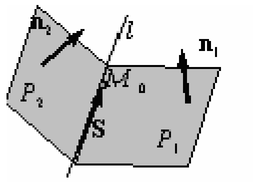


Рис.2.12.

1. Точку $\boldsymbol{M}_0$ мы найдём, решив систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y&=0\\ 2x+y-z&=3\end{aligned}\right\}.$$

Эта система имеет бесчисленное множество решений (множество точек на прямой $\boldsymbol{l}$). Нам достаточно найти одну какую-нибудь точку из этого множества. Для этого положим в системе $z=z_0=0$, тогда для нахождения x_0 и y_0 имеем систему

$$\left.\begin{aligned} x_0+y_0&=0\\ 2x_0+y_0&=3\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0=3,\ y_0=-3.$$

Итак, $\boldsymbol{M}_0(3,-3,0)$

2. В качестве направляющего вектора $\mathbf{S}$ искомой прямой можно взять вектор $\mathbf{S}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$. Здесь $\mathbf{n}_1(1,1,0)$ и $\mathbf{n}_2(2,1,-1)$. Вычислим вектор $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ 1&1&0\\ 2&1&-1\end{vmatrix}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}.$$

Итак, уравнения линии пересечения плоскостей $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$:

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}$$

Пример 4. Доказать, что данные прямые

$$\boldsymbol{l}_1:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{l}_2:\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$$

лежат в одной плоскости и найти уравнение этой плоскости (рис.2.13.).

Решение.

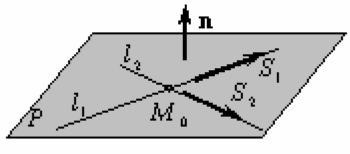


Рис.2.13.

Нетрудно видеть, что прямые проходят через точку $\boldsymbol{M}_0(1,0,1)$, а через две прямые, проходящие через одну точку, можно провести единственную плоскость.

В качестве нормали $\mathbf{n}$ к искомой плоскости $\boldsymbol{P}$ можно взять $\mathbf{n}=\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$.

$$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+3\mathbf{k}$$

В качестве нормали $\mathbf{n}$ возьмём коллинеарный вектор, т.е. положим $\mathbf{n}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Тогда искомая плоскость имеет также уравнение:

$$1(\boldsymbol{x}-1)-1\cdot\boldsymbol{y}+1(\boldsymbol{z}-1)=0.$$

Итак, окончательно $\boldsymbol{P}:\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}-2=0$.

2.8. Контрольные вопросы к § 2.

1. Дайте определение направляющего вектора прямой в пространстве.
2. Выведите канонические уравнения прямой в пространстве.
3. Выведите уравнения прямой в пространстве, проходящей через две данные точки.
4. Сформулируйте и докажите условия параллельности и перпендикулярности прямых; прямой и плоскости, заданных своими уравнениями.
5. Как находятся координаты точки пересечения прямой и плоскости, заданных своими уравнениями?
6. Запишите векторные уравнения прямой в пространстве.

§ 3. Прямая линия на плоскости

Рассмотрим в прямоугольной системе координат **Oxy** произвольную линию L (рис. 3.1.) и уравнение **F(x, y)= 0 .**

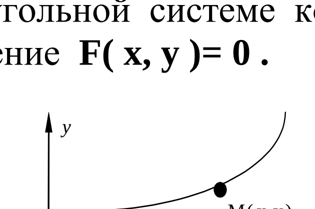


Рис.3.1.

Определение. Уравнение **F(x, y)= 0** называется **уравнением данной линии L**, если этому уравнению удовлетворяют координаты **x,y,** любой точки **M(x,y)**$\in$ **L** и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на плоскости.

Пример 1. Уравнение $F \equiv x^2+y^2+1=0$ не определяет никакой линии.

Пример 2. Найти уравнение окружности радиуса **R** с центром в точке $O_1(a,b)$ (рис. 3.2.).

Решение:

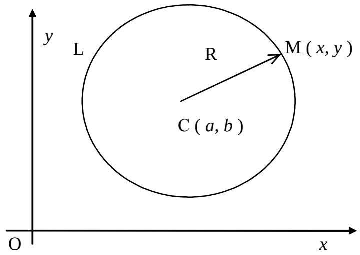


Рис.3.2.

По определению сферы расстояние от любой ее точки **M(x,y)** до центра $O_1(a, b)$ равно радиусу **R**, то есть $O_1M = R$, или

$$O_1M = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$$

Откуда и получаем искомое уравнение сферы

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2 .$$

В частности, если центр сферы совпадает с началом координат, то есть **a=b=0**, то уравнение сферы примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2 .$$

Пример 3. Простейшей линией является прямая.

3.1. Общее уравнение прямой

Рассмотрим случай, когда прямая l лежит в плоскости xOy. (рис.3.3.).

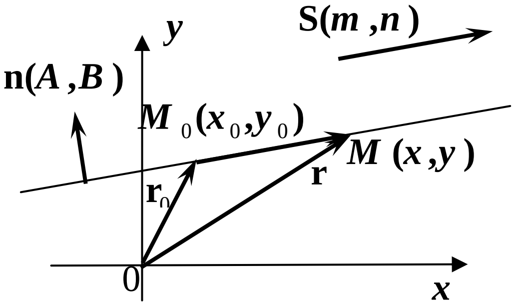


Рис. 3.3.

Если её направляющий вектор $\mathbf{S} = (m, n)$, а $M_0(x_0, y_0)$ - фиксированная точка на этой прямой, то очевидно, что

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

есть каноническое уравнение прямой. Отсюда следует, что

$$nx - my - nx_0 - my_0 = 0$$

Обозначим $n = A_1, -m = B$, $-nx_0 - my_0 = C$, тогда последнее уравнение можно записать в виде

$$Ax + By + C = 0$$

Это уравнение прямой l, лежащей в плоскости, называется ***общим уравнением прямой на плоскости***. Заметим, что это уравнение линейно относительно переменных x и y . Можно доказать и обратное, т.е. что всякому линейному уравнению на плоскости соответствует некоторая прямая.

Общее уравнение прямой называется полным, если все его коэффициенты А, В, С отличны от нуля, и неполным, если хоть одно из этих чисел равно нулю.

Рассмотрим возможные виды неполных уравнений прямой.

1) С = 0 - прямая Ах + Ву = 0 проходит через начало координат.
2) В = 0 - прямая Ах + С = 0 параллельна оси Оу (так как нормаль к прямой {А,0} перпендикулярна оси Оу).
3) А = 0 - прямая Ву + С = 0 параллельна оси Ох.
4) В=С=0 – уравнение Ах = 0 определяет ось Оу.
5) А=С=0 – уравнение Ву = 0 определяет ось Ох.

Таким образом, прямая, задаваемая полным уравнением, не проходит через начало координат и не параллельна координатным осям. Преобразуем полное уравнение прямой следующим образом: $-\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}}\mathbf{x} - \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}\mathbf{y} = \mathbf{1},$ откуда

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{b}} = \mathbf{1},$$

где $\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{b} = -\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{B}}$ равны величинам отрезков, отсекаемых прямой на осях Ох и Оу. Поэтому такое уравнение называют уравнением прямой в отрезках.

Если принять за параметр **t** величину, стоящую в левой и правой частях канонического уравнения, то уравнение прямой может быть записано в виде

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{mt} + \mathbf{x_0} \\ \mathbf{y} = \mathbf{nt} + \mathbf{y_0} \end{cases}$$

которое называется ***параметрическим уравнением прямой на плоскости***.

3.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Разрешим общее уравнение прямой относительно y :

$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ и обозначим $-\frac{A}{B}=k$, $-\frac{C}{B}=b$, тогда получим

$$y=kx+b\,.$$

Уравнение прямой, записанное в таком виде, называется уравнением прямой с ***угловым коэффициентом***. Нетрудно выяснить значение параметров k и b .

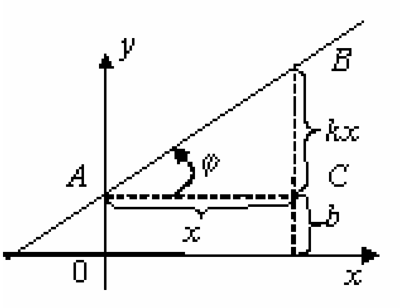


Рис.3.4.

Пусть $k>0$ и $b>0$. Тогда при $x=0$ из получаем $y=b$, т.е. b - есть ордината точки пересечения с осью Oy (рис.3.4.). С другой стороны, из ΔABC ясно, что $\mathrm{tg}\varphi=\frac{BC}{AC}=k$, т.е. k -есть тангенс угла, образуемого прямой с осью Ox, который называется угловым коэффициентом этой прямой.

3.3. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых

1. Пусть две прямые заданы своими уравнениями с угловым коэффициентом $l_1: y=k_1x+b_1$, $l_2: y=k_2x+b_2$. Тогда нетрудно найти угол между этими прямыми (рис. 3.5.).

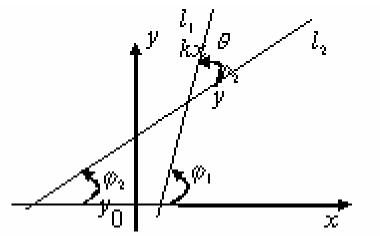


Рис. 3.5.

$$\mathrm{tg}\theta=\mathrm{tg}(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{\mathrm{tg}\varphi_1-\mathrm{tg}\varphi_2}{1+\mathrm{tg}\varphi_1\cdot\mathrm{tg}\varphi_2}=\pm\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}.$$

Условие параллельности очевидно $\mathbf{k_1=k_2}$.

Условие перпендикулярности прямых $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ эквивалентно условию обращения в нуль тангенса угла между прямыми и следовательно имеет вид:

$$\mathbf{k_1k_2= -1.}$$

2. Пусть две прямые заданные общими уравнениями:

$$\mathbf{L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0} \text{ и } \mathbf{L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0}.$$

Так как $\overline{\mathbf{N_1}} = (\mathbf{A_1}, \mathbf{B_1})$ и $\overline{\mathbf{N_2}} = (\mathbf{A_2}, \mathbf{B_2})$, то угол между прямыми L_1 и L_2 равен углу между нормальными векторами к этим прямым. Из определения скалярного произведения имеем:

$$\mathbf{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}.$$

Условие параллельности прямых L_1 и L_2 эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов $\overline{\mathbf{N_1}}$ и $\overline{\mathbf{N_2}}$ этих прямых, т. е. пропорциональности их координат:

$$\mathbf{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 эквивалентно условию ортогональности нормальных векторов $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ этих прямых, т. е. равенство нулю их скалярного произведения:

$$\mathbf{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}.$$

3. Пусть две прямые заданы своими каноническими уравнениями:

$$\mathbf{L_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}} \text{ и } \mathbf{L_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}}.$$

Так как направляющими векторами прямых L_1 и L_2 являются вектора $\overline{\mathbf{n_1}} = (\mathbf{m_1}, \mathbf{n_1})$ и $\overline{\mathbf{n_2}} = (\mathbf{m_2}, \mathbf{n_2})$, то по аналогии получаем:

Угол между двумя прямыми: $\mathbf{\cos\varphi = \dfrac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}}$.

Условие параллельности двух прямых: $\mathbf{\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}}$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $\mathbf{m_1m_2 + n_1n_2 = 0}$.

4. Для нахождения расстояния от точки $M(x_1,y_1)$ до прямой L, необходимо иметь общее уравнение прямой: $\mathbf{L : Ax + By + C = 0}$. Формула для нахождения расстояния:

$$\mathbf{d} = \frac{|\mathbf{Ax_1 + By_1 + C}|}{\sqrt{\mathbf{A^2 + B^2}}}.$$

Модуль в формуле дает абсолютное значение расстояния. Применение формулы без модуля делит все точки плоскости на два класса – один с положительным расстоянием, другой с отрицательным. Два класса этих точек лежат по разные стороны относительно данной прямой.

3.4. Примеры решения задач

Пример 1. Через точку $\boldsymbol{M}_0(1,3)$ провести прямую под углом 45° к данной прямой $\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} = 0$.

Решение. Обозначим угловой коэффициент искомой прямой через $\boldsymbol{k}_2$, тогда данная прямая имеет угловой коэффициент $\boldsymbol{k}_1 = \frac{1}{2}$ (рис. 3.6.). Из условия задачи тангенс угла между этими прямыми $\mathbf{tg}\theta = 1$, с другой стороны,

$$\mathbf{tg}\theta = \pm\frac{\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2}{1 + \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}, \text{ т.е. } 1 = \pm\frac{\frac{1}{2} - \boldsymbol{k}_2}{1 + \frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{k}_2}.$$

Откуда следует: а) $\boldsymbol{k}_2 = 3$; б) $\boldsymbol{k}_2 = -\frac{1}{3}$.

Теперь нетрудно написать уравнения этих прямых:

а) $3\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = 0$; б) $\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} - 10 = 0$

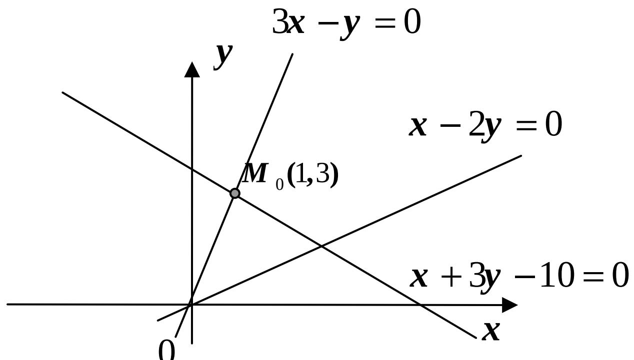


Рис. 3.6.

Пример 2. Найти уравнения биссектрис углов, образованных прямыми l_1 : **x + y - 5 = 0** и l_2 : **7 x - y - 19 = 0** . Проверить, что эти биссектрисы перпендикулярны.

Решение: По свойству биссектрисы расстояние от любой ее точки $M(x, y)$ до сторон угла равны. Найдем эти расстояния:

$$d_1 = \rho\ (M, l_1) = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}}\ ;$$

$$d_2 = \rho\ (M, l_2) = \frac{|7x-y-19|}{\sqrt{7^2+1}} = \frac{|7x-y-19|}{\sqrt{50}}.$$

Отсюда $\quad \dfrac{|x+y-5|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|7x-y-19|}{\sqrt{50}}.$

Получено уравнение, которому удовлетворяет любая точка *M(x,y)*, лежащая на искомых биссектрисах. Снимая модули, получим два уравнения искомых биссектрис:

$$x + y - 5 = \frac{1}{5}(7x - y - 19), \quad x + y - 5 = -\frac{1}{5}(7x - y - 19),$$

которые после приведения подобных примут вид соответственно:

$$x - 3y + 3 = 0, \qquad 3x + y - 11 = 0.$$

Их нормальные векторы $\vec{N}_1 = \{1,-3\}$ и $\vec{N}_2 = \{3,1\}$ взаимно перпендикулярны, так как $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 1\times3+(-3)\times1=0,$ откуда следует и перпендикулярность биссектрис.

Пример 3. В треугольнике с вершинами **A(3,-4), B(-1,-3), C(2,1**) вычислить длину высоты, проведенной из вершины *A* (рис. 3.7).

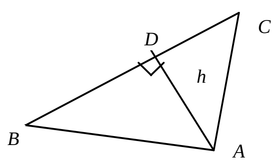


Рис. 3.7.

Решение: Сначала найдем уравнение стороны *BC* , на которую опускается высота *AD = h* из вершины *A:*

$$\frac{x-(-1)}{2-(-1)} = \frac{y-(-3)}{1-(-3)} \text{ или } \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{4}, \text{ или } 4x-3y-5=0.$$

Тогда искомая длина высоты

$$h = AD = \rho\ (A, BC) = \frac{|4\cdot3-3\cdot(-4)-5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 3{,}8\ .$$

Пример 4. Найти точку, симметричную точке *M(4,5)* относительно прямой *l* : **8x + 6y - 37 = 0** (рис. 3.8.).

Решение:

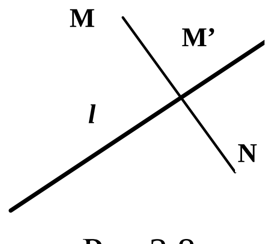


Рис.3.8.

Пусть *N* — искомая точка. Точки *M* и *N* лежат на прямой *MN* , перпендикулярной прямой *l* : **8x + 6y - 37 = 0** , и равноудалены от этой прямой, то есть **ρ(M, M')= ρ(M', N),** где *M'* — проекция точки *M* на данную прямую.

Найдем уравнение прямой *MN*. Так как угловой коэффициент данной прямой $\mathbf{k_1 = -\,{}^4/_3}$, то угловой коэффициент прямой *MN* $\mathbf{k = -\,{}^1/_{k_1} = {}^3/_4}$. Уравнение прямой *MN*:

$$\mathbf{y - 5 = {}^3/_4 \cdot (x - 4)} \quad \text{или} \quad \mathbf{3x - 4y + 8 = 0}\ .$$

Найдем координаты точки *M'* :

$$\begin{cases} \mathbf{8x + 6y - 37 = 0} \\ \mathbf{3x - 4y + 8 = 0} \end{cases} ; \qquad \mathbf{x = 2\ ;\ \ y = 3{,}5}\ .$$

Точка *M'(2 ; 3,5)* делит пополам отрезок *MN*. Из соотношений

$$\mathbf{2 = \frac{4 + x}{2}} \quad \mathbf{и} \quad \mathbf{3{,}5 = \frac{5 + y}{2}}$$

найдем координаты *x* и *y* искомой точки *N:* x =0 , y=2 и N (0, 2).

3.5. Контрольные вопросы к § 3

1. Что называется уравнением линии на плоскости? Приведите примеры уравнений линий на плоскости.
2. Что называется общим уравнением прямой на плоскости?
3. Дайте определение нормального вектора прямой. В чем состоит геометрический смысл коэффициентов *A* и *B* общего уравнения прямой?
4. Запишите в общем виде уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору.
5. Как расположена прямая по отношению к координатным осям, если один из коэффициентов в ее общем уравнении равен нулю? Приведите примеры.
6. Запишите в общем виде каноническое уравнение прямой. Каков геометрический смысл входящих в это уравнение коэффициентов?
7. Как записывается уравнение прямой, если одна из координат ее направляющего вектора равна нулю?
8. Что называется угловым коэффициентом прямой, не параллельной оси ординат? Какие значения может принимать угловой коэффициент прямой на плоскости?
9. Как выводится уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении?
10. Выведите уравнение прямой, проходящей через две точки.
11. Сформулируйте и докажите условия параллельности (перпендикулярности) прямых, заданных общими уравнениями.

12. Сформулируйте и докажите условия параллельности (перпендикулярности) прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами.
13. Дайте определение угла между двумя пересекающимися прямыми.
14. Выведите формулу для вычисления тангенса угла между прямыми, заданными уравнениями с угловыми коэффициентами.
15. По какой формуле находится расстояние от данной точки до прямой, заданной общим уравнением?
16. Какое уравнение прямой называется нормальным?

4. Плоские линии второго порядка

Напомним, что уравнение $F(x;y)=0$ задает на плоскости линию.

Определение. Линия называется ***алгебраической***, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k x^{p_k} y^{q_k} = 0,$$

где p_k, q_k - целые неотрицательные числа, и при этом все a_k не равны нулю одновременно.

Определение. Число $N = \max\limits_{k=[0;m]} \{ p_k + q_k \}$ называется ***порядком*** алгебраического уравнения. Наименьший из порядков алгебраического уравнений, задающих данную алгебраическую линию, называется порядком алгебраической линии.

Пример 1. Прямая линия $x+2y+2=0$ представляет собой линию первого порядка, квадратная парабола $y=x^2$ - линию второго порядка, а «декартов лист» $x^3+y^3-xy=0$ - линию третьего порядка.

Определение. ***Кривыми второго порядка*** называются плоские линии, определяемые в прямоугольной декартовой системе координат Oxy уравнением второй степени

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

где хотя бы один из коэффициентов $A, B, C \neq 0$.

4.1. Окружность

Определение. ***Окружностью*** называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой *центром* окружности.

Окружность радиуса R с центром в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет уравнение (рис.4.1.) $$(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{y_0})^2 = \mathbf{R}^2.$$

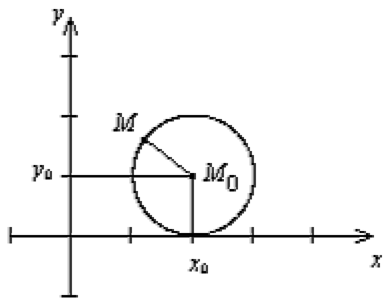


Рис. 4.1. Окружность

4.2. Эллипс

Определение. ***Эллипсом*** называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

Пусть $\mathbf{M}$ — любая точка плоскости, $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$ — заданные точки — фокусы (рис. 4.2.).

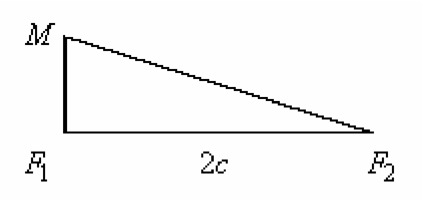


Рис. 4.2.

Определение эллипса выражается формулой $\mathbf{MF_1 + MF_2 = 2a}$.

Обозначим расстояние $\mathbf{F_1F_2 = 2c}$ $(\mathbf{c > 0})$ — *фокусное расстояние*. Тогда из треугольника $\Delta \mathbf{MF_1F_2}$ получим $\mathbf{2c < 2a} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c < a}$.

Выведем уравнение эллипса. Рассмотрим систему координат $\mathbf{Oxy}$ (рис. 4.3.).

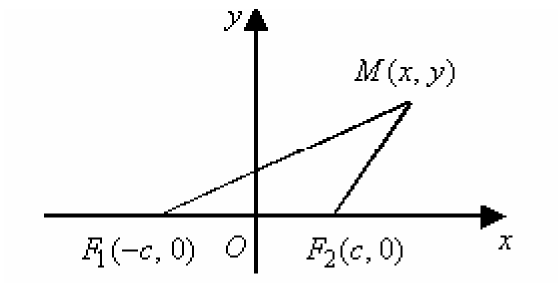


Рис.4.3.

Во введенной системе координат фокусы расположены на оси Ox и имеют координаты $\mathbf{F_1(-c,0)}$ и $\mathbf{F_2(c,0)}$. Пусть точка $\mathbf{M(x,y)}$ принадлежит эллипсу.

Тогда $\mathbf{MF_1} = \sqrt{(\mathbf{x+c})^2 + \mathbf{y}^2}$, $\mathbf{MF_2} = \sqrt{(\mathbf{x-c})^2 + \mathbf{y}^2}$,

$$\mathbf{2a} = \sqrt{(\mathbf{x+c})^2 + \mathbf{y}^2} + \sqrt{(\mathbf{x-c})^2 + \mathbf{y}^2}.$$

Перенося первый радикал из левой части в правую, и возведя в квадрат, имеем:

$$4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=(x-c)^2+y^2 \quad \text{или}$$

$$4a^2+x^2+2cx+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=x^2-2xc+c^2+y^2.$$

Приводя подобные члены, получим уравнение

$4a^2+4cx=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, обе части которого разделим почленно на 4 и снова возведем в квадрат:

$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2\left(x^2+2cx+c^2+y^2\right).$$

Последнее уравнение можно упростить, если раскрыть скобки и привести подобные члены,

$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

$$-\left(a^2-c^2\right)x^2=-a^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2.$$

Поскольку из определения эллипса следует, что $2a>2c$, то число $a^2-c^2>0$ и можно обозначить $b^2=a^2-c^2$. Тогда уравнение запишется в виде

$$-b^2x^2=-a^2b^2+a^2y^2, \qquad \text{или} \qquad a^2b^2=b^2x^2+a^2y^2.$$

Разделив это уравнение на a^2b^2, получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \ \text{где } b^2=a^2-c^2.$$

Такое уравнение эллипса называется ***каноническим.***

Исследуем форму эллипса. Если, в уравнении эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ заменить x на $(-x)$, то оно не изменится. Это означает, что если точка $M(x,y)$ принадлежит кривой, то точка $M_1(-x,y)$ также принадлежит этой кривой, то есть кривая симметрична относительно оси ординат. Эллипс симметричен и относительно оси абсцисс, потому что его уравнение не меняется при замене y на $(-y)$.

Таким образом, эллипс симметричен относительно точки O — ***центра эллипса***. Учитывая это, достаточно изучить форму эллипса только в первой четверти, то есть для $x, y\ge 0$.

При $x,y\ge 0$ из канонического уравнения можно получить уравнение кривой в явном виде, т.е. $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $(0\le x\le a)$. Из этого уравнения ясно, что кривая проходит через точки, $B(0,b)$ и $A(a,0)$. Эти точки называются ***вершинами эллипса.***

Из явного уравнения эллипса ясно, что ордината $\mathbf{y}$ при непрерывном возрастании $\mathbf{x}$ на отрезке $[\mathbf{0}, \mathbf{a}]$ монотонно убывает. Построим по явному уравнению часть эллипса в первой четверти. В остальных четвертях кривая строится с учетом симметрии относительно координатных осей. Вид кривой показан на рис. 4.4.

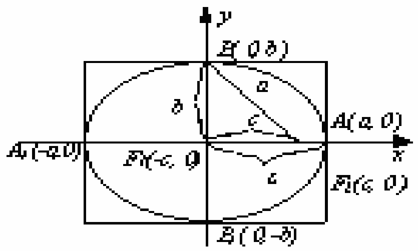


Рис.4.4.

Числа $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются ***полуосями эллипса.*** При этом $\mathbf{a}$ называется большей полуосью, а $\mathbf{b}$ - меньшей полуосью эллипса.

При $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ эллипс представляет собой окружность $\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2=\mathbf{a}^2$.

Определение. ***Эксцентриситетом эллипса*** называется число

$$\varepsilon=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}=\frac{\sqrt{\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2}}{\mathbf{a}}.$$

Поскольку из определения эллипса следует, что $\mathbf{c}>\mathbf{a}>\mathbf{0}$, то $\mathbf{0}<\varepsilon<\mathbf{1}$.

Эксцентриситет ε эллипса характеризует степень вытянутости эллипса. Чем ближе эксцентриситет к нулю, тем больше эллипс похож на окружность. Чем ближе эксцентриситет к 1, тем сильнее вытянут эллипс.

Определение. Две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса, расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{\mathbf{a}}{\varepsilon}$ от него, называются директрисами эллипса (рис. 4.5).

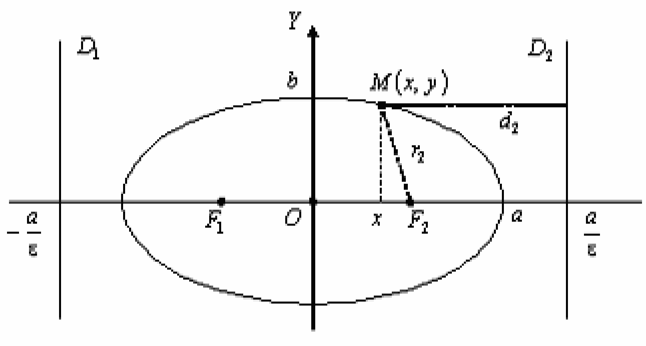


Рис. 4.5.

Свойство директрисы эллипса: Отношение расстояния от любой точки эллипса до его фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы равно эксцентриситету эллипса: $\frac{\mathbf{r}_2}{\mathbf{d}_2}=\varepsilon$ (рис.4.5.).

Замечания.

1. Уравнение эллипса с центром в точке $\mathbf{O'(x_0, y_0)}$ имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

2. Если в уравнении $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **b>a**, то большая ось и фокусы этого эллипса лежат на оси **Oy** , а малая ось — на оси **Ox** . Для такого эллипса

$F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$, $c^2 = b^2 - a^2$, $\varepsilon=\frac{c}{b}$.

На рис. 4.6. представлен эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

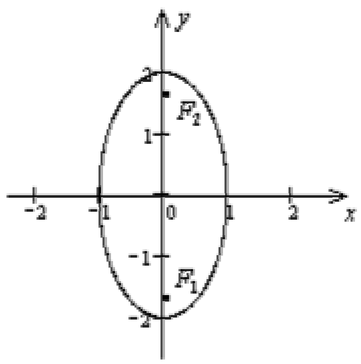


Рис. 4.6.

Рассмотрим свойства нормали к произвольной точке эллипса.

Пусть F_1 и F_2 — фокусы эллипса, M - произвольная точка на эллипсе. Тогда нормаль (перпендукуляр к касательной) к эллипсу в точке M делит угол $\mathbf{F_1MF_2}$ пополам.

Данное свойство имеет достаточно простой физический смысл. Если из одного фокуса выходит в плоскости эллипса луч света, то, отразившись от самого эллипса, он обязательно пройдет через другой фокус. Возьмем поверхность, образованную вращением эллипса вокруг большой оси, и будем считать, что внутри она зеркальная. В один из фокусов поместим источник света. Тогда все лучи, выходящие из источника, отражаясь от поверхности, пройдут через другой фокус, то есть освещенность в обоих фокусах будет одинаковой.

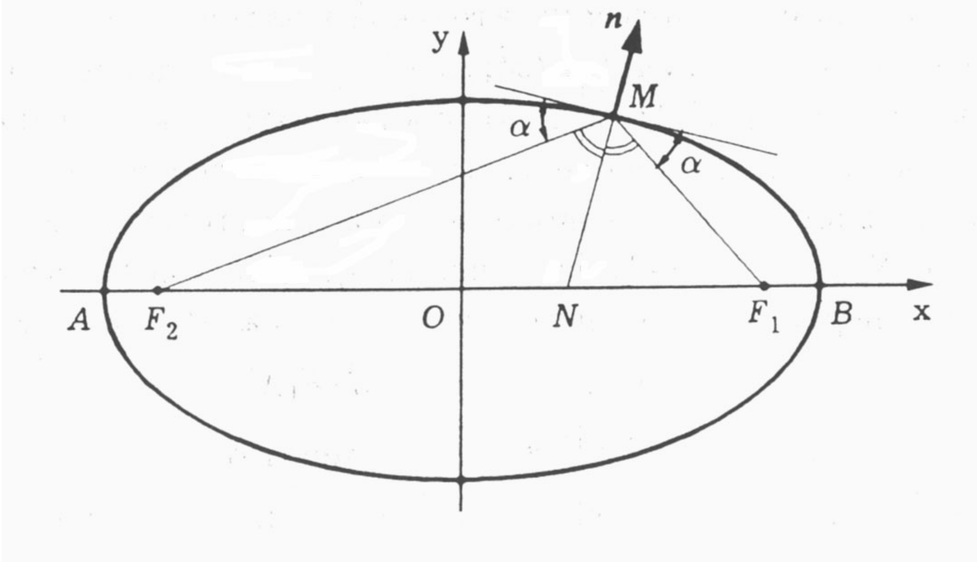


Рис. 4.7. Отражение лучей света от эллипса

Данное свойство имеет достаточно простой физический смысл. Если из одного фокуса выходит в плоскости эллипса луч света, то, отразившись от самого эллипса, он обязательно пройдет через другой фокус. Возьмем поверхность, образованную вращением эллипса вокруг большой оси, и будем считать, что внутри она зеркальная. В один из фокусов поместим источник света. Тогда все лучи, выходящие из источника, отражаясь от поверхности, пройдут через другой фокус, то есть освещенность в обоих фокусах будет одинаковой.

Пример 1. Показать, что уравнение $\mathbf{x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0}$ определяет эллипс, и построить его.

Решение: Выделим полные квадраты с x и y

$\mathbf{x^2 - 2x + 1 + 4(y^2 + 4y + 4) = -13 + 1 + 16}$ или $\mathbf{(x-1)^2+4(y+2)^2=4}$ или

$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$, то есть имеем каноническое уравнение эллипса с центром в точке $\mathbf{O_1(1,-2)}$ и полуосями $\mathbf{a=2,\ b=1}$ (рис. 4.8). Перенося начало координат в точку $\mathbf{O_1}$, (рис. 4.8.), получим в системе координат $\mathbf{XO_1Y}$ уравнение эллипса $\frac{(X)^2}{2^2} + \frac{(Y)^2}{1^2} = 1$.

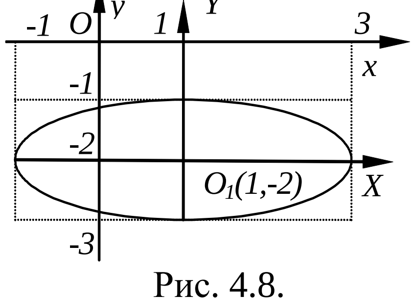


Рис. 4.8.

Пример 2. Построить кривую, заданную уравнением
$\mathbf{x^2 + 2x + 4y^2 - 24y + 12 = 0}$, приведя его к каноническому виду.

Решение. Преобразуем уравнение , выделяя полные квадраты

$$\left(x^2 + 2x\right) + 4\left(y^2 - 6y\right) = -12 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) + 4\left(y^2 - 6y + 9 - 9\right) = -12 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (x+1)^2 + 4(y-3)^2 = 25 \;\;\Big|:25 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{\frac{25}{4}} = 1.$$

Получили уравнение эллипса с центром в точке $\mathbf{O'(-1;\ 3)}$ и с полуосями $\mathbf{a = 5}$, $\mathbf{b = \frac{5}{2} = 2{,}5}$. Перенося начало координат в точку $\mathbf{O'}$, (рис. 4.9.), получим в системе координат $\mathbf{x'O'y'}$ уравнение эллипса $\dfrac{(x')^2}{5^2} + \dfrac{(y')^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = 1$.

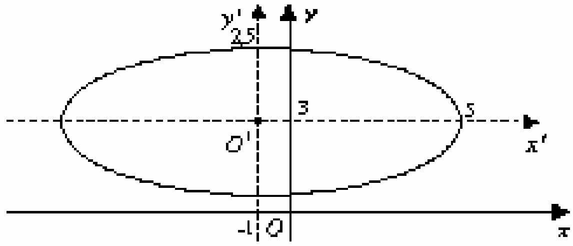


Рис.4.9.

4.3. Гипербола

Определение. ***Гиперболой*** называется множество точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний от двух заданных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

Во введенной системе координат $\mathbf{Oxy}$ (рис. 4.10.) фокусы имеют координаты $\mathbf{F_1(-c,0)}$, $\mathbf{F_2(c,0)}$.

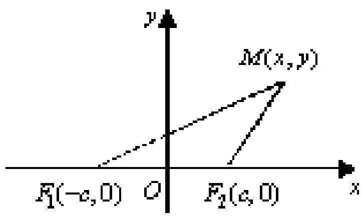


Рис. 4.10.

Если точка $\mathbf{M(x, y)}$ принадлежит гиперболе, то по ее определению $\mathbf{|F_1M - F_2M| = 2a}$, где $\mathbf{a > 0}$.

Расстояние $\mathbf{F_1F_2 = 2c}$ $(\mathbf{c > 0})$ — *фокусное расстояние.* Тогда получим $\mathbf{2a < 2c \quad\Leftrightarrow\quad a < c}$.

Подставив в равенство $|\mathbf{F_1M - F_2M}| = \mathbf{2a}$ координаты точек $M,\ F_1,\ F_2$, получим

$$\left|\sqrt{(\mathbf{x}+\mathbf{c})^2+\mathbf{y}^2}-\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{c})^2+\mathbf{y}^2}\right| = \mathbf{2a} \quad \text{или} \quad \sqrt{(\mathbf{x}+\mathbf{c})^2+\mathbf{y}^2} = \sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{c})^2+\mathbf{y}^2} \pm \mathbf{2a}.$$

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат

$$(\mathbf{x}+\mathbf{c})^2+\mathbf{y}^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{c})^2+\mathbf{y}^2 \pm \mathbf{4a}\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{c})^2+\mathbf{y}^2}$$

и упростим его, раскрыв все квадраты

$$\mathbf{x}^2+\mathbf{2cx}+\mathbf{c}^2+\mathbf{y}^2 = \mathbf{x}^2-\mathbf{2cx}+\mathbf{c}^2+\mathbf{y}^2 \pm \mathbf{4a}\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{c})^2+\mathbf{y}^2}$$

приведя подобные члены, получим

$$\mathbf{4cx}-\mathbf{4a}^2 = \pm\mathbf{4a}\sqrt{(\mathbf{x}+\mathbf{c})^2+\mathbf{y}^2}\ .$$

Последнее уравнение разделим на 4 и снова возведем в квадрат

$$\mathbf{c}^2\mathbf{x}^2-\mathbf{4cxa}^2+\mathbf{a}^4 = \mathbf{a}^2\left(\mathbf{x}^2+\mathbf{2cx}+\mathbf{c}^2+\mathbf{y}^2\right).$$

Раскрыв скобки и проведя упрощения, получим уравнение

$\left(\mathbf{c}^2-\mathbf{a}^2\right)\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2\mathbf{y}^2 = \mathbf{a}^2\left(\mathbf{c}^2-\mathbf{a}^2\right)$, в котором $\mathbf{c}^2-\mathbf{a}^2>\mathbf{0}$, поскольку $\mathbf{c}>\mathbf{a}$.

Из этого следует, что можно ввести обозначение $\mathbf{b}^2=\mathbf{c}^2-\mathbf{a}^2$ и записать уравнение гиперболы в виде $\mathbf{b}^2\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2\mathbf{y}^2=\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$. Разделив на $\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$, получим уравнение гиперболы

$$\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}=\mathbf{1}, \quad \text{где } \mathbf{b}^2=\mathbf{c}^2-\mathbf{a}^2.$$

Такое уравнение гиперболы называется ***каноническим.***

Исследуем форму гиперболы на плоскости.

Из вида уравнения ясно, что гипербола симметрична относительно оси $\mathbf{Ox}$ и оси $\mathbf{Oy}$.

При $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ получим уравнение $-\dfrac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}=\mathbf{1}$, которое не имеет вещественных корней. Следовательно, кривая не пересекает ось $\mathbf{Oy}$.

При $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ получим уравнение $\dfrac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}=\mathbf{1}$, корни которого $\mathbf{x}=\pm\mathbf{a}$. Следовательно, кривая пересекает ось $\mathbf{Ox}$ в точках $\mathbf{A_1}(-\mathbf{a},\mathbf{0})$ и $\mathbf{A_2}(\mathbf{a},\mathbf{0})$. Эти точки называются *вершинами гиперболы*.

Числа $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *полуосями гиперболы*, при этом $\mathbf{a}$ — *действительной полуосью*, а $\mathbf{b}$ — *мнимой полуосью*.

Для части гиперболы, находящейся в первой четверти, явное уравнение имеет вид

$$\mathbf{y}=\tfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2}\ ,\ (\mathbf{a}\le\mathbf{x}<\infty),$$

из которого видно, что $\mathbf{y}$ принимает вещественные значения при $|\mathbf{x}|\ge\mathbf{a}$. Следовательно, нет точек кривой, расположенных в полосе $|\mathbf{x}|\le\mathbf{a}$.

Преобразуем явное уравнение гиперболы:

$$\mathbf{y}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\left(\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2}+\mathbf{x}-\mathbf{x}\right)=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\mathbf{x}+\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\left(\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2}-\mathbf{x}\right)=$$

$$=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\mathbf{x}+\frac{\mathbf{b}\cdot\left(\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2}-\mathbf{x}\right)\left(\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2}+\mathbf{x}\right)}{\mathbf{a}\cdot\left(\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2}+\mathbf{x}\right)}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\mathbf{x}+\frac{\mathbf{b}\cdot\left(\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2-\mathbf{x}^2\right)}{\mathbf{a}\cdot\left(\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2}+\mathbf{x}\right)}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \mathbf{y}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\mathbf{x}-\frac{\mathbf{ab}}{\left(\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2}+\mathbf{x}\right)}.$$

Прямоугольник $\mathbf{A_1B_1A_2B_2}$ с центром в точке $\mathbf{O}$ и сторонами $\mathbf{A_1A_2=2a}$ и $\mathbf{B_1B_2=2b}$ называют ***осевым прямоугольником*** гиперболы.

Построим диагонали осевого прямоугольника $\mathbf{A_1B_1A_2B_2}$ (рис. 4.11.). Их уравнения $\mathbf{y_1}=\pm\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\mathbf{x}$. Найдем расстояние между точкой $\mathbf{M}$ гиперболы и точкой $\mathbf{N}$ диагонали, лежащие в первой четверти.

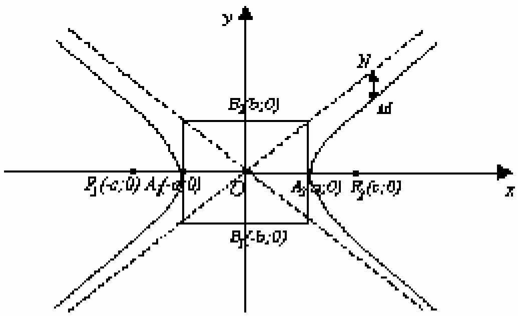


Рис. 4.11.

$$\mathbf{MN}=\left|\mathbf{y}-\mathbf{y_1}\right|=\left|\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\mathbf{x}-\frac{\mathbf{ab}}{\left(\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2}+\mathbf{x}\right)}-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\mathbf{x}\right|=\frac{\mathbf{ab}}{\left(\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2}+\mathbf{x}\right)}$$

Последняя дробь стремится к нулю при $\mathbf{x}\to\infty$, т.е. $\mathbf{MN}\underset{\mathbf{x}\to\infty}{\longrightarrow}\mathbf{0}$. Следовательно, гипербола приближается к диагоналям. Прямые $\mathbf{y}=\pm\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\mathbf{x}$ называются *асимптотами* гиперболы.

Определение. ***Эксцентриситетом гиперболы*** называется число $\varepsilon=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}=\frac{\sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2}}{\mathbf{a}}$, где $\mathbf{a}$ - действительная полуось.

Так как у гиперболы $\mathbf{c}>\mathbf{a}$, то эксцентриситет гиперболы $\varepsilon>\mathbf{1}$.

Определение. ***Директрисами*** гиперболы называются прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и отстоящие от центра гиперболы на расстояние $\pm\frac{\mathbf{a}}{\varepsilon}$.

Директрисы гиперболы, расположенные симметрично между центром и вершинами гиперболы (т.к. эксцентриситет $\varepsilon > 1$ и $\frac{a}{\varepsilon} < a$), показаны на рис. 4.12.

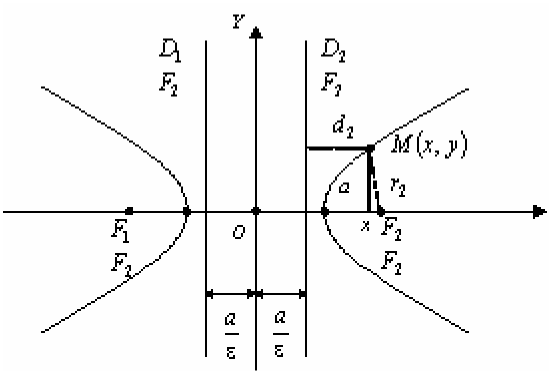
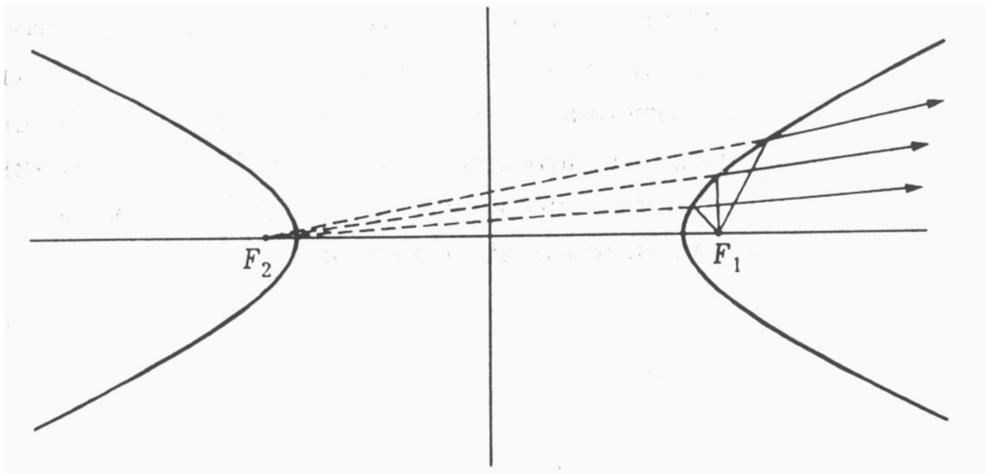


Рис.4.12.

Свойство директрисы гиперболы: Отношение расстояния от любой точки гиперболы до его фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы равно эксцентриситету эллипса: $\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$ (рис.4.12.).

Оптическое свойство гиперболы: касательная в любой точке гиперболы образует с фокальными радиусами точки касания равные углы. (Изображение точечного источника света, расположенного в одном из фокусов, есть мнимое и находится в другом фокусе гиперболы.)



Замечания.

1. Уравнение гиперболы с центром в точке $O'(x_0, y_0)$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

2. Уравнение гиперболы, ветви которой направлены вдоль оси Oy, имеет вид:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

Такая гипербола называется ***сопряженной***.

Пример. Построить кривую, заданную уравнением $y^2-x^2=4$.

Решение. Разделив каждое слагаемое заданного уравнения на 4, запишем его в виде $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$. Это уравнение задает на плоскости гиперболу с полуосями $a=b=2$. Гипербола с равными полуосями называется *равнобочной*, ее асимптотами являются биссектрисы координатных углов $y=\pm x$.

При $y=0$ получим уравнение $-\frac{x^2}{4}=1$, не имеющее вещественных корней, то есть гипербола не пересекает ось Ox.

При $x=0$, получим уравнение $\frac{y^2}{4}=1$, имеющее корни $y=\pm 2$. Следовательно, вершины гиперболы $A_1(0,-2)$, $A_2(0,2)$ лежат на оси Oy.

Фокусы гиперболы расположены на той же оси, на которой находятся ее вершины. Из того, что $c^2=a^2+b^2=8$ и $c=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, следует, что координаты фокусов равны, соответственно, $F_1(0,-2\sqrt{2})$, $F_2(0,2\sqrt{2})$. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2}$.

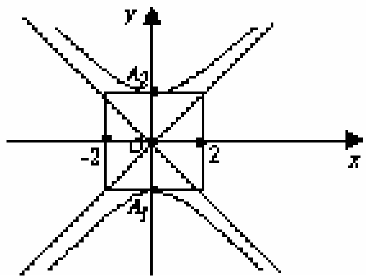


Рис.4.13.

Строить гиперболу советуем следующим образом (рис. 4.13.):

1. Отметить на координатных осях полуоси гиперболы 2 и -2.
2. Провести через эти точки прямые, параллельные осям
3. Провести диагонали полученного прямоугольника. Эти диагонали являются асимптотами гиперболы.
4. Построить гиперболу, проводя ее через вершины A_1 и A_2так, чтобы ветви приближались к асимптотам при $x\to\pm\infty$.

4.4. Парабола

Определение. *Параболой* называется множество точек плоскости, равноудаленных от некоторой точки, называемой *фокусом*, и прямой, называемой *директрисой*.

Пусть точка $\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — точка параболы (рис. 4.14.), точка $\mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{p}}{2},\mathbf{0}\right)$ — фокус параболы, а прямая $\mathbf{l}$ — ее директриса. Пусть также задано расстояние между ними, равное $\mathbf{p}$ (т.е. $\mathbf{DF}=\mathbf{p}>\mathbf{0}$), ось $\mathbf{Oy}$ - посередине $\mathbf{DF}$, то определение параболы имеет вид $\mathbf{MP}=\mathbf{MF}$.

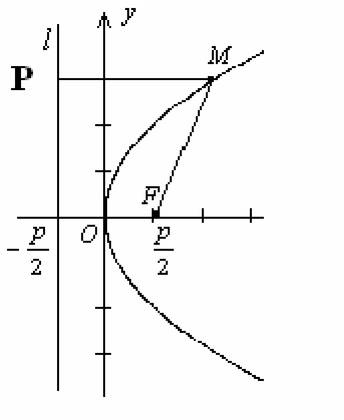


Рис. 4.14.

Найдем расстояния $\mathbf{MP}$ и $\mathbf{MF}$.

Поскольку $\mathbf{MP}=\mathbf{x}+\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{2}}$ и $\mathbf{MF}=\sqrt{\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}}\right)^{2}+\mathbf{y}^{2}}$,

то получим равенство $\mathbf{x}+\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{2}}=\sqrt{\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}}\right)^{2}+\mathbf{y}^{2}}$.

Возводя обе части в квадрат и приводя подобные члены будем иметь уравнение параболы

$$\mathbf{y}^{2}=\mathbf{2px}.$$

Такое уравнение параболы называется ***каноническим.***

Исследуем форму параболы.

Из уравнения параболы видно, что кривая симметрична относительно оси $\mathbf{Ox}$ и проходит через начало координат. Для ее ветви в верхней полуплоскости, при $\mathbf{y}\geq\mathbf{0}$, явное относительно $\mathbf{y}$ уравнение имеет вид

$$\mathbf{y}=\sqrt{\mathbf{2px}} \quad (\mathbf{0}\leq\mathbf{x}<\infty),$$

из которого видно, что когда $\mathbf{x}$ возрастает на полуинтервале $[\mathbf{0},+\infty)$, ордината $\mathbf{y}$ возрастает от $\mathbf{0}$ до $+\infty$.

При $\mathbf{y}\leq\mathbf{0}$ ветвь гиперболы симметрична относительно оси $\mathbf{Ox}$.

Парабола не имеет асимптот. Эксцентриситет параболы равен $\mathbf{1}$.

Замечание. Уравнение параболы с вершиной в точке $\mathbf{O}'(\mathbf{x_0},\mathbf{y_0})$

$(\mathbf{y}-\mathbf{y_0})^{2}=\pm\mathbf{2p}(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})$, ось симметрии параллельна Ox.

$(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})^{2}=\pm\mathbf{2p}(\mathbf{y}-\mathbf{y_0})$, ось симметрии параллельна Oy.

Знак $\pm$ показывает направление ветвей параболы. Если в уравнении знак $+$, то направление ветвей совпадает с направлением оси, которой параллельна ось симметрии параболы. Если в уравнении знак — , то направление ветвей противоположно направлению оси, которой параллельна ось симметрии параболы.

Установим оптические свойства параболы.

Пусть **F** - фокус параболы, **M** - произвольная точка параболы, ***l*** - луч с началом в точке **M** параллельный оси параболы. Тогда нормаль к параболе в точке **M** делит угол, образованный отрезком **FM** и лучом ***l***, пополам.

Это свойство означает, что луч света, вышедший из фокуса **F**, отразившись от параболы, дальше пойдет параллельно оси этой параболы. И наоборот, все лучи, приходящие из бесконечности и параллельные оси параболы, сойдутся в ее фокусе. Это свойство широко используется в технике. В прожекторах обычно ставят зеркало, поверхность которого получается при вращении параболы вокруг ее оси симметрии (параболическое зеркало). Источник света в прожекторах помещают в фокусе параболы. В результате прожектор дает пучок почти параллельных лучей света (рис.4.15.). Это же свойство используется и в приемных антеннах космической связи и в зеркалах телескопов, которые собирают поток параллельных лучей радиоволн или поток параллельных лучей света и концентрируют его в фокусе зеркала.

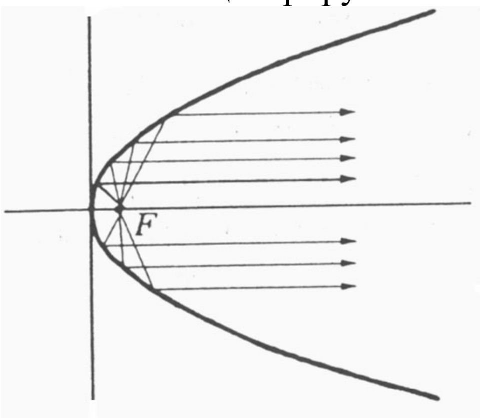


Рис.4.15.

Пример. Построить кривую, заданную уравнением $\mathbf{x^2+2x+6y-2=0}$, приведя его к каноническому виду.

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом

$$\left(\mathbf{x^2+2x}\right)=\mathbf{-6y+2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathbf{x^2+2x+1}\right)=\mathbf{-6y+2+1} \quad \Leftrightarrow$$

Получили уравнение параболы с вершиной в точке $\mathbf{O'(-1;\ 0{,}5)}$ (рис. 4.16.) и с осью симметрии, параллельной оси $\mathbf{Oy}$.

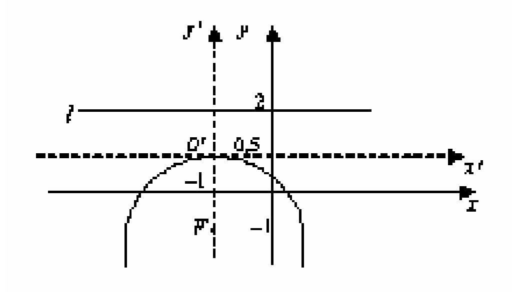


Рис. 4.16.

Перенося начало координат в точку $\mathbf{O'}$, получим в системе координат $\mathbf{x'O'y'}$ уравнение

$$(\mathbf{x'})^2 = -6(\mathbf{y'}),$$

где параметр $\mathbf{p}$ определяется из условия $\mathbf{2p = 6}$ или $\mathbf{p = 3}$.

Парабола симметрична относительно оси $\mathbf{O'y'}$ или относительно прямой $\mathbf{x = -1}$. Фокус параболы находится на ее оси и отстоит от вершины на $\frac{\mathbf{p}}{2}$. Поскольку из уравнения следует, что $\mathbf{y' \le 0}$, то ветви параболы направлены вниз и фокус $\mathbf{F}$ лежит на $\frac{\mathbf{p}}{2} = \mathbf{1{,}5}$ ниже вершины, то есть его координаты $\mathbf{F(-1;-1)}$.

Директрисой $\mathbf{l}$ параболы является прямая, перпендикулярная ее оси и находящаяся на расстоянии $\frac{\mathbf{p}}{2} = \mathbf{1{,}5}$ от вершины, причем фокус и директриса расположены по разные стороны от вершины. Учитывая все это, можно записать уравнение директрисы $\mathbf{y = 0{,}5 + 1{,}5}$, или $\mathbf{y = 2}$.

4.5. Примеры решение задач

Пример 1. Дан эллипс с большой полуосью $\mathbf{a = 2}$ и эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{3}{8}$. Найти уравнение эллипса, повернутого на угол $\frac{\pi}{2}$, с такой же большой полуосью и эксцентриситетом $\mathbf{2\varepsilon}$. Вычислить координаты точек пересечения этих эллипсов.

Решение.

Вычислим геометрические характеристики заданного (первого) эллипса. По условию большая полуось этого эллипса равна $\mathbf{a_1 = a = 2}$. Из определения эксцентриситета эллипса получим величину фокусного расстояния:

$$\mathbf{c_1} = \varepsilon \mathbf{a_1} = \frac{3}{4}.$$

Величина малой полуоси этого эллипса:

$$\mathbf{b_1} = \sqrt{\mathbf{a_1}^2 - \mathbf{c_1}^2} = \sqrt{\mathbf{a}^2 - (\varepsilon \mathbf{a})^2} = \mathbf{a}\sqrt{1 - \varepsilon^2} = 2\sqrt{1 - \frac{9}{64}} = \frac{1}{4}\sqrt{55} \approx \mathbf{1{,}85}.$$

Второй эллипс вытянут по вертикали и по условию имеет большую полуось $\mathbf{b_2} = \mathbf{a} = \mathbf{2}$. Его фокусное расстояние равно

$$\mathbf{c_2} = 2\varepsilon \mathbf{b_2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},$$

а малая полуось

$$\mathbf{a_2} = \sqrt{\mathbf{b_2}^2 - \mathbf{c_2}^2} = \sqrt{\mathbf{a}^2 - (2\varepsilon \mathbf{a})^2} = \mathbf{a}\sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{4}\varepsilon^2} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{16}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{7}} \approx \mathbf{1{,}32}.$$

Таким образом, канонические уравнения первого и второго эллипса имеют, соответственно, вид:

$$\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{55/16}} = \mathbf{1} \quad \text{и} \quad \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{7/4}} + \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{4}} = \mathbf{1}.$$

Вычислим координаты точки $\mathbf{M}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$ пересечения этих эллипсов, расположенной в первом квадранте (координаты трех других точек пересечения легко получаются симметричным отражением относительно осей координат). Для этого воспользуемся уравнениями, описывающими верхние половины первого и второго эллипсов:

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{b_1}}{\mathbf{a_1}}\sqrt{\mathbf{a_1}^2 - \mathbf{x}^2} \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{b_2}}{\mathbf{a_2}}\sqrt{\mathbf{a_2}^2 - \mathbf{x}^2}.$$

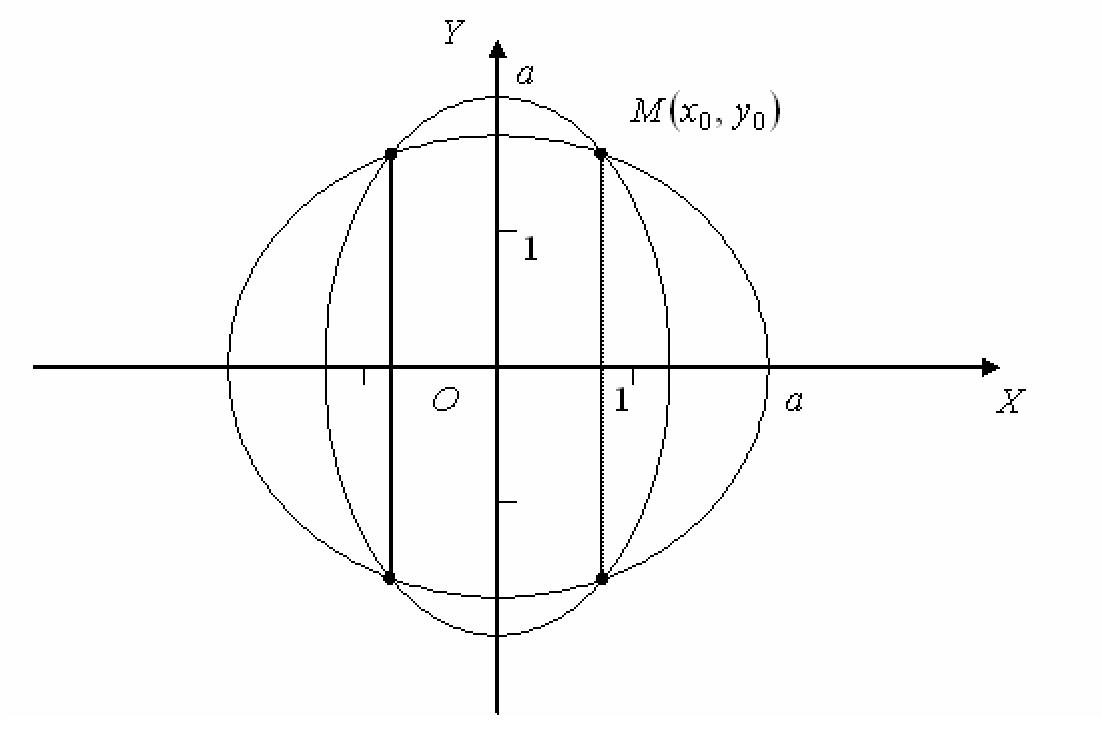


Рис. 4.17.

Приравняв квадраты правых частей этих уравнений, получим:

$$\left(\frac{\mathbf{b_2}^2}{\mathbf{a_2}^2} - \frac{\mathbf{b_1}^2}{\mathbf{a_1}^2}\right)\mathbf{x}^2 = \mathbf{b_2}^2 - \mathbf{b_1}^2.$$

Отсюда найдем два значения $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \pm \mathbf{a_1 a_2} \sqrt{\frac{\mathbf{b_2}^2 - \mathbf{b_1}^2}{\mathbf{b_2}^2 \mathbf{a_1}^2 - \mathbf{b_1}^2 \mathbf{a_2}^2}} = \pm 2\sqrt{\frac{7}{71}} \approx \pm \mathbf{0{,}63},$$

соответствующих координатам точек пересечения эллипсов в правой и левой полуплоскостях ($x > 0$ и $x < 0$).

Из уравнения для верхней половины первого эллипса найдем

$$\mathbf{y} = \frac{\sqrt{55}}{2 \cdot 4}\sqrt{4 - 4 \cdot \frac{7}{71}} = \frac{\sqrt{55}}{4}\sqrt{\frac{64}{71}} = 2\sqrt{\frac{55}{71}} \approx \pm \mathbf{1{,}76}.$$

Пример 2. Дана гипербола с каноническим уравнением $\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2} - \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} = \mathbf{1}$, $\mathbf{a} > \mathbf{b}$. Найти уравнение эллипса, касающегося вершин этой гиперболы и имеющего эксцентриситет $\varepsilon_Э$, обратный эксцентриситету гиперболы $\varepsilon_Г$: $\varepsilon_Э = \frac{1}{\varepsilon_Г}$. Найти расстояние между соответствующими директрисами этого эллипса и гиперболы.

Решение.

Эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon_Г = \frac{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}}{\mathbf{a}}$.

По условию задачи большая полуось эллипса $\mathbf{a}_Э = \mathbf{a}$, а его эксцентриситет равен $\varepsilon_Э = \frac{1}{\varepsilon_Г} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}}$.

Эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon_Э = \frac{\sqrt{\mathbf{a}_Э{}^2 - \mathbf{b}_Э{}^2}}{\mathbf{a}_Э}$.

Приравняв квадраты правых частей этих двух равенств, найдем второй параметр канонического уравнения — малую полуось эллипса:

$$\mathbf{b}_Э = \frac{\mathbf{ab}}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}}.$$

Непосредственно из рис. 4.18 видно, что расстояние между соответствующими (находящимися в одной полуплоскости) директрисами гиперболы и эллипса равно:

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{a}}{\varepsilon_Э} - \frac{\mathbf{a}}{\varepsilon_Г} = \mathbf{a}\left(\varepsilon_Г - \frac{1}{\varepsilon_Г}\right) = \frac{\mathbf{a}}{\varepsilon_Г}\left(\varepsilon_Г{}^2 - \mathbf{1}\right) = \frac{\mathbf{a}}{\varepsilon_Г}\left(\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{\mathbf{a}^2} - \mathbf{1}\right) = \frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}\varepsilon_Г} = \frac{\mathbf{b}^2}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}}.$$

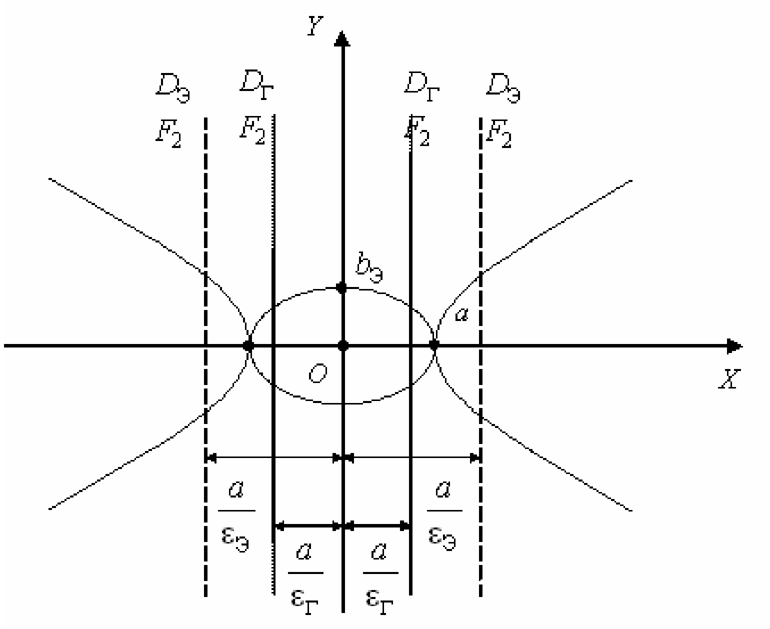


Рис.4.18.

4.6. Контрольные вопросы к § 4

1. Что называется кривой второго порядка?
2. Выведите уравнение окружности радиуса **R** с центром в точке **(a, b).**
3. Дайте определение эллипса, гиперболы, параболы.
4. Выведите каноническое уравнение эллипса, гиперболы, параболы.
5. Покажите, что окружность является частным случаем эллипса.
6. Что называется вершинами эллипса? Каковы их координаты?
7. Что называется большой и малой осями (полуосями) эллипса?
8. Дайте определение фокусов эллипса.
9. Что называется эксцентриситетом эллипса и гиперболы? Как он характеризует форму эллипса и гиперболы?
10. Что называется директрисами эллипса и гиперболы. Каковы их свойства.
11. Какие прямые называются асимптотами гиперболы?
12. Дайте определение равносторонней гиперболы.
13. Что называется параметром параболы? Как, зная параметр параболы, определить ее фокус и директрису?
14. Как характеризует форму параболы ее параметр?
15. Чем отличаются эксцентриситеты эллипса, гиперболы и параболы?
16. Какие примеры использования кривых второго порядка Вы знаете?

5. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду

5.1. Преобразование систем координат

Сдвиг системы координат

Сдвигом системы координат называется преобразование, при котором ее начало переносится в другую точку с сохранением направления осей исходной системы координат.

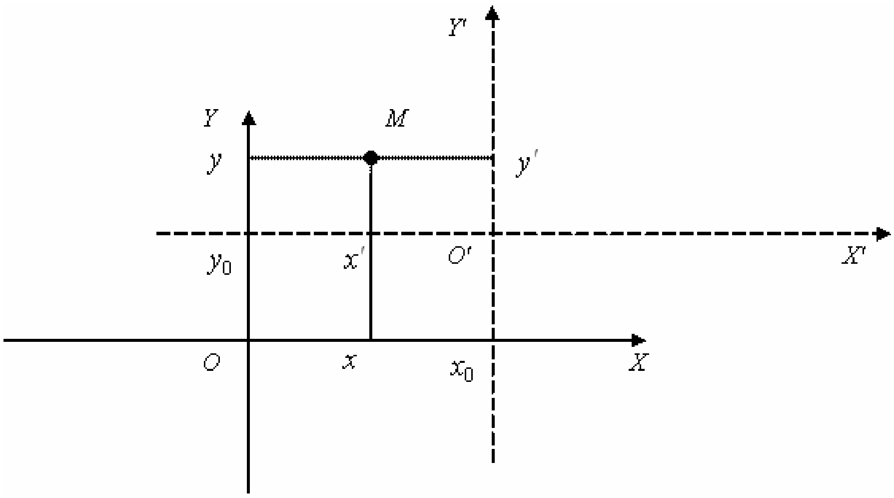


Рис. 5.1.

На рис. 5.1. показана исходная система координат $\mathbf{K = OXY}$ и система координат $\mathbf{K' = O'X'Y'}$, полученная из системы $\mathbf{K}$ путем переноса ее начала координат $\mathbf{O}$ в точку $\mathbf{O'}$ с координатами $(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$. Точка $\mathbf{M}$ в системе $\mathbf{K}$ имеет координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, а в системе $\mathbf{K'}$ — $(\mathbf{x'}, \mathbf{y'})$. На рис. 5.1. непосредственно видно, что эти координаты связаны соотношениями

$$\text{а) } \begin{cases} \mathbf{x' = x - x_0} \\ \mathbf{y' = y - y_0} \end{cases}, \qquad \text{б) } \begin{cases} \mathbf{x = x' + x_0} \\ \mathbf{y = y' + y_0} \end{cases}.$$

Эти взаимно обратные соотношения и описывают ***преобразование сдвига системы координат***: формулы (а) выражают координаты точки $\mathbf{M}$ в системе $\mathbf{K'}$, сдвинутой относительно системы $\mathbf{K}$ в точку $(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$, тогда как формулы (б) — координаты точки $\mathbf{M}$ в системе $\mathbf{K}$, сдвинутой относительно системы $\mathbf{K'}$ в точку $(-\mathbf{x_0}, -\mathbf{y_0})$.

Поворот системы координат

Поворотом системы координат называется преобразование $\mathbf{K} \to \mathbf{K'}$, при котором оси исходной системы $\mathbf{K}$ поворачиваются вокруг начала координат на некоторый угол φ. Угол поворота отсчитывается от оси $\mathbf{OX}$ в направлении против часовой стрелки.

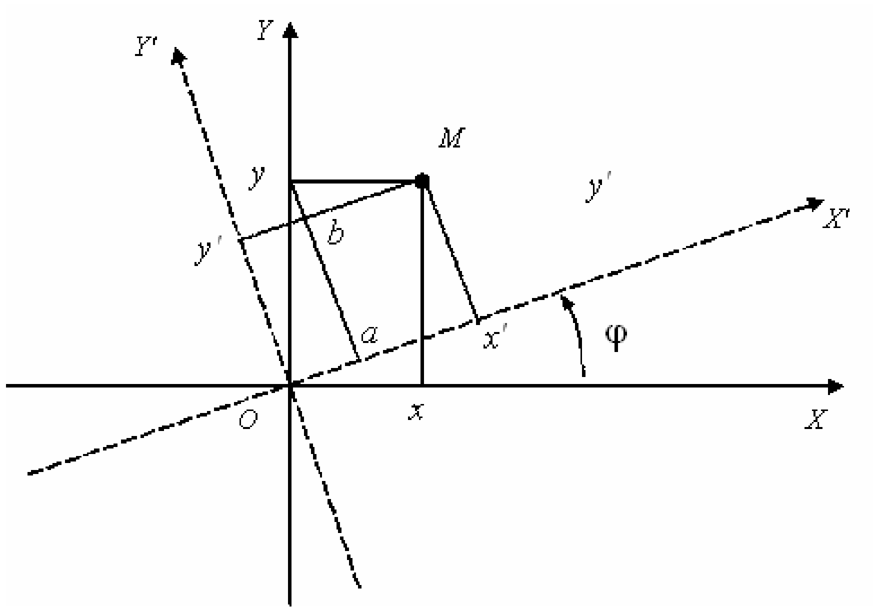


Рис. 5.2.

На рис. 5.2. видно, что координата $\mathbf{x'}$ точки $\mathbf{M}$ в повернутой системе $\mathbf{K'}$ дается суммой отрезков $\overline{\mathbf{Oa}}$ и $\overline{\mathbf{ax'}}$. Из треугольников $\Delta\mathbf{Oay}$ и $\Delta\mathbf{bMy}$ имеем

$$\overline{\mathbf{Oa}} = \mathbf{Oy} \cdot \sin\varphi = \mathbf{y}\sin\varphi, \qquad \overline{\mathbf{ax'}} = \mathbf{My} \cdot \cos\varphi = \mathbf{x}\cos\varphi.$$

Аналогично, $\mathbf{y'}$ дается разностью отрезков $\overline{\mathbf{ay}}$ и $\overline{\mathbf{by}}$, причем

$$\overline{\mathbf{ay}} = \mathbf{Oy} \cdot \cos\varphi = \mathbf{y}\cos\varphi, \qquad \overline{\mathbf{by}} = \mathbf{My} \cdot \sin\varphi = \mathbf{x}\sin\varphi.$$

Таким образом, координаты точки $\mathbf{M}$ в системе $\mathbf{K'}$, повернутой относительно системы $\mathbf{K}$ на угол φ, даются соотношениями

$$\begin{cases} \mathbf{x'} = \mathbf{x}\cos\varphi + \mathbf{y}\sin\varphi \\ \mathbf{y'} = -\mathbf{x}\sin\varphi + \mathbf{y}\cos\varphi \end{cases} \qquad \text{(а)}$$

Эти формулы описывают преобразование поворота системы координат $\mathbf{K} \to \mathbf{K'}$ на угол φ. Обратное преобразование $\mathbf{K'} \to \mathbf{K}$ представляет собой поворот системы $\mathbf{K'}$ в противоположном направлении на тот же угол, т.е. на угол $-\varphi$ и описывается формулами

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x'}\cos\varphi - \mathbf{y'}\sin\varphi \\ \mathbf{y} = \mathbf{x'}\sin\varphi + \mathbf{y'}\cos\varphi \end{cases}. \qquad \text{(б)}$$

5.2. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду.

Лемма 1.: Любое уравнение линии второго порядка

$$\mathbf{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0},$$

путем поворота на некоторый угол может быть приведено к уравнению, в котором не будет содержаться слагаемое $\mathbf{2Bxy}$. При этом угол поворота определяется из соотношения:

$$\mathbf{ctg2\varphi = \frac{A - C}{2B}}$$

Без доказательства.

Лемма 2.: Любое уравнение линии второго порядка

$$\mathbf{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$$

путем параллельного переноса может быть приведено к уравнению, в котором не будет содержаться слагаемые $\mathbf{2Dx}$ и $\mathbf{2Ey}$.

Доказательство. Величины сдвига параллельного переноса по осям **Ox** и **Oy** определяется выделением полного квадрата из выражений $\mathbf{Ax^2 + 2Dx}$ и $\mathbf{Cy^2 + 2Ey}$, приведенного с помощью поворота декартовой системы координат (т. е. без слагаемого $\mathbf{2Bxy}$) уравнения линии второго порядка:

$$\mathbf{Ax^2 + 2Dx = A\left(x^2 + 2\frac{D}{A}x + \left(\frac{D}{A}\right)^2 - \left(\frac{D}{A}\right)^2\right) = A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 - \frac{D^2}{A}} \quad \text{и}$$

$$\mathbf{Cy^2 + 2Ey = C\left(y^2 + 2\frac{E}{C}y + \left(\frac{E}{C}\right)^2 - \left(\frac{E}{C}\right)^2\right) = C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 - \frac{E^2}{C}}.$$

И, следовательно:

$$\mathbf{\begin{cases} x' = x + \frac{D}{A} \\ y' = y + \frac{E}{C} \end{cases}}.$$

Лемма 3.: Любое уравнение линии второго порядка

$$\mathbf{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$$

путем параллельного переноса и поворота может быть приведено к одному из девяти канонических уравнений:

1) $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ - эллипс,

2) $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ - гипербола,

3) $\mathbf{y^2 = 2px}$ - парабола,

4) $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1}$ - мнимый эллипс,

5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ - пара мнимых пересекающихся прямых,

6) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ - пара действительных пересекающихся прямых,

7) $x^2-a^2=0$ - пара действительных параллельных прямых,

8) $x^2+a^2=0$ - пара мнимых параллельных прямых,

9) $x^2=0$ - пара совпадающих действительных прямых.

Пример 1. Привести к каноническому виду кривую $x^2 + 2y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$

Решение. Выделим полные квадраты по переменным x и y :

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 + 2(y^2 - 2y + 1) - 2 - 1 = 0.$$

Откуда

$$(x + 1)^2 + 2(y - 1)^2 = 4 \quad \text{или} \quad \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{2}=1 \text{ - эллипс.}$$

Введем новую систему координат с началом в точке $O_1(-1; 1)$, получающуюся из старой параллельным переносом. В новой системе координат эллипс задается уравнением $\frac{\tilde{x}^2}{4}+\frac{\tilde{y}^2}{2}=1$, а это — каноническое уравнение эллипса с полуосями 2 и $\sqrt{2}$ (рис. 5.3.).

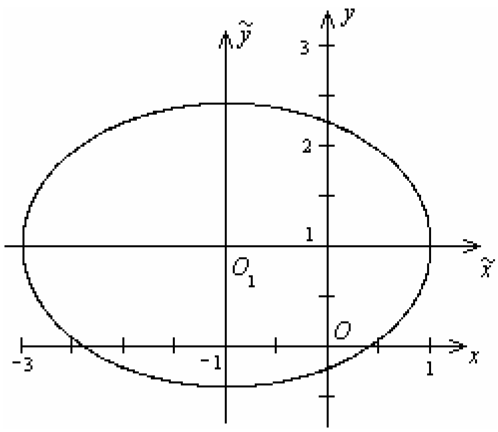


Рис. 5.3.

Пример 2. Привести к каноническому виду кривую $xy = 2$.

Решение. Так как $A = C = 0$, то $\text{ctg}\ 2\varphi = 0$, откуда $\varphi = 45^o$. Тогда формулы перехода имеют вид:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}.$$

Подставляя в данное по условию уравнение, имеем:

$\dfrac{(x' - y')(x' + y')}{2} = 2$ или $\dfrac{x'^2}{4} - \dfrac{y'^2}{4} = 1 -$ равносторонняя гипербола, асимптотами которой являются оси **OX** и **OY** (рис. 5.4.).

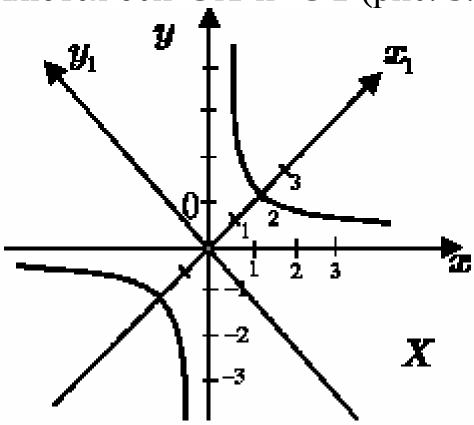


Рис. 5.4.

Пример 3. Привести к каноническому виду уравнение

$$3x^2 + 4xy + 3y^2 + 8x + 12y + 1 = 0.$$

Решение.

Избавляемся от слагаемого со смешанным произведением переменных. Для этого вычисляем угол поворота:

$$ctg2\varphi = \frac{3-3}{4} = 0,\ 2\varphi = 90°,\ \varphi = 45°.$$

Следовательно, формулы для замены координат будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x = x'\cos 45° - y'\sin 45° = x'\dfrac{\sqrt{2}}{2} - y'\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = x'\sin 45° + y'\cos 45° = x'\dfrac{\sqrt{2}}{2} + y'\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Подставляем в уравнение вместо **x** и **y**, и приводим подобные слагаемые:

$$\frac{3}{2}(x'-y')^2+\frac{4}{2}(x'-y')(x'+y')+\frac{3}{2}(x'+y')^2+4\sqrt{2}(x'-y')+6\sqrt{2}(x'+y')+1=0$$

$$\frac{3}{2}x'^2-3x'y'+\frac{3}{2}y'^2+2x'^2-2y'^2+\frac{3}{2}x'^2+3x'y'+\frac{3}{2}y'^2+$$

$$4\sqrt{2}x'-4\sqrt{2}y'+6\sqrt{2}x'+6\sqrt{2}y'+1=0$$

$$5x'^2+y'^2+10\sqrt{2}x'+2\sqrt{2}y'+1=0$$

Теперь необходимо избавиться от линейных слагаемых, для этого выделяем полный квадрат:

$$5x'^2+10\sqrt{2}x'=5(x'^2+2\sqrt{2}x'+2-2)=5(x'+\sqrt{2})^2-10$$

$$y'^2+2\sqrt{2}y'=y'^2+2\sqrt{2}y'+2-2=(y'+\sqrt{2})^2-2$$

И, следовательно, имеем:

$$5(x'+\sqrt{2})^2-10+(y'+\sqrt{2})^2-2+1=0$$

Из этого уравнения получаем величины сдвигов для параллельного переноса.

$$\begin{cases} x''=x'+\sqrt{2} \\ y''=y'+\sqrt{2} \end{cases}.$$

Окончательно получаем:

$$5x''^2+y''^2=11$$

Приводя к форме канонического уравнения, имеем:

$\dfrac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{11}}\right)^2}+\dfrac{y''^2}{(\sqrt{11})^2}=1$ - уравнение эллипса.

6. Поверхности второго порядка

<u>**Определение**</u>**: Поверхностью второго порядка** называют поверхность, определяемую уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат x и y, то есть

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+Ez^2+2Fyz+Kx+Ly+Mz+N=0,$$

где хотя бы один из коэффициентов $A, B, C, D, E, F \neq 0$.

Например, сфера $(x-a)^2+ +(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, является поверхностью второго порядка.

6.1. Эллипсоид.

Определение. **Эллипсоидом** называется поверхность, каноническое уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Отметим свойства эллипсоида, вытекающие из определения:

1. Поверхность симметрична относительно координатных плоскостей и центра O — ***центр эллипсоида.***
2. Из уравнения получаем, что $\frac{x^2}{a^2}\le 1 \Rightarrow |x|\le a$. Аналогично $|y|\le b$ и $|z|\le c$.

   Таким образом эллипсоид расположен внутри параллелепипеда с центром в точке O и сторонами, равными $2a, 2b, 2c$. Числа a, b, c называются ***полуосями эллипсоида.***
3. Точки пересечения с осями:

   $x=y=0 \Rightarrow z=\pm c$. Аналогично $x=\pm a$ и $y=\pm b$. Тогда точки $A_1(-a;0;0), A_2(a;0;0), B_1(0;-b;0), B_2(0;b;0), C_1(0;0;-c),$ и $C_2(0;0,c)$ — ***вершины эллипсоида***.

Для того, чтобы построить эллипсоид, применим **метод параллельных сечений.**

Рассечем эллипсоид плоскостью, параллельной плоскости Oxy: $z=h$ (т.к. $|z|\le c$, то $|h|\le c$). Тогда линия пересечения будет определяться системой $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ z=h\end{cases}$ или $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases}$.

Если $|h|<c$, то $1-\frac{h^2}{c^2}>0$. Разделим на $1-\frac{h^2}{c^2}$, имеем:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1\\ z=h\end{cases},\quad \text{где}\quad a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\quad b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$$

Это уравнение эллипса с полуосями a_1 и b_1 в плоскости $z=h$.

Заметим, что с уменьшением $|h|$ полуоси a_1 и b_1 увеличиваются.

Если $|h|=c$, то сечения представляют собой точки C_1 и C_2.

Если $|h|=0$, т.е. $h=0$ $\Rightarrow$ эллипс имеет полуоси a и b.

Аналогично получим, что сечения эллипсоида плоскостями, параллельными плоскостям Oyz и Oxz тоже являются эллипсами (рис. 6.1.).

В любой плоскости, параллельной координатным плоскостям, мы имеем в сечениях эллипсы, отсюда и название данной поверхности.

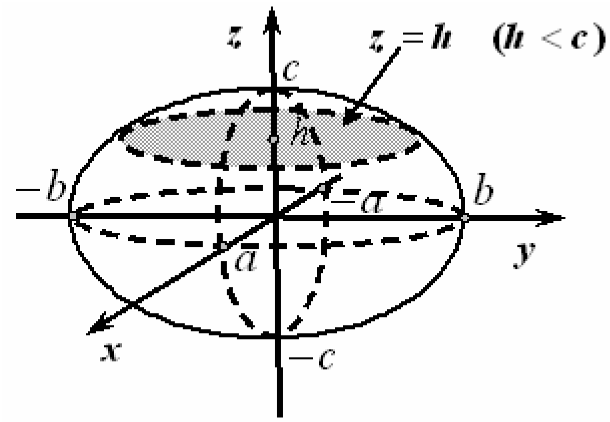


Рис.6.1.

Замечания.

1. Если $\mathbf{a = b = c}$, то уравнение эллипсоида примет вид $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 = a^2}$. Это ***сфера***.
2. Уравнение $\dfrac{(\mathbf{x - x_0})^2}{\mathbf{a^2}} + \dfrac{(\mathbf{y - y_0})^2}{\mathbf{b^2}} + \dfrac{(\mathbf{z - z_0})^2}{\mathbf{c^2}} = \mathbf{1}$ определяет эллипсоид с центром в точке $\mathbf{O'(x_0; y_0; z_0)}$.

6.2. Однополостный гиперболоид

Определение. Однополостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} - \frac{\mathbf{z^2}}{\mathbf{c^2}} = \mathbf{1}.$$

Отметим свойства однополостного гиперболоида, вытекающие из определения:

1) т. $\mathbf{O}$ — центр симметрии поверхности;

2) поверхность симметрична относительно координатных плоскостей.

Для того, чтобы построить однополостной гиперболоид, применим **метод параллельных сечений.**

В сечениях гиперболоида плоскостью Oyz ($\mathbf{x = 0}$) имеем гиперболу

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} - \dfrac{\mathbf{z^2}}{\mathbf{c^2}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{x = 0} \end{cases}.$$

В сечениях гиперболоида плоскостью Oxz ($\mathbf{y = 0}$) имеем гиперболу

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Рассечем поверхность плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy. В сечениях имеем линии $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$.

При $h = 0$ получим самый маленький эллипс с полуосями a и b — ***горловой эллипс.***

При $h \neq 0$ получим в сечениях эллипсы $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_1^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} = 1 \\ z = h \end{cases}$,

где $a_1 = a\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}}$, $b_1 = b\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}}$.

При увеличении $|h|$ полуоси эллипса увеличиваются (рис.6.2.).

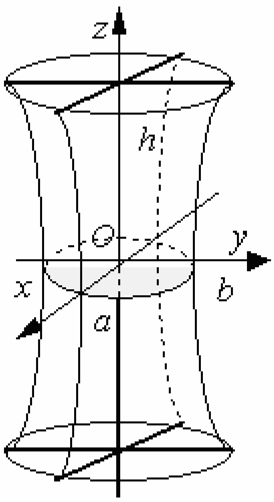


Рис.6.2.

Замечания.

1. Уравнения $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ и $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ определяют однополостные гиперболоиды, направленные вдоль осей Oy и Ox.

2. Если центр гиперболоида находится в точке $O'(x_0; y_0; z_0)$, то $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$ — уравнение смещенного гиперболоида.

6.3. Двуполостный гиперболоид

Определение. Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Отметим свойства однополостного гиперболоида, вытекающие из определения:

1) т. O — центр симметрии поверхности;

2) поверхность симметрична относительно координатных плоскостей.

Для того, чтобы построить двуполостной гиперболоид, применим **метод параллельных сечений.**

В сечениях гиперболоида плоскостью Oyz ($x=0$) имеем гиперболу

$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\\ x=0\end{cases}.$$

В сечениях гиперболоида плоскостью Oxz ($y=0$) имеем гиперболу

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\\ y=0\end{cases}.$$

Рассечем поверхность плоскостями $z=h$, параллельными плоскости Oxy. В сечениях имеем линии $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases}$.

Первое уравнение имеет смысл только при $\frac{h^2}{c^2}-1\ge 0$, т.е. $|h|\ge c$.

При $|h|<c$ секущая плоскость не пересекает гиперболоид.

При $|h|=c$ получим две точки $C_1(0;0;-c)$ и $C_2(0;0,c)$.

При $|h|>c$ уравнения линий пересечения будут эллипсы $\begin{cases}\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1\\ z=h\end{cases}$,

где $a_1=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$, $b_1=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$.

При увеличении $|h|$ полуоси эллипса увеличиваются (рис.6.3.).

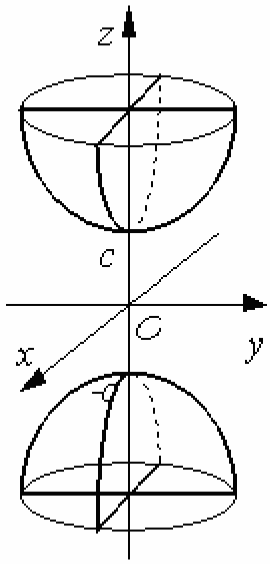


Рис.6.3.

Замечания.

1. Уравнения $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ и $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ определяют двуполостные гиперболоиды, направленные вдоль осей Oy и Ox.

2. Если центр гиперболоида находится в точке $O'(x_0; y_0; z_0)$, то уравнение смещенного гиперболоида $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$.

6.4. Эллиптический параболоид.

Определение. Эллиптическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнения которой имеет вид

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

Отметим свойства эллиптического параболоида, вытекающие из определения:

1) ось **Oz** — ось симметрии поверхности;

2) поверхность симметрична относительно координатных плоскостей OXZ и OYZ.

3) при $z=0$ уравнению удовлетворяют $x=y=0$. Значит точка **O(0; 0; 0)** — ***вершина параболоида***.

Для того, чтобы построить двуполостной гиперболоид, применим **метод параллельных сечений.**

В сечениях гиперболоида плоскостью Oyz ($x=0$) имеем параболу

$$\begin{cases} z = \frac{1}{b^2} y^2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

В сечениях гиперболоида плоскостью Oxz ($y = 0$) имеем параболу

$$\begin{cases} z = \frac{1}{a^2} x^2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Рассечем поверхность плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy. В сечениях имеем эллипсы $\begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \\ z = h \end{cases}$, где $a_1 = a\sqrt{h}$ и $b_1 = b\sqrt{h}$.

При увеличении $|h|$ полуоси эллипса увеличиваются (рис.6.4.).

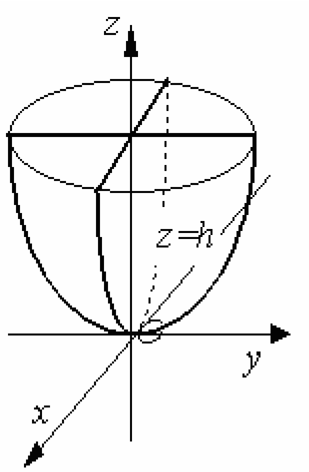


Рис.6.4.

Замечания.

1. Параболоиды $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ и $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$ направлены соответственно вдоль оси Ox и оси Oy.
2. Параболоид $-z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ направлен вдоль отрицательного направления оси Oz.
3. Если $a = b$, то $a^2 z = x^2 + y^2$ — ***параболоид вращения.***
4. Смещенный параболоид с вершиной в точке $O'(x_0; y_0; z_0)$: $z - z_0 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}$.

6.5. Гиперболический параболоид.

Определение. Гиперболическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнения которой имеет вид

$$\mathbf{z}=\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}\quad .$$

Отметим свойства гиперболического параболоида, вытекающие из определения:

1) ось $\mathbf{Oz}$ — ось симметрии поверхности;

2) поверхность симметрична относительно координатных плоскостей OXZ и OYZ.

Для того, чтобы построить двуполостной гиперболоид, применим **метод параллельных сечений** (рис.6.5.).

При $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ имеем $\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}=\mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{y}=\pm\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\mathbf{x}$ — прямые (это асимптоты гипербол).

При $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ получаем $\mathbf{z}=\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}$ — парабола.

При $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ получаем $\mathbf{z}=-\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}$ — парабола.

При $\mathbf{z}=\mathbf{h}$ $(\mathbf{h}>\mathbf{0})$ в сечениях имеем $\begin{cases}\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}=\mathbf{h}\\ \mathbf{z}=\mathbf{h}\end{cases}$, т.е. $\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}_1^2}-\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}_1^2}=\mathbf{1}$ — гиперболы, где $\mathbf{a}_1=\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{h}}$ и $\mathbf{b}_1=\mathbf{b}\sqrt{\mathbf{h}}$.

При $\mathbf{z}=\mathbf{h}$ $(\mathbf{h}<\mathbf{0})$в сечениях имеем $\begin{cases}\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}=\mathbf{h}\\ \mathbf{z}=\mathbf{h}\end{cases}$, т.е. $\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}_1^2}-\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}_1^2}=-\mathbf{1}$ — сопряженная гиперболы, где $\mathbf{a}_1=\mathbf{a}\sqrt{(-\mathbf{h})}$ и $\mathbf{b}_1=\mathbf{b}\sqrt{(-\mathbf{h})}$.

Замечание.

1. Параболоиды $\mathbf{x}=\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}-\frac{\mathbf{z}^2}{\mathbf{c}^2}$ и $\mathbf{y}=\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{\mathbf{z}^2}{\mathbf{c}^2}$ направлены соответственно вдоль оси Ох и оси Оу.
2. Уравнение смещенного гиперболического параболоида имеет вид $\mathbf{z}-\mathbf{z}_0=\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{y}_0)^2}{\mathbf{b}^2}$.

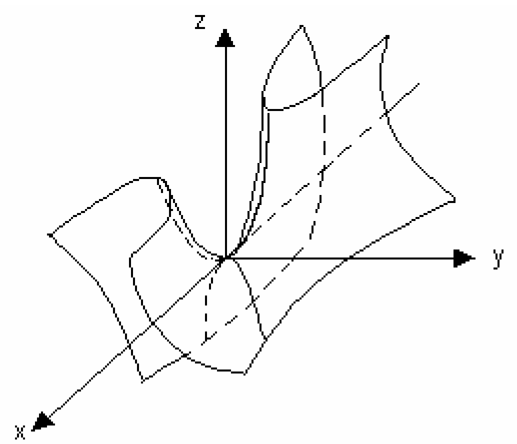


Рис.6.5.

6.6. Конус второго порядка.

Определение: Конической поверхностью второго порядка называют поверхность, определяемую в декартовой прямоугольной системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Отметим свойства гиперболического параболоида, вытекающие из определения:

1) т. O — центр симметрии — ***вершина конуса***;

2) поверхность симметрична относительно координатных плоскостей.

Для того, чтобы построить однополостной гиперболоид, применим **метод параллельных сечений.**

В сечениях конуса плоскостью Oyz ($x=0$) имеем прямые линии

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}\\ x=0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}y=\pm\dfrac{b}{c}z\\ x=0\end{cases}$$, называемые образующими конуса.

В сечениях конуса плоскостью Oxz ($y=0$) имеем прямые линии

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{z^2}{c^2}\\ y=0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x=\pm\dfrac{a}{c}z\\ y=0\end{cases}$$, называемые образующими конуса.

Рассечем поверхность плоскостями $\mathbf{z = h}$, параллельными плоскости Oxy. В сечениях имеем линии $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$, являющимися эллипсами

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_1^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} = 1 \\ z = h \end{cases}, \text{ где } a_1 = \frac{a}{c}|h| \text{ и } b_1 = \frac{b}{c}|h|.$$

При $\mathbf{h = 0}$ получим в сечении точка $\mathbf{O(0; 0; 0)}$.

При увеличении $|\mathbf{h}|$ полуоси эллипса увеличиваются (рис.6.6.).

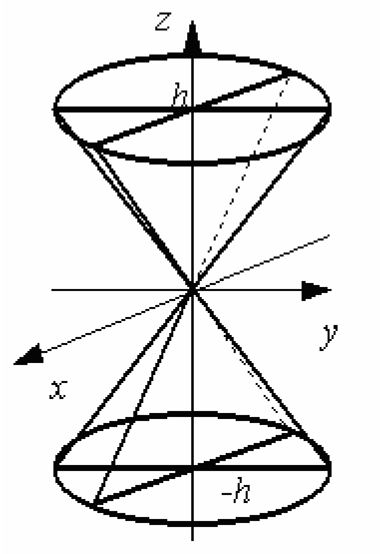


Рис.6.6.

Замечания.

1. Если $\mathbf{a = b}$, то $\dfrac{a^2}{c^2} z = x^2 + y^2$ — ***круговой конус***.

2. Конусы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ и $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ направлены вдоль осей Oy и Ox.

3. Смещенный конус $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0$.

6.7. Цилиндрические поверхности.

Определение: ***Цилиндрической поверхностью*** называется такая поверхность, каноническое уравнение которой не содержит одной из координат, например, $\mathbf{z}$: $\mathbf{F(x, y) = 0}$.

На плоскости Оху это уравнение определяет некоторую линию $\mathbf{l}$ (рис. 6.7.).

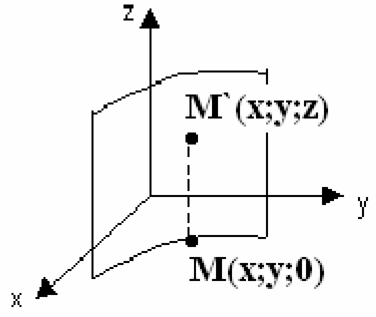


Рис.6.7.

Пусть $\mathbf{M(x, y, 0)} \in \mathbf{l}$, т.е. координаты точки $\mathbf{M}$ удовлетворяют уравнению $\mathbf{F(x, y) = 0}$. Но этому уравнению будут удовлетворять координаты любой точки $\mathbf{M^*(x, y, z)}$.

Следовательно, уравнение $\mathbf{F(x, y) = 0}$ описывает поверхность, проектирующуюся на плоскость Оху в кривую $\mathbf{l}$.

Такую поверхность можно образовать движением прямой линии, параллельной оси Oz, по кривой $\mathbf{l}$. Кривая $\mathbf{l}$ называется ***направляющей***, прямые, параллельные оси Oz, называются ***образующими***. Образованная таким образом поверхность называется ***цилиндрической поверхностью.***

В зависимости от типа направляющей $\mathbf{l}$ цилиндрическая поверхность называется:

1. ***Эллиптическим цилиндром*** (рис. 6.8.).

Его уравнение имеет вид $\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}$.

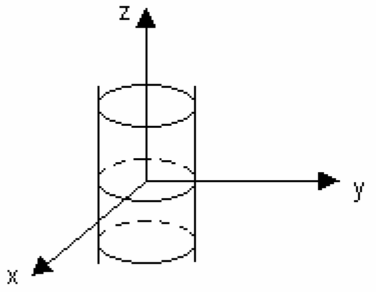


Рис.6.8.

2. ***Гиперболическим цилиндром*** (рис. 6.9.).

Его уравнение имеет вид $\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} - \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}$.

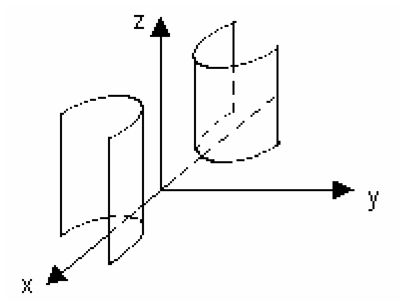


Рис.6.9.

3. ***Параболическим цилиндром*** (рис. 6.10.).

Его уравнение имеет вид $\mathbf{y^2 = 2px}$.

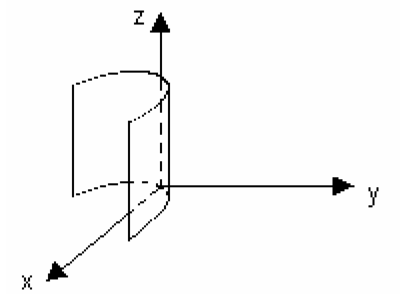


Рис.6.10.

Замечание. Если уравнение поверхности не содержит $\mathbf{x}$ (или $\mathbf{y}$), то оно определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Ox (или оси Oy).

6.8. Поверхности вращения.

Определение: Поверхностью вращения называют поверхность, образованную вращением плоской кривой L вокруг оси, находящейся в этой же плоскости.

Пусть $\mathbf{L \in Oyz}$ и $\mathbf{Oz}$ — ось вращения (рис. 6.11.), то есть

$$\mathbf{L:}\begin{cases}\mathbf{X = 0}\\ \mathbf{F(Y;Z) = 0}\end{cases}.$$

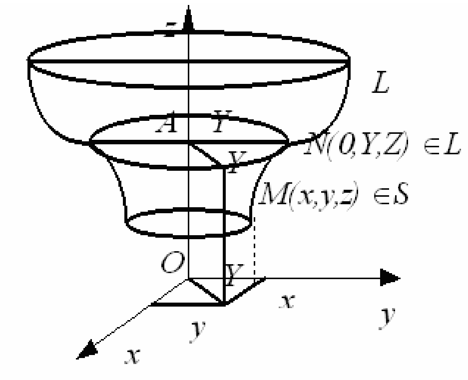


Рис.6.11.

Пусть **M(x,y,z)** произвольная точка поверхности вращения **S**. Произведем сечение поверхности **S** плоскостью, проходящей через точку **M** перпендикулярно оси **Oz.** Точки пересечения этой плоскости с кривой **L** и осью **Oz** обозначим соответственно $\mathbf{N(0,Y,Z)\in L}$ и $\mathbf{A(\,0,\,0,\,z\,)\in\,Oz}$.

Очевидно, **AM = AN = | Y |** как радиусы одной и той же окружности, причем

$$|\,Y\,| = \sqrt{x^2+y^2} \text{ или } Y = \pm\sqrt{x^2+y^2} \text{ и } \mathbf{z = Z}\,.$$

Так как точка $\mathbf{N(0,Y,Z)\in L}$, то ее координаты **Y** и **Z** удовлетворяют второму из уравнений системы для линии **L** , то есть

$$\mathbf{F}(\pm\sqrt{x^2+y^2}\,,\,\mathbf{z}\,) = \mathbf{0}.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки **M(x,y,z)** поверхности вращения. Таким образом, последнее уравнение является уравнением поверхности вращения линии **L** вокруг оси **Oz** .

Таким образом, мы приходим к следующему **правилу**: чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии L , лежащей в плоскости yOz, вокруг оси Oz, нужно в уравнении этой линии заменить y на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

При выборе знака перед радикалом следует придерживаться следующего правила: знак должен совпадать в соответствующих точках со знаком координаты y на исходной кривой.

Совершенно аналогичные правила будут для получения уравнений поверхностей вращения, получающихся вращением плоских линий вокруг других координатных осей.

Пример. Найти уравнение поверхности, если прямую $y = x - 1$ вращать вокруг оси *Ox*.

Решение. Т.к. вращение прямой линии происходит вокруг оси *Ox*, то в силу изложенного выше нам нужно в данном уравнении $y = x - 1$ заменить y на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$.

В результате получим $\pm\sqrt{y^2+z^2} = x - 1$. Возведя обе части этого соотношения в квадрат, получим уравнение конуса с вершиной в точке $M_0(1,0,0)$

$$y^2 + z^2 = (x-1)^2.$$

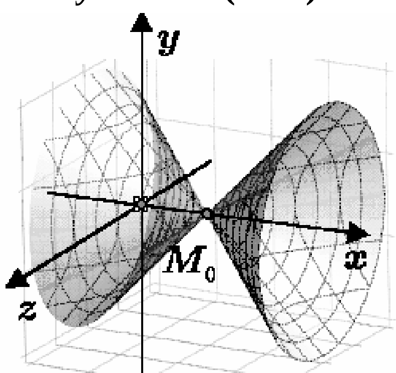


Рис.6.12.

6.9. Контрольные вопросы к § 6.

1. Дайте определение поверхности второго порядка.
2. Что называется цилиндрической поверхностью? Приведите примеры.
3. Что называется поверхностью вращения?
4. Дайте определение эллипсоида. Исследуйте форму эллипсоида с помощью метода параллельных сечений.
5. Запишите канонические уравнения однополостного и двуполостного гиперболоидов, а также эллиптического и гиперболического параболоидов. Исследуйте форму данных поверхностей с помощью метода параллельных сечений.
6. Что называется конической поверхностью?
7. Запишите каноническое уравнение конуса второго порядка.

Задания по аналитической геометрии.

Задание 01. Написать уравнение плоскости проходящей через точку **A** перпендикулярно вектору **BC**

N Вар	Точка А			Точка В			Точка С		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	1	0	-2	2	-1	3	0	-3	2
2	-1	3	4	-1	5	0	2	6	1
3	4	-2	0	1	-1	-5	-2	1	-3
4	-8	0	7	-3	2	4	-1	4	5
5	7	-5	1	5	-1	-3	3	0	-4
6	-3	5	-2	-4	0	3	-3	2	5
7	1	-1	8	-4	-3	10	-1	-1	7
8	-2	0	-5	2	7	-3	1	10	-1
9	1	9	-4	5	7	1	3	5	0
10	-7	0	3	1	-5	-4	2	-3	0
11	0	-3	5	-7	2	6	-3	2	4
12	5	-1	2	2	-4	3	4	-1	3
13	-3	7	2	3	5	1	4	5	3
14	0	-2	8	4	3	2	1	4	3
15	1	-1	5	0	7	8	-1	3	8
16	-4	0	9	12	4	11	8	5	15
17	3	-3	6	1	9	-5	6	6	-4
18	2	1	7	9	0	2	9	2	3
19	-7	1	-4	8	11	-3	9	9	-1
20	1	0	-6	-7	2	1	-9	6	1
21	-3	1	0	6	3	3	9	4	-2
22	-4	-2	5	3	-3	-7	9	3	-7
23	0	-8	10	-5	5	7	-8	0	4
24	1	-5	-2	6	-2	1	2	-2	-2
25	0	7	-9	-1	8	-11	-4	3	-12
26	-3	-1	7	0	2	-6	2	3	-5
27	5	3	-1	0	0	-3	5	-1	0
28	-1	2	-2	13	14	1	14	15	2
29	7	-5	0	8	3	-1	8	5	1
30	-3	6	4	8	-3	5	10	-3	7

Задание 02. Найти расстояние от точки $\mathbf{M_0}$ до плоскости, проходящей через три точки $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$.

	Точка M_1			Точка M_2			Точка M_3			Точка M_0		
	x	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*
1	-3	4	-7	1	5	-4	-5	-2	0	-12	7	-1
2	-1	2	-3	4	-1	0	2	1	-2	1	-6	-5
3	-3	-1	1	-9	1	-2	3	-5	4	-7	0	-1
4	1	-1	1	-2	0	3	2	1	-1	-2	4	2
5	1	2	0	1	-1	2	0	1	-1	2	-1	4
6	1	0	2	1	2	-1	2	-2	1	-5	-9	1
7	1	2	-3	1	0	1	-2	-1	6	3	-2	-9
8	3	10	-1	2	3	-5	-6	0	-3	-6	7	-10
9	-1	2	4	-1	-2	-4	3	0	-1	-2	3	5
10	0	-3	1	-4	1	2	2	-1	5	-3	4	-5
11	1	3	0	4	-1	2	3	0	1	4	3	0
12	-2	-1	-1	0	3	2	3	1	-4	-21	20	-16
13	-3	-5	6	2	1	-4	0	-3	-1	3	6	68
14	2	-4	-3	5	-6	0	-1	3	-3	2	-10	8
15	1	-1	2	2	1	2	1	1	4	-3	2	7
16	1	3	6	2	2	1	-1	0	1	5	-4	5
17	-4	2	6	2	-3	0	-10	5	8	-12	1	8
18	7	2	4	7	-1	-2	-5	-2	-1	10	1	8
19	2	1	4	3	5	-2	-7	-3	2	-3	1	8
20	-1	-5	2	-6	0	-3	3	6	-3	10	-8	-7
21	0	-1	-1	-2	3	5	1	-5	-9	-4	-13	6
22	5	2	0	2	5	0	1	2	4	-3	-6	-8
23	2	-1	-2	1	2	1	5	0	-6	14	-3	7
24	-2	0	-4	-1	7	1	4	-8	-4	-6	5	5
25	14	4	5	-5	-3	2	-2	-6	-3	-1	-8	7
26	1	2	0	3	0	-3	5	2	6	-13	-8	16
27	2	-1	2	1	2	-1	3	2	1	-5	3	7
28	1	1	2	-1	1	3	2	-2	4	2	3	8
29	2	3	7	4	1	-2	6	3	7	-5	-4	8
30	1	1	-1	2	3	1	3	2	1	-3	-7	6

Задание 03. Найти угол между плоскостями: $\mathbf{A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0}$ и $\mathbf{A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0}$

N Вар	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2
1	1	-3	0	5	2	-1	5	-16
2	1	-3	1	-1	1	0	1	-1
3	4	-5	3	-1	1	-4	-1	9
4	3	-1	2	15	5	9	-3	-1
5	6	2	-4	17	9	3	-6	-4
6	1	$-\sqrt{2}$	1	-1	1	$\sqrt{2}$	-1	3
7	0	3	-1	0	0	2	1	0
8	6	3	-2	0	1	2	6	-12
9	1	2	2	-3	16	12	-15	-1
10	2	-1	5	16	1	2	3	8
11	2	2	1	-1	1	0	1	-1
12	3	1	1	-4	0	1	1	5
13	3	-2	-2	-16	1	1	-3	-7
14	2	2	1	9	1	-1	3	-1
15	1	2	2	-3	1	-1	2	5
16	3	2	-3	-1	1	1	1	-7
17	1	-3	-2	-8	1	1	-1	3
18	3	-2	3	23	0	1	1	5
19	1	1	3	-7	0	1	1	-1
20	1	-2	2	17	1	-2	0	-1
21	1	2	0	-1	1	1	0	6
22	2	0	-1	5	2	3	0	-7
23	5	3	1	-18	0	2	1	-9
24	4	0	3	-2	1	2	2	5
25	1	4	-1	1	2	1	4	-3
26	0	2	1	-9	1	-1	2	-1
27	2	-6	14	-1	5	-15	35	-3
28	1	-1	7	-1	2	-2	0	-5
29	3	-1	0	-5	2	1	0	-3
30	1	1	$\sqrt{2}$	-3	1	-1	$\sqrt{2}$	-1

Задание 04. Найти координаты точки **A**, равноудаленной от точек **B** и **C**.

N Вар	Точка *A*			Точка *B*			Точка *C*		
	x	*y*	z	*x*	*y*	z	*x*	*y*	z
1	0	0	z	5	1	0	0	2	3
2	0	0	z	3	3	1	4	1	2
3	0	0	z	3	1	3	1	4	2
4	0	0	z	-1	-1	-6	2	3	5
5	0	0	z	-13	4	6	10	-9	5
6	0	0	z	-5	-5	6	-7	6	2
7	0	0	z	-18	1	0	15	-10	2
8	0	0	z	10	0	-2	9	-2	1
9	0	0	z	-6	7	5	8	-4	3
10	0	0	z	6	-7	1	-1	2	5
11	0	0	z	7	0	-15	2	10	-12
12	0	*y*	0	3	0	3	0	2	4
13	0	*y*	0	1	6	4	5	7	1
14	0	*y*	0	-2	8	10	6	11	-2
15	0	*y*	0	-2	-4	6	7	2	5
16	0	*y*	0	2	2	4	0	4	2
17	0	*y*	0	0	-4	1	1	-3	5
18	0	*y*	0	0	5	-9	-1	0	5
19	0	*y*	0	-2	4	-6	8	5	1
20	0	*y*	0	7	3	-4	1	5	7
21	0	*y*	0	0	-2	4	-4	0	4
22	*x*	0	0	0	1	3	2	0	4
23	*x*	0	0	4	0	5	5	4	2
24	*x*	0	0	8	1	-7	10	-2	1
25	*x*	0	0	3	5	6	1	2	3
26	*x*	0	0	4	5	-2	2	3	4
27	*x*	0	0	-2	0	6	0	-2	-4
28	*x*	0	0	1	5	9	3	7	11
29	*x*	0	0	4	6	8	2	4	6
30	*x*	0	0	1	2	3	2	6	10

Задание 05. Написать каноническое уравнение прямой

$$\begin{cases} \mathbf{A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0} \\ \mathbf{A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0} \end{cases}$$

N Вар	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2
1	2	1	1	-2	2	-1	-3	6
2	1	-3	2	2	1	3	1	14
3	1	-2	-1	-4	2	2	-1	-8
4	1	1	1	-2	1	-1	-2	2
5	2	3	1	6	1	-3	-2	3
6	3	1	-1	-6	3	-1	2	0
7	1	5	2	11	1	-1	-1	-1
8	3	4	-2	1	2	-4	3	4
9	5	1	-3	4	1	-1	2	2
10	1	-1	-1	-2	1	-2	1	4
11	4	1	-3	2	2	-1	1	-8
12	3	3	-2	-1	2	-3	1	6
13	6	-7	-4	-1	1	7	-1	-5
14	8	-1	-3	-1	1	1	1	10
15	6	-5	-4	8	6	5	3	4
16	1	5	-1	-5	2	-5	2	5
17	2	-3	1	6	1	-3	-2	3
18	5	1	2	4	1	-1	-3	2
19	4	1	1	2	2	-1	-3	-8
20	2	1	-3	-2	2	-1	1	6
21	1	1	-2	-2	1	-1	1	2
22	1	5	-1	1	1	-1	2	-1
23	1	-1	1	-2	1	-2	-1	4
24	6	-7	-1	-2	1	7	-4	-5
25	1	5	2	-5	2	-5	-1	5
26	1	-3	1	2	1	3	2	14
27	2	3	-2	6	1	-3	1	3
28	3	4	3	1	2	-4	-2	4
29	3	3	1	-1	2	-3	-2	6
30	6	-5	3	8	6	5	-4	4

Задание 06. Найти точку пересечения прямой $\frac{\mathbf{x-x_0}}{\mathbf{m}}=\frac{\mathbf{y-y_0}}{\mathbf{n}}=\frac{\mathbf{z-z_0}}{\mathbf{p}}$ и плоскости **Ax+By+Cz+D=0**

N Вар	$\mathbf{x_0}$	$\mathbf{y_0}$	$\mathbf{z_0}$	**m**	**n**	**p**	**A**	**B**	**C**	**D**
1	2	3	-1	-1	-1	4	1	2	3	-14
2	-1	3	-1	3	-4	5	1	2	-5	20
3	1	-5	1	-1	4	2	1	-3	7	-24
4	1	0	-3	1	0	2	2	-1	4	0
5	5	3	2	1	-1	0	3	1	-5	-12
6	-1	-2	3	-3	2	-2	1	3	-5	9
7	1	2	-1	-2	1	-1	1	-2	5	17
8	1	2	4	2	0	1	1	-2	4	-19
9	-2	1	-4	-1	1	-1	2	-1	3	23
10	-2	2	-3	1	0	0	2	-3	-5	-7
11	1	1	-2	2	-1	3	4	2	-1	-11
12	1	-1	1	1	0	-1	3	-2	-4	-8
13	-2	1	-3	-1	1	2	1	2	-1	-2
14	-3	2	-2	1	-5	3	5	-1	4	3
15	2	2	4	2	-1	3	1	3	5	-42
16	3	4	4	-1	5	2	7	1	4	-47
17	-3	1	1	2	3	5	2	3	7	-52
18	3	-1	-3	2	3	2	3	4	7	-16
19	5	2	-4	-2	0	-1	2	-5	4	24
20	1	8	-5	8	-5	12	1	-2	-3	18
21	3	1	-5	1	-1	0	1	7	3	11
22	5	-3	1	-1	5	2	3	7	-5	-11
23	1	2	6	7	1	-1	4	1	-6	-5
24	3	-2	8	1	-1	0	5	9	4	-25
25	-1	0	-1	-2	0	3	1	4	13	-23
26	1	3	-5	6	1	3	3	-2	5	-3
27	2	1	-3	4	-3	-2	3	-1	4	0
28	1	-2	3	2	-5	-2	1	2	-5	16
29	1	3	-2	1	0	-2	3	-7	-2	7
30	-3	2	-5	0	-3	11	5	7	9	-32

Задание 07. Найти точку M’ симметричную точке M относительно прямой

$$\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x_0}}{\mathbf{m}}=\frac{\mathbf{y}-\mathbf{y_0}}{\mathbf{n}}=\frac{\mathbf{z}-\mathbf{z_0}}{\mathbf{p}}$$ (для вариантов 1 -15)

или плоскости Ax + By + Cz + D = 0 (для вариантов 16 – 30)

N Вар	Точка **M**			$\mathbf{x_0}$	$\mathbf{y_0}$	$\mathbf{z_0}$	**m**	**n**	**p**
	x	**y**	**z**						
1	0	-3	-2	1	-1.5	0	1	-1	1
2	2	-1	1	4.5	-3	2	1	-0.5	1
3	1	1	1	2	-1.5	1	1	-2	1
4	1	2	3	0.5	-1.5	1.5	0	-1	1
5	1	0	-1	3.5	1.5	0	2	2	0
6	2	1	0	2	-1.5	-0.5	0	-1	1
7	-2	-3	0	-0.5	-1.5	0.5	1	0	1
8	-1	0	-1	0	1.5	2	-1	0	1
9	0	2	1	1.5	0	2	2	-1	1
10	3	-3	-1	6	3.5	-0.5	5	4	0
11	3	3	3	1	1.5	3	-1	0	1
12	-1	2	0	-0.5	-0.7	2	1	-0.2	2
13	2	-2	-3	1	-0.5	-1.5	-1	0	0
14	-1	0	1	-0.5	1	4	0	0	2
15	0	-3	-2	0.5	-1.5	1.5	1	-1	1

N Вар	Точка M			**A**	**B**	**C**	**D**
	x	**y**	**z**				
16	1	0	1	4	6	4	-25
17	-1	0	-1	2	6	-2	11
18	0	2	1	2	4	0	-3
19	2	0	1	0	1	1	2
20	-1	2	0	4	-5	-1	-7
21	2	-1	1	1	-1	2	-2
22	1	1	1	1	4	3	5
23	1	2	3	2	10	10	-1
24	0	-3	-2	2	10	10	-1
25	1	0	-1	0	2	4	-1
26	3	-3	-1	2	-4	-4	-13
27	-2	-3	0	1	5	0	4
28	2	-2	-3	0	1	1	2
29	-1	0	1	2	4	0	-3
30	3	3	3	8	6	8	-25

Задание 08.

Даны четыре точки: $\mathbf{A_1(x_1; y_1; z_1)}$, $\mathbf{A_2(x_2; y_2; z_2)}$, $\mathbf{A_3(x_3; y_3; z_3)}$, $\mathbf{A_4(x_4; y_4; z_4)}$.

Составить уравнения:

а) плоскости $\mathbf{A_1 A_2 A_3}$;

б) прямой $\mathbf{A_1 A_2}$;

в) прямой $\mathbf{A_4M}$, перпендикулярной к плоскости $\mathbf{A_1 A_2 A_3}$;

г) прямой $\mathbf{A_3N}$, параллельной прямой $\mathbf{A_1 A_2}$;

д) плоскости, проходящей через $\mathbf{A_4}$ перпендикулярно к прямой $\mathbf{A_1 A_2}$;

Вычислить:

е) синус угла между прямой $\mathbf{A_1 A_4}$ и плоскости $\mathbf{A_1 A_2 A_3}$;

ж) косинус угла между плоскостью **Oxy** и плоскостью $\mathbf{A_1 A_2 A_3}$.

Вар.	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_4	y_4	z_4
1	3	1	4	-1	6	1	-1	1	6	0	4	-1
2	3	1	-2	-1	0	1	1	7	3	8	5	8
3	3	5	4	5	8	3	1	2	-2	-1	0	2
4	2	4	3	1	1	5	4	9	3	3	6	7
5	9	5	5	-3	7	1	5	7	8	6	9	2
6	0	7	1	2	-1	5	1	6	3	3	-9	8
7	5	5	4	1	-1	4	3	5	1	5	8	-1
8	6	1	1	4	6	6	4	2	0	1	2	6
9	7	5	3	9	4	4	4	5	7	7	9	6
10	6	8	2	5	4	7	2	4	7	7	3	7
11	4	2	5	0	7	1	0	2	7	1	5	0
12	4	4	10	7	10	2	2	8	4	9	6	9
13	4	6	5	6	9	4	2	10	10	7	5	9
14	3	5	4	8	7	4	5	10	4	7	7	8
15	10	9	6	2	8	2	9	8	9	7	10	3
16	1	8	2	5	2	6	5	7	4	4	10	9
17	6	6	5	4	9	5	4	6	11	6	9	3
18	7	2	2	-5	7	-7	5	-3	1	2	3	7
19	8	-6	4	10	5	-5	5	6	-8	8	10	7
20	1	-1	3	6	5	8	3	5	8	8	4	1
21	1	-2	7	4	2	10	2	3	5	5	3	7
22	4	2	10	1	2	0	3	5	7	2	-3	5
23	2	3	5	5	3	-7	1	2	7	4	2	0
24	5	3	7	-2	3	5	4	2	10	1	2	7
25	4	3	5	1	9	7	0	2	0	5	3	10
26	3	2	5	4	0	6	2	6	5	6	4	-1
27	2	1	6	1	4	9	2	-5	8	5	4	2
28	2	1	7	3	3	6	2	-3	9	1	2	5
29	2	-1	7	6	3	1	3	2	8	2	-3	7
30	0	4	5	3	-2	1	4	5	6	3	3	2

Задание 09.

Даны координаты точек $\mathbf{M_1}$ и $\mathbf{M_2}$ и уравнение прямой **d**. Требуется:

1) построить прямую d и точки M_1 и M_2.
2) вычислить расстояние от точки M_1 до прямой d;
3) написать уравнение прямой, проходящей через точку M_1, параллельно прямой d;
4) написать уравнение прямой, проходящей через точку M_1, перпендикулярно прямой d;
5) написать уравнение прямой M_1M_2;
6) выяснить взаимное расположение прямых M_1M_2 и d; если они не параллельны, определить тангенс угла между ними и найти координаты точки их пересечения.

	уравнение прямой **d**	координаты точек		уравнение прямой **d**	координаты точек
1.	x+y+1=0	M_1(2, 3), M_2(3, 1)	16.	y+2=0	M_1(-1, -1), M_2(0, 3)
2.	x-y+1=0	M_1(1, 0), M_2(2, -1)	17.	-2x+y=0	M_1(-1, 2), M_2(3, 2)
3.	2x+2y-1=0	M_1(2, 3), M_2(2 , 2)	18.	x+y+1=0	M_1(-2, 3), M_2(1, 1)
4.	2x-2y+1=0	M_1(2, -3), M_2(-3, 1)	19.	x-y+4=0	M_1(0, 3), M_2(4, -1)
5.	x-y-1=0	M_1(0, 3), M_2(-2, 1)	20.	x-3=0	M_1(2, 3), M_2(-3, 1)
6.	x+2y-6=0	M_1(2, -2), M_2(-1, 1)	21.	-x+y+1=0	M_1(1, 1), M_2(-3, -1)
7.	x-3y+3=0	M_1(2, 0), M_2(0, 1)	22.	4x+1=0	M_1(2, -2), M_2(1, 1)
8.	y+1=0	M_1(-2, 3), M_2(-4, 1)	23.	-x+5y+1=0	M_1(-2, 3), M_2(0, 1)
9.	x+4y+6=0	M_1(0, 3), M_2(-3, 1)	24.	3x-2y-6=0	M_1(-2, 4), M_2(3, 1)
10.	3x-2y+6=0	M_1(2, 3), M_2(-3, -2)	25.	2x+6y-12=0	M_1(2, 3), M_2(3, 1)
11.	3x-5y+15=0	M_1(2, -2), M_2(3, 1)	26.	-2x+3y-12=0	M_1(1, -3), M_2(-3, 1)
12.	3x+y-4=0	M_1(2, 0), M_2(0, 1)	27.	x+5y+1=0	M_1(-2, 3), M_2(-3, 1)
13.	x-4y+6=0	M_1(0, 4), M_2(3, -1)	28.	-3x+7y+21=0	M_1(2, -1), M_2(3, 1)
14.	x-5y+10=0	M_1(2, 3), M_2(4, 1)	29.	3x+y=0	M_1(2, 1), M_2(3, 5)
15.	x+4y=0	M_1(-1, 3), M_2(1, -4)	30.	3x-7y+21=0	M_1(2, 3), M_2(-3, 6)

Задание 10.

Даны вершины треугольника **ABC : A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3, y_3)**.Найти:

а) уравнение стороны **AB** ;

б) уравнение высоты **CH** ;

в) уравнение медианы **AM** ;

г) точку *N* пересечения медианы **AM** и высоты **CH** ;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину **C** параллельно стороне **AB** ;

е) расстояние от точки **C** до прямой **AB**.

	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
1.	-2	4	3	1	10	7
2.	-3	-2	14	4	6	8
3.	1	7	-3	-1	11	-3
4.	1	0	-1	4	9	5
5.	1	-2	7	1	3	7
6.	-2	-3	1	6	6	1
7.	-4	2	-6	6	6	2
8.	4	-3	7	3	1	10
9.	4	-4	8	2	3	8
10.	-3	-3	5	-7	7	7
11.	1	-6	3	4	-3	3
12.	-4	2	8	-6	2	6
13.	-5	2	0	-4	5	7
14.	4	-4	6	2	-1	8
15.	-3	8	-6	2	0	-5
16.	6	-9	10	-1	-4	1
17.	4	1	-3	-1	7	-3
18.	-4	2	6	-4	4	10
19.	3	-1	11	3	-6	2
20.	-7	-2	-7	4	5	-5
21.	-1	-4	9	6	-5	4
22.	10	-2	4	-5	-3	1
23.	-3	-1	-4	-5	8	1
24.	-2	-6	-3	5	4	0
25.	-7	-2	3	-8	-4	6
26.	0	2	-7	-4	3	2
27.	7	0	1	4	-8	-4
28.	1	-3	0	7	-2	4
29.	-5	1	8	-2	1	4
30.	2	5	-3	1	0	4

Задание 11. Даны вершины треугольника ABC.

Найти: 1) уравнения сторон, 2) уравнения высот, 3) длины сторон,
4) уравнения медиан, 5) уравнения биссектрис,
6) центр и радиус вписанной окружности,
7) центр и радиус описанной окружности,
8) центр тяжести, 9) точку пересечения высот,
10) длины высот и медиан,
11) углы треугольника, 12) площадь треугольника.

	Точка A		Точка B		Точка C	
	x_a	y_a	x_b	y_b	x_c	y_c
1.	0	0	10	-5	6	3
2.	1	1	11	-4	7	4
3.	-1	1	9	-4	5	4
4.	1	-1	11	-6	7	2
5.	-1	-1	9	-6	5	2
6.	1	1	-9	6	-5	-2
7.	1	-1	-9	4	-5	-4
8.	-1	-1	-11	4	-7	-4
9.	1	1	21	-9	13	7
10.	-1	1	19	-9	11	7
11.	1	-1	21	-11	13	5
12.	-1	-1	19	-11	11	5
13.	-1	1	-21	11	-13	-5
14.	1	-1	-19	9	-11	-7
15.	-1	-1	-21	9	-13	-7
16.	1	2	11	-3	7	5
17.	-1	2	9	-3	5	5
18.	1	-2	11	-7	7	1
19.	1	2	-9	7	-5	-1
20.	-1	2	-11	7	-7	-1
21.	1	-2	-9	3	-5	-5
22.	-1	-2	-11	3	-7	-5
23.	1	2	21	-8	13	8
24.	-1	2	19	-6	11	8
25.	-1	-2	19	-12	11	4
26.	-1	1	-11	6	-7	-2
27.	1	1	-19	11	-11	-5
28.	-1	-2	9	-7	5	1
29.	1	-2	21	-12	13	4
30.	-1	1	19	-9	11	7

Задание 12.

Дано уравнение кривой второго порядка. Найти длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы).
Построить данную кривую.

	Задание		Задание		Задание
1.	$x^2+4y^2=16$	11.	$9x^2-y^2=9$	21.	$x^2-64y^2=16$
2.	$4x^2-y^2=16$	12.	$x^2+9y^2=36$	22.	$-4x^2+16y^2=64$
3.	$4x^2+25y^2=100$	13.	$x^2+4y^2=36$	23.	$x^2+4y^2=64$
4.	$4x^2+9y^2=36$	14.	$5x^2+20y^2=80$	24.	$-x^2+4y^2=4$
5.	$9x^2-4y^2=36$	15.	$-x^2+y^2=1$	25.	$4x^2-y^2=1$
6.	$25x^2-4y^2=100$	16.	$-4x^2+y^2=1$	26.	$x^2+25y^2=100$
7.	$4x^2-9y^2=36$	17.	$x^2+4y^2=1$	27.	$-x^2+y^2=9$
8.	$4x^2+y^2=16$	18.	$x^2-y^2=1$	28.	$16x^2+y^2=64$
9.	$x^2-4y^2=16$	19.	$9x^2+y^2=9$	29.	$4x^2-y^2=1$
10.	$x^2-y^2=4$	20.	$-x^2+9y^2=9$	30.	$x^2+4y^2=1$

Задание 13.

Определить вид кривой, найти основные параметры (для окружности – центр и радиус; для эллипса – оси, координаты фокусов, эксцентриситет; для параболы – координаты вершины, фокуса и уравнение директрисы; для гиперболы – оси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот).

Сделать чертеж.

	Задание 1.	Задание 2.
1.	$x^2 - x + 8 = y$	$x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$
2.	$x^2 - 5x + 1 = y$	$x^2 + 7y^2 - 11 = 0$
3.	$5x^2 + y^2 - 12 = 0$	$x^2 + 7x - 6 = y$
4.	$8x^2 - y^2 = 16$	$x^2 + 2x + y^2 - 2y - 23 = 0$
5.	$3x^2 - 20y^2 = 40$	$y^2 + 3y + 6 = x$
6.	$x^2 - 4x + y^2 - 4y - 1 = 0$	$x^2 + 7y^2 - 11 = 0$
7.	$x^2 - 4x + y^2 + 4y - 8 = 0$	$y^2 + 7y = x$
8.	$x^2 - x + 8 = y$	$x^2 + 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$
9.	$x^2 - 5y^2 = 4$	$2x^2 - 5y^2 = 10$
10.	$x^2 + 3x + 6 = y$	$6x^2 + 3y^2 - 50 = 0$
11.	$6x^2 + 3y^2 - 50 = 0$	$x^2 + 3x + 6 = y$
12.	$x^2 - 4x + y^2 - 12 = 0$	$x^2 + 4x - 6 = y$
13.	$x^2 - 2x + y^2 - 4y - 11 = 0$	$y^2 + y - 4 = x$
14.	$x^2 + 7y^2 - 11 = 0$	$y^2 - 9y = x + 3$
15.	$6x^2 + 3y^2 - 50 = 0$	$x^2 + 7x - 6 = y$
16.	$x^2 - 4x + y^2 - 12 = 0$	$6x^2 - y^2 = 10$
17.	$x^2 - 4x + y^2 + 4y - 8 = 0$	$y^2 + 3y + 6 = x$
18.	$x^2 + 2x + y^2 - 2y - 23 = 0$	$y^2 - 9y = x + 3$
19.	$x^2 + 8y^2 - 100 = 0$	$x^2 + 11y = x - 10$
20.	$y^2 + y - 4 = x$	$2x^2 + 7y^2 - 60 = 0$
21.	$x^2 + 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$	$x^2 - 5y^2 = 4$
22.	$x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$	$x^2 - x + 8 = y$
23.	$x^2 + 3x + 6 = y$	$x^2 - 4x + y^2 - 4y - 1 = 0$
24.	$y^2 + 7y = x$	$10x^2 + 4y^2 - 55 = 0$
25.	$6x^2 + y^2 - 48 = 0$	$x^2 - x + 8 = y$
26.	$y^2 - 9y = x + 3$	$x^2 - 5y^2 = 4$
27.	$x^2 + 11y = x - 10$	$2x^2 - 5y^2 = 10$
28.	$x^2 - 2x + y^2 - 4y - 11 = 0$	$x^2 - 5x + 1 = y$
29.	$x^2 - 2x + y^2 - 2y - 7 = 0$	$y^2 + y - 4 = x$
30.	$x^2 - 4x + y^2 - 4y - 1 = 0$	$8x^2 - y^2 = 16$

Задание 14.

Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы.

Используемые обозначения:

A,B точки, лежащие на кривой, **F**-фокус, **a**-большая (действительная) полуось, **b** - малая (мнимая) полуось, **ε** — эксцентриситет, **y=±kx** - уравнения асимптот гиперболы, **D** — директриса кривой, **2c** — фокусное расстояние).

	Эллипс	Гипербола	Парабола
1.	$b=15$ $F(-10;0)$	$a=13$, $\varepsilon=13/12$	$D:\ x=-4$
2.	$b=2$ $F(4\sqrt{2};0)$	$a=7$, $\varepsilon=\sqrt{85}/7$	$D:\ x=5$
3.	$A(3;0)$, $B(2;\sqrt{5}/3)$	$k=1/6$ $\varepsilon=3/4$	$D:\ y=-2$
4.	$\varepsilon=\sqrt{21}/5$, $A(-5;0)$	$A(\sqrt{80};3)$ $B(4\sqrt{6};3\sqrt{2})$	$D:\ y=1$
5.	$a=11$ $\varepsilon=\sqrt{57}/11$	$k=2/3$ $c=5\sqrt{3}$	$A(27;9)$ ось симметрии OX
6.	$b=\sqrt{15}$ $\varepsilon=\sqrt{57}/11$	$k=3/4$ $a=8$	$A(4;-8)$ ось симметрии OX
7.	$a=4$ $F(3;0)$	$b=2\sqrt{10}$ $F(-11;0)$	$D:\ x=-2$
8.	$b=4$ $F(9;0)$	$a=5$ $\varepsilon=7/5$	$D:\ x=6$
9.	$A(0;\sqrt{3})$ $B(\sqrt{14/3};\ 1)$	$k=\sqrt{21}/10$ $\varepsilon=11/10$	$D:\ y=-4$
10.	$\varepsilon=7/8$, $A(8;0)$	$A(3;-\sqrt{3/5})$ $B(\sqrt{13/5};\ 6)$	$D:\ y=4$
11.	$a=12$ $\varepsilon=\sqrt{22}/6$	$k=\sqrt{2/3}$ $c=5$	$A(-7;7)$ ось симметрии OX
12.	$b=2$ $\varepsilon=5\sqrt{2}/11$	$k=12/13$ $a=13$	$A(-5;15)$ ось симметрии OX
13.	$a=6$ $F(-4;0)$	$b=3$ $F(7;0)$	$D:\ x=-7$
14.	$b=7$ $F(5;0)$	$a=12$, $\varepsilon=12/11$	$D:\ x=10$

15.	$A(-\sqrt{17/3};\ 1/3)$ $B(\sqrt{21}/2;1/2)$	$k=1/2$ $\varepsilon=\sqrt{5}/2$	$D:\ \ y=-1$
16.	$\varepsilon=3/5$, $A(0;8)$	$A(\sqrt{6};0)$ $B(-\sqrt{2}/2;1)$	$D:\ \ y=9$
17.	$a=11$ $\varepsilon=10/11$	$c=6$ $k=\sqrt{11}/5$	$A(-7;5)$ ось симметрии OX
18.	$b=5$ $\varepsilon=12/13$	$k=1/3$ $a=3$	$A(-9;6)$ ось симметрии OY
19.	$a=9$ $F(-7;0)$	$b=6$ $F(12;0)$	$D:\ \ x=-1/4$
20.	$b=5$ $F(-10;0)$	$a=9$ $\varepsilon=4/3$	$D:\ \ x=12$
21.	$A(0;-2)$ $B(\sqrt{15}/2;1)$	$k=2\sqrt{10}/9$ $\varepsilon=11/9$	$D:\ \ y=5$
22.	$\varepsilon=3/4$, $A(-6;0)$	$A(\sqrt{8};0)$ $B(\sqrt{20}/3;2)$	$D:\ \ y=1$
23.	$a=25$ $\varepsilon=3/5$	$k=\sqrt{29}/14$ $c=15$	$A(4;1)$ ось симметрии OY
24.	$b=2\sqrt{15}$ $\varepsilon=7/8$	$k=5/6$ $a=6$	$A(-2;3\sqrt{2})$ ось симметрии OY
25.	$a=13$ $F(-5;0)$	$b=22$ $F(-7;0)$	$D:\ \ x=-3/8$
26.	$b=7$ $F(13;0)$	$k=\sqrt{2/3}$ $\varepsilon=\sqrt{15}/3$	$D:\ \ x=13$
27.	$A(-3;0)$ $B(1;\sqrt{40}/3)$	$b=4$ $F(-11;0)$	$D:\ \ y=4$
28.	$\varepsilon=5/6$, $A(0;-\sqrt{11})$	$A(\sqrt{32/3};1)$ $B(\sqrt{8};0)$	$D:\ \ y=-3$
29.	$a=15$ $\varepsilon=15/17$	$k=\sqrt{17}/8$ $c=9$	$A(4;-10)$ ось симметрии OY
30.	$b=2\sqrt{2}$ $\varepsilon=7/9$	$k=\sqrt{2}/2$ $a=6$	$A(-2;3\sqrt{2})$ ось симметрии OY

Задание 15.

Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке А. Сделать чертеж.

	Задание.
1.	$12x^2 - 13y^2 = 156$, А(0, -2).
2.	Вершины гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$, А(0, 4).
3.	Фокусы гиперболы $24y^2 - 25x^2 = 600$, А(0, -8).
4.	О(0, 0) , А — вершина параболы $y^2 = 3(x - 4)$.
5.	Фокусы эллипса $9x^2 + 25y^2 = 1$, А(0, 6).
6.	Левый фокус гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$, А(0, -3).
7.	Фокусы эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$, А — его верхняя вершина.
8.	Вершину гиперболы $x^2 - 16y^2 = 64$, А(0, -2).
9.	Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 80$, А(0, -4).
10.	О(0, 0) , А — вершина параболы $y^2 = - (x + 5) / 2$.
11.	Правый фокус эллипса $33x^2 + 49y^2 = 1617$, А(1, 7).
12.	Левый фокус гиперболы $3x^2 - 5y^2 = 30$, А(0, 6).
13.	Фокусы эллипса $16x^2+ 41y^2 = 656$, А - его нижняя вершина.
14.	Вершину гиперболы $2x^2 - 9y^2 = 18$, А(0, 4).
15.	Фокусы гиперболы $5x^2 - 11y^2 = 55$, А(0, 5).
16.	В(1, 4) , А — вершина параболы $y^2 = (x - 4) / 3$.
17.	Левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$, А(-1, -3).
18.	Левую вершину гиперболы $5x^2 - 9y^2 = 45$, А(0, -6).
19.	Фокусы эллипса $24x^2 - 25y^2 = 600$, А — его верхняя вершина.
20.	Правую вершину гиперболы $3x^2 - 16y^2 = 48$, А(1, 3).
21.	Левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$, А(-1, -2).
22.	В(2, -5) , А — вершина параболы $y^2 = -2(y + 1)$.
23.	Правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, А(2, -7).
24.	Правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, А(-2, 5).
25.	Фокус эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$, А — его нижняя вершина.
26.	Правую вершину гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$, А(-5, -2).
27.	Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$, А(0, -6).
28.	В(3, 4) , А — вершина параболы $y^2 =(x+7)/4$.
29.	Левый фокус эллипса $13x^2 + 49y^2 = 837$, А(1, 8).
30.	Правый фокус гиперболы $57x^2 - 64y^2 = 3648$, А(2, 8) .

Задание 16.

	Условие задания.
1.	Написать уравнение гиперболы, имеющей эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$, если известно, что её фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$.
2.	Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $x+y=4$, вырезанной параболой $y^2=2x$.
3.	Написать каноническое уравнение эллипса, у которого эксцентриситет равен 0,8, а большая полуось больше малой полуоси на две единицы.
4.	Найти каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{40},2)$ и имеющей асимптоты $y=\pm\frac{1}{3}x$.
5.	В эллипс $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.
6.	Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(5,0)$ и $B(1,4)$, если центр её лежит на прямой $x+y=3$.
7.	Вычислить расстояние от центра окружности $x^2+y^2=10x$ до асимптот гиперболы $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$.
8.	Составить каноническое уравнение эллипса, сумма полуосей которого равна 8, а расстояние между фокусами равно 8.
9.	Найти расстояние от фокуса параболы $y=\frac{1}{8}x^2$ до прямой $3x+4y+2=0$.
10.	Написать уравнение гиперболы, имеющей эксцентриситет $\varepsilon=3/2$, если известно, что ее фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{\boldsymbol{x}^2}{15}+\frac{\boldsymbol{y}^2}{6}=1$.
11.	Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=4$, вырезанной параболой $\boldsymbol{y}^2=2\boldsymbol{x}$.

12.	Вычислить расстояние от фокуса гиперболы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ до ее асимптоты. Найти эксцентриситет этой гиперболы.
13.	Найти точки пересечения параболы $y^2=x$ с окружностью, которая проходит через начало координат, имеет центр на оси $0x$ и радиус, равный 5.
14.	Составить каноническое уравнение эллипса, правая вершина которого совпадает с правым фокусом гиперболы $8x^2-y^2=8$.Эллипс проходит через точки пересечения параболы $y^2=12x$ с гиперболой $8x^2-y^2=8$.
15.	Вычислить расстояние от фокуса гиперболы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ до ее асимптоты. Найти эксцентриситет этой гиперболы.
16.	Эллипс проходит через точку пересечения прямой $3x+2y-7=0$ с параболой $y^2=4x$ (взять точку с меньшей абсциссой). Оси эллипса совпадают с осями координат. Составить уравнение этого эллипса, если его эксцентриситет равен 0,6.
17.	Эксцентриситет гиперболы в 2 раза больше углового коэффициента ее асимптоты. Гипербола проходит через точку $M(3,-1)$, и ее действительная ось лежит на оси $0x$,а центр - в начале координат. Найти точки пересечения этой гиперболы с окружностью $x^2+y^2=10$.
18.	Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат, центр которой совпадает с фокусом параболы $y^2=8x$.
19.	Оси гиперболы совпадают с осями координат. Гипербола проходит через точки пересечения параболы $x^2=2y$ с прямой $x-2y+6=0$. Составить уравнение этой гиперболы.
20.	Найти точки пересечения параболы $y^2=4x$ с прямой, проходящей через фокус этой параболы параллельно ее директрисе.
21.	Через правый фокус гиперболы $4x^2-5y^2=20$ проведены прямые, параллельные ее асимптотам. Определить точки пересечения этих прямых с гиперболой.
22.	Фокусы гиперболы лежат в точках $F_1(-\sqrt{7},0)$ и $F_2(\sqrt{7},0)$. Гипербола проходит через точку $A\left(2,0\right)$. Найти уравнения ее асимптот.
23.	Найти параметр p параболы $y^2=2px$,если известно, что эта парабола проходит через точки пересечения прямой $y=x$ с окружностью $x^2+y^2-6x=0$.

24.	Дана гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку $M\,(4,6)$ и имеющего фокусы, которые совпадают с фокусами данной гиперболы.
25.	Найти точки пересечения параболы $y^2 = 8x$ с эллипсом, у которого правый фокус совпадает с фокусом этой параболы, большая полуось равна 4 и фокусы лежат на оси $0x$.
26.	Написать уравнение такой окружности, чтобы ее диаметром оказался отрезок прямой $x + y = 4$,заключенный между осями координат.
27.	Большая ось эллипса втрое больше его малой оси. Составить каноническое уравнение этого эллипса, если он проходит через точку $M\left(3,\sqrt{3}\right)$.
28.	Написать уравнение эллипса, проходящего через точку пересечения гиперболы $x^2 - y^2 = 2$ с прямой $x + y - 2 = 0$, если известно, что фокусы эллипса совпадают с фокусами гиперболы.
29.	Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ при условии, что ее эксцентриситет $\varepsilon = 1,25$.
30.	Написать уравнение окружности, проходящей через точки $M(3,0)$ и $N(-1,2)$, если известно, что её центр лежит на прямой $x - y + 2 = 0$.

Задание 17. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

	Задание
1.	$\mathbf{9x^2 + 16y^2 + 36x - 64y - 44 = 0}$
2.	$\mathbf{4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0}$
3.	$\mathbf{y^2 - 4x - 4y + 16 = 0}$
4.	$\mathbf{9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0}$
5.	$\mathbf{-9x^2 + 16y^2 + 54x + 32y - 209 = 0}$
6.	$\mathbf{y^2 + 2x - 2y - 7 = 0}$
7.	$\mathbf{x^2 - 4x + 4y = 0}$
8.	$\mathbf{9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y - 164 = 0}$

9.	$x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 18 = 0$
10.	$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$
11.	$-4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 31 = 0$
12.	$2x^2 + 4x - y - 1 = 0$
13.	$y^2 - 2y - x - 1 = 0$
14.	$3x^2 - 6x + y + 1 = 0$
15.	$4y^2 + x + 8y - 1 = 0$
16.	$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$
17.	$-9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 32 = 0$
18.	$9x^2 - 16y^2 + 90x + 64y + 161 = 0$
19.	$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 9 = 0$
20.	$4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 32 = 0$
21.	$4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y + 11 = 0$
22.	$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$
23.	$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$
24.	$4x^2 - 9y^2 - 40x - 36y + 28 = 0$
25.	$y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$
26.	$2x^2 + 4x - y - 1 = 0$
27.	$9x^2 + y^2 + 90x - 4y + 193 = 0$
28.	$x^2 - y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$
29.	$4x^2 - 3y^2 - 48x + 12y + 120 = 0$
30.	$x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 18 = 0$

Задание 18. Построить линию, определяемую уравнением

	Задание
1.	$x^2 - 6xy + y^2 - 10x - 2y - 11 = 0$
2.	$7x^2 - 10xy + 7y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$
3.	$x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x - 3y + 15 = 0$

4.	$x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$
5.	$x^2 + 2xy - 3y^2 + x + 3y = 0$
6.	$x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x - 6y = 0$
7.	$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 8x + 8y + 4 = 0$
8.	$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 2x - 11y + 8 = 0$
9.	$3x^2 + 4xy - 4x - 8y = 0$
10.	$3x^2 + 8xy + 3y^2 - 2x + 2y + 5 = 0$
11.	$4x^2 + 6xy + 4y^2 - 2x + 2y - 5 = 0$
12.	$16x^2 + 24xy + 9y^2 - 7x + 26y - 34 = 0$
13.	$2x^2 + 6xy + 2y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$
14.	$3x^2 + 4xy + 3y^2 - 6x - 4y - 2 = 0$
15.	$x^2 - 2xy + y^2 + x - 8y + 7 = 0$
16.	$19x^2 - 24xy + y^2 + 14x - 22y - 29 = 0$
17.	$21x^2 - 16xy + 9y^2 + 16x - 18y - 16 = 0$
18.	$x^2 + 2xy + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$
19.	$11x^2 - 16xy - y^2 - 26x - 22y - 61 = 0$
20.	$13x^2 - 8xy + 7y^2 + 18x + 6y - 3 = 0$
21.	$4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 20 = 0$
22.	$7x^2 + 12xy - 2y^2 + 4x + 32y - 38 = 0$
23.	$9x^2 + 4xy + 6y^2 - 32x + 4y + 24 = 0$
24.	$3x^2 - 10xy + 3y^2 - 16x + 16y + 24 = 0$
25.	$4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 6y - 5 = 0$
26.	$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 5 = 0$
27.	$2x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x + 6y + 15 = 0$
28.	$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 13y + 10 = 0$
29.	$5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$
30.	$4x^2 + 10xy + 4y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$

Задание 19. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

	Задание
1.	$-x^2-y^2+4xy+2x-4y+1=0.$
2.	$2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0.$
3.	$4xy+4x-4y=0.$
4.	$-2x^2-2y^2+2xy-6x+6y+3=0.$
5.	$-3x^2-3y^2+4xy-6x+4y+2=0.$
6.	$-2xy-2x-2y+1=0.$
7.	$-x^2-y^2-4xy-4x-2y+2=0.$
8.	$-4x^2-4y^2+2xy+10x-10y+1=0.$
9.	$4xy+4x-4y-2=0.$
10.	$x^2+y^2+2xy-8x-8y+1=0.$
11.	$x^2+y^2+4xy-8x-4y+1=0.$
12.	$x^2+y^2-2xy-2x+2y-7=0.$
13.	$2xy+2x+2y-3=0.$
14.	$4x^2+4y^2+2xy+12x+12y+1=0.$
15.	$3x^2+3y^2+4xy+8x+12y+1=0.$
16.	$x^2+y^2-8xy-20x+20y+1=0.$
17.	$3x^2+3y^2-2xy-6x+2y+1=0.$
18.	$4xy+4x+4y+1=0.$
19.	$3x^2+3y^2-4xy+6x-4y-7=0.$
20.	$-4xy-4x+4y+6=0.$
21.	$5x^2+5y^2-2xy+10x-2y+1=0.$
22.	$2x^2+2y^2+4xy+8x+8y+1=0.$
23.	$-x^2-y^2+2xy+2x-2y+1=0.$
24.	$2x^2+2y^2-4xy-8x+8y+1=0.$
25.	$3x^2+3y^2+2xy-12x-4y+1=0.$
26.	$-4xy+8x+8y+1=0.$
27.	$2x^2+2y^2-2xy+6x-6y-6=0.$
28.	$x^2+y^2+4xy+4x+2y-5=0.$
29.	$4xy+4x-4y+4=0.$
30.	$3x^2+3y^2-4xy+4x+4y+1=0.$

Задание 20. Привести уравнение кривой к каноническому виду. Изобразить кривую на чертеже в старой и в новой системах координат.

	Задание
1.	$2xy - 4x + 2y - 3 = 0$
2.	$x^2 - 6xy + y^2 - 8x + 8y + 8 = 0$
3.	$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$
4.	$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$
5.	$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$
6.	$32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$
7.	$11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$
8.	$7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$
9.	$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$
10.	$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$
11.	$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$
12.	$14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$
13.	$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$
14.	$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$
15.	$9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$
16.	$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$
17.	$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$
18.	$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$
19.	$16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0$
20.	$xy + 3x - 3y - 9 = 0$
21.	$3x^2 - 4xy + 4 = 0$
22.	$x^2 + 4xy + 4y^2 - 9 = 0$
23.	$x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$
24.	$8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$
25.	$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$
26.	$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 2x + 2y + 11 = 0$

27.	$x^2+2xy+y^2+2x+2y+1=0$
28.	$16x^2+24xy+9y^2-7x+26y-34=0$
29.	$3x^2+4xy-4x-8y=0$
30.	$19x^2-24xy+y^2+14x-22y-29=0$

Задание 21. Построить поверхности и определить их вид (название)

	Задание	
1.	а) $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$;	б) $x^2 + 4z = 0$;
2.	а) $3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$;	б) $x^2 + 2y^2 - 2z = 0$;
3.	а) $-5x^2 + 10y^2 - z^2 + 20 = 0$;	б) $y^2 + 4z^2 = 5x^2$;
4.	а) $4x^2 - 8y^2 + z^2 + 24 = 0$;	б) $x^2 - y = -9z^2$;
5.	а) $x^2 - 6y^2 + z^2 = 0$;	б) $7x^2 - 3y^2 - z^2 = 21$;
6.	а) $z = 8 - x^2 - 4y^2$;	б) $4x^2+9y^2+36z^2=72$;
7.	а) $4x^2 + 6y^2 - 24z^2 = 96$;	б) $y^2 + 8z^2 = 20x^2$;
8.	а) $4x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 40 = 0$;	б) $y = 5x^2 + 3z^2$;
9.	а) $x^2 = 8(y^2 + z^2)$;	б) $2x^2+3y^2-z^2=18$;
10.	а) $5z^2 + 2y^2 = 10x$;	б) $4z^2-3y^2-5x^2+60=0$;
11.	а) $x^2 - 7y^2 - 14z^2 - 21 = 0$;	б) $2y = x^2 + 4z^2$;
12.	а) $6x^2 - y^2 + 3z^2 - 12 = 0$;	б) $8y^2 + 2z^2 = x$;
13.	а) $-16x^2 + y^2 + 4z^2 - 32 = 0$;	б) $6x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$;
14.	а) $5x^2 - y^2 - 15z^2 + 15 = 0$;	б) $x^2 + 3z = 0$;
15.	а) $6x^2 + y^2 + 6z^2 - 18 = 0$;	б) $3x^2 + y^2 - 3z = 0$;
16.	а) $-7x^2 + 14y^2 - z^2 + 21 = 0$;	б) $y^2 + 2z^2 = 6x^2$;
17.	а) $-3x^2 + 6y^2 - z^2 - 18 = 0$;	б) $x^2 - 2y = -z^2$;
18.	а) $4x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 0$;	б) $4x^2-y^2- 3z^2 = 12$;
19.	а) $z = 4 - x^2 - y^2$;	б) $3x^2+12y^2+4z^2=48$;
20.	а) $4x^2 + 5y^2 - 10z^2 = 60$;	б) $7y^2 + z^2 = 14x^2$;
21.	а) $9x^2 - 6y^2 - 6z^2 + 1 = 0$;	б) $15y = 10x^2 + 6y^2$;
22.	а) $x^2 = 5(y^2 + z^2)$;	б) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 36$;
23.	а) $4x^2 + 3y^2 = 12x$;	б) $3x^2-4y^2-2z^2+12=0$;
24.	а) $8x^2 - y^2 - 2z^2 - 32 = 0$;	б) $y - 4z^2 = 3x^2$;
25.	а) $x^2 - 6y^2 + z^2 - 12 = 0$;	б) $x - 3z^2 = 9y^2$;
26.	а) $2x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 30 = 0$;	б) $2x^2 + 3z = 0$;
27.	а) $7x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 42 = 0$;	б) $2x^2 + 4y^2 - 5z = 0$;
28.	а) $-4x^2 + 12y^2 - 3z^2 + 24 = 0$;	б) $2y^2 + 6z^2 = 3x$;
29.	а) $3x^2 - 9y^2 + z^2 + 27 = 0$;	б) $z^2 - 2y = -4x^2$;
30.	а) $27x^2 - 63y^2 + 21z^2 = 0$;	б) $3x^2-7y^2 - 2z^2 = 42$.

Задание 22. Определить вид и параметры поверхности второго порядка.

	Задание
1.	$3x^2+3y^2+3z^2-6x+9y-12z-7=0$
2.	$4x^2+4y^2+4z^2-8x+12y-16z-1=0$
3.	$3x^2+4y^2+6z^2-6x+16y-36z+49=0$
4.	$2x^2+3y^2-6z^2-8x-6y-12z-1=0$
5.	$4x^2+9y^2+36z^2+8x+36y-72z+40=0$
6.	$x^2+2y^2-4z^2-6x+4y+32z-40=0$
7.	$x^2+2y^2+2z^2-2x+12y-8z+31=0$
8.	$2x^2+4y^2-z^2+2x-4y-8z-3=0$
9.	$x^2-2y^2+3z^2-4x+4y-6z-1=0$
10.	$x^2-4y^2+z^2-2x+12y-4z-3=0$
11.	$2x^2+y^2-2z^2+16x-2y+4z+17=0$
12.	$3x^2+4y^2-12x+8y-24z+136=0$
13.	$6x^2+3y^2-2z^2+24x-6y-4z+25=0$
14.	$2x^2-3y^2+12x+12y-12z-42=0$
15.	$x^2+2y^2+4z^2-4x+4y-8z+10=0$
16.	$x^2+2y^2+6x-18y+8z+49=0$
17.	$x^2+2y^2-4z^2+2x-4y-24z-34=0$
18.	$3x^2-4y^2+6z^2-18x-8y+12z+29=0$
19.	$-2x^2+3y^2+4z^2+4x+12y+8z+22=0$
20.	$2x^2+3y^2+16x-18y-12z+47=0$
21.	$x^2-2y^2+6x+4y-8z+47=0$
22.	$3x^2+2z^2+6x+4y-8z-1=0$
23.	$-4x^2+3y^2+2z^2+12x-6y+8z-1=0$
24.	$-2y^2+z^2-8x-4y-2z+23=0$
25.	$2y^2+z^2-8x-4y+2z-13=0$

26.	$\mathbf{3x^2-4y^2-6z^2-18x-18y-12z+17=0}$
27.	$\mathbf{y^2-2z^2+2y+4z-5=0}$
28.	$\mathbf{x^2+4x-3z+13=0}$
29.	$\mathbf{2y^2+z^2-4y+2z-1=0}$
30.	$\mathbf{x^2-8x+7=0}$

Задание 23 . Изобразить тело, ограниченное данными поверхностями. Указать тип поверхностей, ограничивающих тело.

	Задание
1.	$z=x^2+y^2-4,\ z=\sqrt{4-x^2-y^2}$
2.	$x^2+y^2=4,\ z=2-y,\ z=0$
3.	$y=x^2+z^2-4, y=0$
4.	$x^2+y^2=4, z=8-x^2-y^2,\ z=0$
5.	$z=x^2+y^2-8,\ z=-2\sqrt{x^2+y^2}$
6.	$x^2+z^2=4, y=2-\sqrt{x^2+z^2}, y=-4$
7.	$z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=x^2+y^2-4,\ y=0\ (y\le 0)$
8.	$y=2\sqrt{x^2+z^2}, y=-4-\sqrt{4-x^2-z^2}$
9.	$x^2+y^2=4,\ z=y+2,\ z=0$
10.	$x^2+z^2=1,\ z=1-y,\ y=0$
11.	$z=4-\sqrt{x^2+y^2},\ z=0$
12.	$x^2+y^2=4,\ \ z-y=4,\ \ z=0$
13.	$x^2+z^2=4, z=6-y,\ y=0$
14.	$z=x^2+y^2-4,\ z=\sqrt{4-x^2-y^2}$
15.	$y=x^2+z^2-4,\ y=0$
16.	$z=x^2+y^2-4,\ z=\sqrt{4-x^2-y^2}$
17.	$y=x^2+z^2-4, y=0$
18.	$z=-\sqrt{4-x^2-y^2}, z=-2\sqrt{x^2+y^2}+4$
19.	$x^2+z^2=4, y=\sqrt{4-x^2-z^2}, y=-4$
20.	$z^2=x^2+y^2, z=-2, z=4$
21.	$y=2\sqrt{x^2+z^2}, y=4$

22.	$y^2 = x^2 + z^2, y = -2, y = 4$
23.	$x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = y \ (z \le y)$
24.	$x^2 + y^2 = 4,\ z = 2 - y,\ z = 0$
25.	$x^2 + z^2 = 4 \ (0 \le y \le 4), y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}, y = 4$
26.	$z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 4$
27.	$y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}, y = 0$
28.	$z = x^2 + y^2, z = 4$
29.	$y = x^2 + z^2, y = 4$
30.	$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$

Задание 24. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат. Сделать рисунок.

	Задание
1.	**а) $x^2 - y^2 = 6$, Ox ; б) $y^2 = 2z$, Oz ;**
2.	**а) $3x^2 = -4y$, Oz ; б) $4x^2 + 3z^2 = 12$, Oz;**
3.	**а) $3x^2 = -2z$, Oz ; б) $8x^2 + 11z^2 = 88$, Ox;**
4.	**а) $3x^2 = -2z$, Oz ; б) $8x^2 + 11z^2 = 88$, Ox;**
5.	**а) $2y^2 = 72$, Oz ; б) $6y^2 + 5z^2 = 30$, Oy ;**
6.	**а) $3x^2 - 8y^2 = 288$, Ox ; б) $x = 5$, $z = -3$, Oy ;**
7.	**а) $5z = -x^2$, Oz ; б) $3y^2 + 18z^2 = 1$, Oz ;**
8.	**а) $15y^2 - x^2 = 6$, Oy ; б) $y = 5$, $z = 2$, Oy ;**
9.	**а) $y^2 = 5z$, Oz ; б) $3x^2 + 7y^2 = 21$, Ox ;**
10.	**а) $15x^2 - 3y^2 = 1$, Ox ; б) $x = 3$, $y = 4$, Oz ;**
11.	**а) $x^2 + 2z = 4$, Oz ; б) $x = 3$, $z = -1$, Oy ;**
12.	**а) $x^2 - 9y^2 = 9$, Ox ; б) $3y^2 = z$, Oz ;**
13.	**а) $x^2 = -5y$, Oy ; б) $2x^2 + 3z = 6$, Oz ;**
14.	**а) $2y^2 - 5z = 10$, Oz ; б) $y = 2$, $z = 6$, Ox ;**
15.	**а) $2x^2 = z$, Oz ; б) $x^2 + 4z^2 = 4$, Ox ;**
16.	**а) $7x^2 - 5y^2 = 35$, Ox ; б) $x = -1$, $y = -3$, Oz ;**
17.	**а) $y^2 = -4z$, Oz ; б) $3y^2 + z^2 = 6$, Oy ;**
18.	**а) $z^2 = 2y$, Oy ; б) $2x^2 + 3z^2 = 6$, Oz ;**
19.	**а) $5x^2 - 6z^2 = 30$, Ox ; б) $x = 3$, $z = -2$, Oy ;**
20.	**а) $x^2 = -4z$, Oz ; б) $y^2 + 4z^2 = 4$, Oy ;**
21.	**а) $y^2 - 5x^2 = 5$, Oy ; б) $y = 3$, $z = 1$, Ox ;**

22.	**а) $y^2 = 3z$, Oz ; б) $2x^2 + 3z^2 = 6$, Ox ;**
23.	**а) $3x^2 - 5z^2 = 15$, Oz ; б) $z = -1$, $y = 3$, Ox ;**
24.	**а) $x^2 + 3z^2 = 9$, Oz ; б) $x = 4$, $z = 6$, Oy ;**
25.	**а) $2x^2 - 6y^2 = 12$, Ox ; б) $y^2 = 4z$, Oz ;**
26.	**а) $x^2 = 3y$, Oy ; б) $3x^2 + 4z^2 = 24$, Oz ;**
27.	**а) $3y^2 - 4z^2 = 12$, Oz ; б) $y = 4$, $z = 2$, Ox ;**
28.	**а) $x^2 = -3z$, Oz ; б) $3x^2 + 5z^2 = 15$, Ox ;**
29.	**а) $4x^2 - 3y^2 = 12$, Ox ; б) $x = 1$, $y = 2$, Oz ;**
30.	**а) $y^2 = 2z$, Oz ; б) $9y^2 + 4z^2 = 36$, Oy.**

Литература.

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1975.
2. Фролов С. В., Шостак Р. Я. Курс высшей математики. М.:Высшая школа, 1983.
3. Размыслович Г.П., Фадеев М.М., Ширяев В.М. Геометрия и алгебра. Мн.: из-во Университетское,1987.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1981.
5. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. М.: из-во МГТУ, 2002.
6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 1975.
7. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа, 1980.
8. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Мн.:Высшая школа, 1987.
9. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1980.
10. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1976.
11. Наумов В.А. Руководство к решению задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.М.: Наука, 1993
12. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. М., Высшая школа, 1994.