Министерство образования РФ
Уральский государственный технический университет – УПИ
Нижнетагильский технологический институт

С.Е.Демин, Е.Л.Демина

Функции и пределы
(конспект лекций)

г. Нижний Тагил 2003 г.

1. Элементы теории множеств

1.1. Элементы математической логики. Виды теорем

Утверждение, относительно которого известно, истинно оно или ложно, будем называть **высказыванием**.

При записи математических предложений и рассуждений полезно использовать экономную логическую символику. Мы будем пользоваться следующими логическими знаками или символами:

Дизъюнкция "$\vee$" (логическое сложение) соответствует в обычном языке союзу "или" и по определению истинно в том и только том случае, когда по крайней мере одно из высказываний A или B является истинным.

Конъюнкция "$\wedge$" (логическое умножение) соответствует в обычном языке союзу "и" и по определению истинно в том и только том случае, когда оба высказывания A и B истинны.

Импликация $\Rightarrow$ соответствует в обычном языке союзу " если..., то...". Запись $A \Rightarrow B$ означает: " если A, то B".

Отрицание $\overline{}$ соответствует в обычном языке союзу "не".

Эквиваленция $\Leftrightarrow$ соответствует выражениям "тогда и только тогда", "необходимо и достаточно", "равносильно".

Квантор общности $\forall$: "для всех", "для каждого". (Символ "$\forall$" произошел от англ. any - любой). Выражение $\forall X{:}P(X)$ означает: "для любого (каждого) X имеет место P(X)". Например, запись $\forall x$: $\sin x = 0$ означает, что для любого (каждого) x выражение $\sin x = 0$ (высказывание, очевидно, ложное).

Квантор существования $\exists$: "существует". (Символ "$\exists$" - перевернутое "E" - произошел от англ. Existence - существование). Запись $\exists$ X: P(X) означает: "существует" X такой, что имеет место P(X)". Например, $\exists$ x: $\sin x = 0$ означает, что существует такой x, что $\sin x = 0$ (высказывание, очевидно, истинное).

Если данную теорему записать в виде $A \Rightarrow B$, то теорему $B \Rightarrow A$ называют **обратной** для данной теоремы.

Если данная (прямая) теорема верна, обратная теорема, вообще говоря неверна.

В теореме $A \Rightarrow B$: B- необходимове условие для A, A - достаточное условие для B.

Для теоремы $A \Rightarrow B$ теорема $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ называется **противоположной**, а теорема $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ - противоположной для обратной $B \Rightarrow A$.

Оказывается, что теорема $A \Rightarrow B$ равносильна противоположной для обратной, т.е.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}).$$

На этой равносильности основывается метод доказательства от противного.

1.2. Понятие множества

В этом пункте вводятся основные обозначения и начала теории множеств, сформулированной немецким математиком Г. Кантором. Понятие множества принадлежит к числу простейших математических понятий.

Множество – набор, совокупность каких-либо объектов, называемых его **элементами**.

В каждом случае мы выделяем из всевозможной совокупности объектов некоторый класс этих объектов, обладающих определёнными, им присущими, свойством. Этот класс объектов мы называем **множеством**, отвлекаясь, в дальнейшем, от природы этих объектов. Так, можно говорить о множестве точек на прямой, множестве сторон многоугольника, множестве решений уравнения.

Множества мы будем обозначать прописными буквами **A,B,C**, а их элементы малыми **a,b,c**.

Если некоторое множество А состоит из элементов **a,b,c**, то это записывается так: $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

Утверждение «элемент a принадлежит множеству A» символически записывается так: $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$; запись $\mathbf{a} \notin \mathbf{A}$ означает, что элемент не принадлежит множеству.

Очевидно, что утверждения $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{a} \notin \mathbf{A}$ не могут выполняться одновременно.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается $\varnothing$.

Множества, элементами которых являются числа, называются **числовыми.**

Например:

1). $\mathbf{N} = \{1,2,3,...,n...\}$ - множество натуральных чисел.

2). $\mathbf{Z} = \{ ..., -n,...,-2, -1, 0, 1, 2, 3,..., n...\} = \{-n\} \cup \{0\} \cup \{n\}$- множество целых чисел.

3). Множество рациональных чисел $\mathbf{Q} = \{\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\}$, где $p \in Z$, $q \in Z$, $q \neq 0$

4). Множество действительных чисел **R.**

5). Множество комплексных чисел $\mathbf{C} = \{a+i \cdot b\}$, $a,b \in R$, $i^2 = -1$.

Множества можно задать несколькими способами:

1. Перечисление всех элементов множества.

Если, например, A состоит из элементов $a_1, a_2, a_3,...,a_n$, то пишут $A= \{ a_1, a_2, ,...,a_n\}$

Например, множество натуральных чисел $\mathbf{N}= \{1, 2,3, 4,...,n,...\}$, множество целых чисел $\mathbf{Z}= \{..., -n,..., -1, 0, 1, 2, 3,...,,n,...\}$.

2. Использование обозначения любого элемента.

Например, $\mathbf{N} = \{n\}$, $\mathbf{X} = \{x\}$, $\mathbf{Y} = \{y\}$.

3. Задание множества указанием свойств его элементов.

Пусть P(x) - какое-либо свойство числа x. Тогда запись $E = \{x | P(x)\}$ означает множество всех точек, которые обладают свойством P(x).

Например, $E = \{x | x^2 - 1 \le 0\} = \{x | \ |x| \le 1\}$.

Множество A называется **подмножеством** B, если каждый элемент множества A является одновременно и элементом множества B. Обозначение $A \subset B$ или $B \supset A$. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B$ (рис. 1.1.)

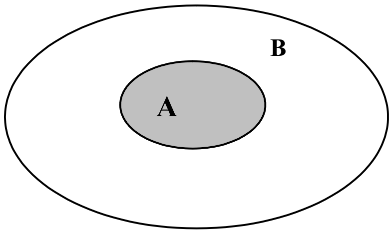


Рис. 1.1.

Множества A и B называются **равными** и пишутся A = B, если $A \subset B$ и $B \subset A$, т.е.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A,$$

т.е. равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Если в данной задаче рассматриваются только множества, составленные из элементов некоторого множества U, то множество U называется универсальным множеством. Так, для задач арифметики универсальное множество – множество рациональных чисел, в задаче выбора старосты группы универсальное множество – множество студентов этой группы.

Рассмотрим операции над множествами. Предположим, что все рассматриваемые в дальнейшем множества являются подмножествами универсального множества **U,** которое для наглядности будем изображать в виде прямоугольника.

Объединением множеств A и B называется множество $\boldsymbol{C = A \bigcup B}$, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств A или B.

$$(\mathbf{x} \in (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})) \Leftrightarrow (\mathbf{x} \in \mathbf{A}) \vee (\mathbf{x} \in \mathbf{B}).$$

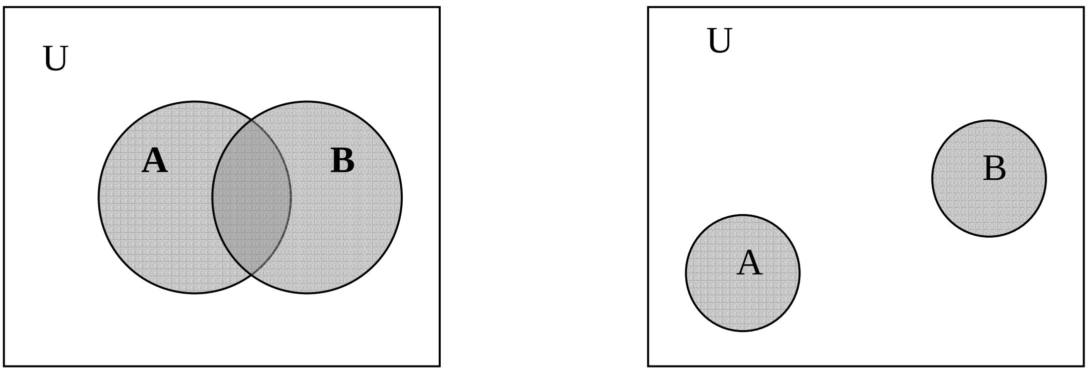


Рис.1.2. Заштрихованное множество $\boldsymbol{C = A \bigcup B}$

Очевидно, что $\mathbf{A} \cup \varnothing = \mathbf{A}$, $\mathbf{U} \cup \mathbf{A} = \mathbf{U}$.

Пересечением множеств **A** и **B** называют множество $\boldsymbol{C = A \cap B}$, элементы которого принадлежат одновременно и **A**, и **B**.

$$(\mathbf{x} \in (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})) \Leftrightarrow (\mathbf{x} \in \mathbf{A}) \wedge (\mathbf{x} \in \mathbf{B}).$$

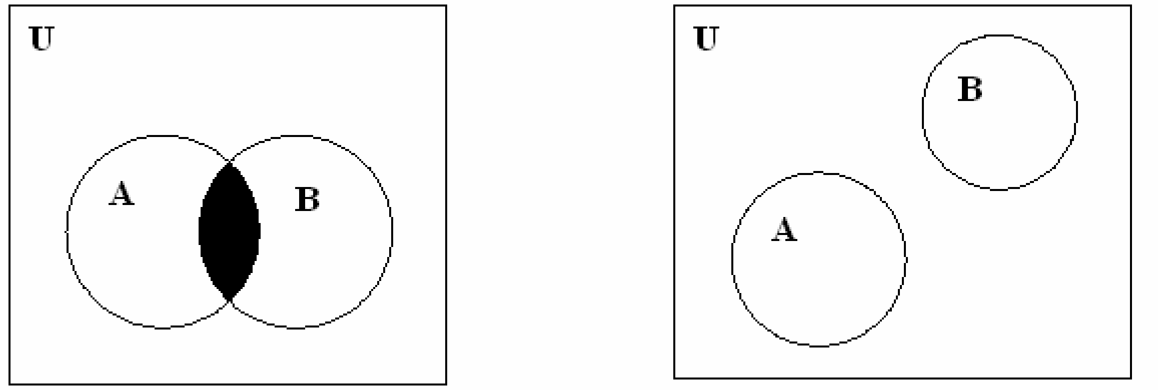


Рис.1.3. Заштрихованное множество $\boldsymbol{C = A \cap B}$.

Очевидно, что $\mathbf{A} \cap \varnothing = \varnothing$, $\mathbf{U} \cap \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Разностью множеств A и B называется такое множество $\boldsymbol{C = A \setminus B}$, составленное из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

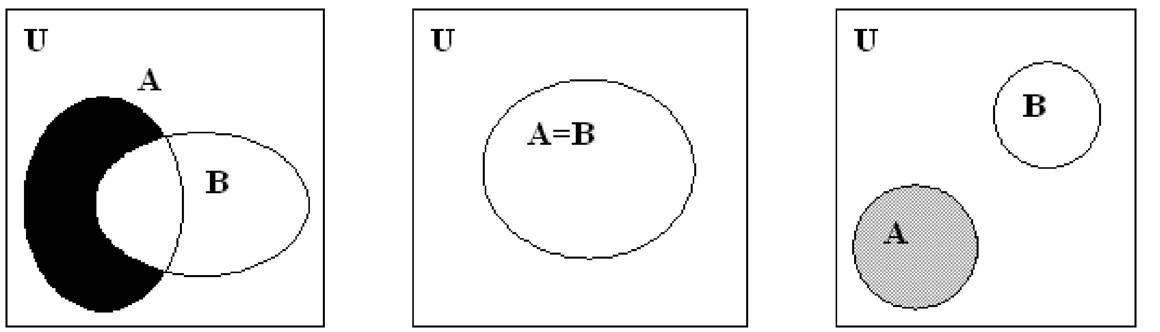


Рис.1.4. Заштрихованное множество $\boldsymbol{C = A \setminus B}$.

1.3. Вещественные числа (множество R)

Рассмотрим множество вещественных (действительных) чисел **R**. Очевидно, что множества **N**, **Z** и **Q** являются его подмножествами. Вещественные числа изображаются точками на числовой оси. В свою очередь каждой точке на числовой оси соответствует некоторое вещественное число. Такое взаимно-однозначное соответствие между вещественными числами и точками на числовой оси позволяет в дальнейшем любое вещественное число называть точкой. Множество вещественных чисел **R** дополняется элементами, обозначенными "$-\infty$" и "$+\infty$", которые называются соответственно "**минус бесконечностью**" и "**плюс бесконечностью**", причем, по определению считаем, что $-\infty < +\infty$, а также для любого числа $a \in$ **R** справедливы неравенства $-\infty < a < +\infty$. Бесконечности $-\infty$ и $+\infty$ иногда называют бесконечными числами. Множество вещественных чисел **R**, дополненное элементами $-\infty$ и $+\infty$, называется **расширенным множеством вещественных чисел** или **расширенной числовой прямой** и обозначается $\overline{\mathbf{R}}$. Элементы $-\infty$ и $+\infty$ называются бесконечно удаленными точками расширенной числовой прямой.

Напомним теперь важное для нас определение абсолютной величины вещественного числа или его модуля и рассмотрим его свойства.

Абсолютной величиной числа a, или его **модулем**, называется неотрицательное число, которое обозначается $|\mathbf{a}|$ и определяется так:

$$|\mathbf{a}| = \begin{cases} \mathbf{a}, \text{ если } \mathbf{a} \geq 0; \\ -\mathbf{a}, \text{ если } \mathbf{a} < 0. \end{cases}$$

С точки зрения геометрии $|a|$ дает нам расстояние от точки, изображающей число **a** на числовой оси, до начала координат.

Заметим, что при любом расположении точек x_1 и x_2 на числовой прямой $|x_1 - x_2|$ или $|x_2 - x_1|$ дает нам расстояние между точками x_1 и x_2. В этом нетрудно убедиться, если принять во внимание определение модуля вещественного числа (рис. 1.5.).

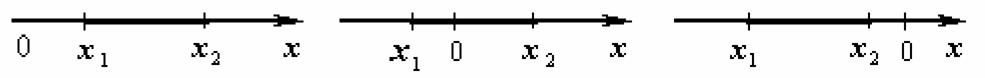


Рис.1.5.

Свойства абсолютных величин:

1. $-|\mathbf{a}| \leq \mathbf{a} \leq |\mathbf{a}|$.

Действительно, в силу определения,

если $a \geq 0$, то $-|a| < a = |a|$;

если $a < 0$, то $-|a| = a < |a|$.

Объединив эти неравенства, получим $-|a| \leq a \leq |a|$.

2. $|\mathbf{a}| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < \mathbf{a} < \alpha$.

Действительно, в силу первого свойства $-|a| \leq a \leq |a|$, но $|a| < \alpha \Rightarrow -\alpha < -|a|$. Итак, $-\alpha < -|a| \leq a \leq |a| < \alpha \Rightarrow -\alpha < a < \alpha$.

3. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

Для доказательства снова воспользуемся первым свойством, из которого следует, что $-|a| \leq a \leq |a|$, $-|b| \leq b \leq |b|$. Неравенства одного знака можно почленно складывать, следовательно, $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|)$. В силу второго свойства это можно записать так: $|a+b| \leq |a| + |b|$.

4. $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$.

Для доказательства обозначим $a-b = c \Rightarrow a = b+c$, но

$|b+c| \le |b| + |c| \Rightarrow |a| \le |b| + |a-b| \Rightarrow |a-b| \ge |a| - |b|$.

5. $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$. $\left|\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right| = \dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$, $\mathbf{b} \ne 0$

1.4. Промежутки вещественных чисел. Окрестности

Рассмотрим некоторые основные подмножества множества вещественных чисел, которые нам будут часто встречаться в дальнейшем.

Пусть a, b$\in$ **R**, тогда множество {x: a ≤ x ≤ b} называется **отрезком** числовой прямой или **замкнутым промежутком** (сегментом) и обозначается [a; b], т. е. $[\mathbf{a};\mathbf{b}] = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$.

Числовые множества $[\mathbf{a};\mathbf{b}[= \{\mathbf{x} : \mathbf{a} \le \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$ и $]\mathbf{a};\mathbf{b}] = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} < \mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$ называются **полуинтервалами**.

Числовое множество $]\mathbf{a};\mathbf{b}[= \{\mathbf{x} : \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$ называется **интервалом**, или **открытым промежутком**.

Тот факт, что переменная x принадлежит рассмотренным множествам, записывается так: $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}; \mathbf{b}] \Leftrightarrow \mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{b}$, в частности,

$\mathbf{x} \in [-\mathbf{a}; \mathbf{a}] \Leftrightarrow -\mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{a} \Leftrightarrow |\mathbf{x}| \le \mathbf{a}$;

$\mathbf{x} \in [\mathbf{a}; \mathbf{b}[\Leftrightarrow \mathbf{a} \le \mathbf{x} < \mathbf{b}$;

$\mathbf{x} \in]\mathbf{a}; \mathbf{b}[\Leftrightarrow \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}$.

Совершенно аналогично вводятся **бесконечные** и **полубесконечные** интервалы $[\mathbf{a}; +\infty[$, $]\mathbf{a}; +\infty[$, $]-\infty; \mathbf{a}]$, $]-\infty; +\infty[$.

Определим теперь важное для нас подмножество множества вещественных чисел, которым мы часто будем пользоваться: **ε-окрестность** точки x_0, причем точка x_0 может иметь как конечное, так и бесконечное значение.

ε-окрестность точки $\mathbf{x_0}$ обозначается $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{x_0}) \equiv \mathbf{U}(\mathbf{x_0},\varepsilon)$:

$\mathbf{U}_\delta(\mathbf{x_0}) = \{\forall \mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| < \varepsilon\}$.

ε -окрестность точки $\mathbf{x_0}$, из которой удалена точка $\mathbf{x_0}$, называется **проколотой ε - окрестностью** точки $\mathbf{x_0}$ и обозначается $\mathbf{O}_\varepsilon(\mathbf{x_0}) \equiv \mathbf{O}(\mathbf{x_0},\varepsilon)$:

$\mathbf{O}_\varepsilon(\mathbf{x_0}) = \{\forall \mathbf{x} : \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| < \varepsilon\}$. ($\mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| < \varepsilon$ - показывает что $\mathbf{x} \ne \mathbf{x_0}$).

Если $x_0 \in$ **R**, то ее ε - **окрестностью** называется интервал $]\mathbf{x_0} - \varepsilon; \mathbf{x_0} + \varepsilon[$ (рис. 1.6.,а).

Если x_0 - конечное вещественное число, т. е. $x_0 \in$ **R**, то его правосторонней ε-**окрестностью** называется интервал $]\mathbf{x_0}, \mathbf{x_0}+\varepsilon[$, (рис. 1.6.,б).

Аналогично определяется левосторонняя ε-окрестность точки $x_0 \in$ **R** : (рис. 1.6.,в).

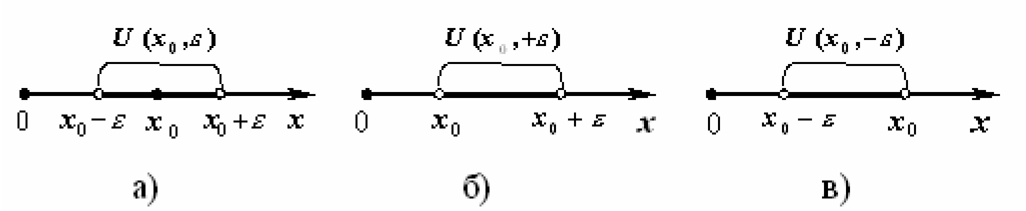


Рис. 1.6.

Рассмотрим теперь несобственные точки $-\infty$ и $+\infty$.

Если $x_0 \in \infty$, то ее ε - **окрестностью** называется интервал $\mathbf{x} > \frac{1}{\varepsilon}$.

Если $x_0 \in -\infty$, то ее ε - **окрестностью** называется интервал $\mathbf{x} < -\frac{1}{\varepsilon}$.

Рассмотрим теперь некоторое подмножество множества вещественных чисел $X \subset \mathbf{R}$.

Точка $x \in X$ называется **внутренней точкой множества** X, если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью.

Точка x называется **граничной точкой множества** X, если любая окрестность этой точки содержит как точки, принадлежащие множеству X, так и точки, ему не принадлежащие.

Если для подмножества $X \subset \mathbf{R}$ существует такое число $b \subset \mathbf{R}$, что оно не меньше любого числа $x \in X$, т. е. $(\forall x \in X) : (x \le b)$, то множество X называется **ограниченным сверху**, а число b - **числом, ограничивающим множество** X **сверху**.

Аналогично определяется подмножество чисел, ограниченное снизу.

Рассмотрим множество $\mathbf{X} = \left]\mathbf{x_0} - \varepsilon; \mathbf{x_0} + \varepsilon\right[$.

Это множество имеет две граничные точки $x_1 = x_0 - \varepsilon$ и $x_2 = x_0 + \varepsilon$. Любая δ-окрестность этих точек ($\delta > 0$, δ мало) содержит как точки, принадлежащие интервалу $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, так и точки, ему не принадлежащие. Заметим, что каждая из граничных точек x_1 и x_2 множеству X не принадлежит. Очевидно также, что множество X ограничено как сверху, так и снизу (рис. 1.7.).

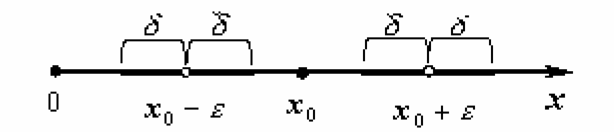


Рис. 1.7.

Среди всех чисел, ограничивающих сверху (снизу) данное множество, наибольшее и наименьшее из них имеет специальное название.

Наименьшее из всех чисел, ограничивающих сверху множество $X \subset \mathbf{R}$, называется его **верхней гранью** и обозначается supX или sup{x} (sup - от лат. supremum - наибольший).

Наибольшее из всех чисел, ограничивающих снизу множество $X \subset \mathbf{R}$, называется его **нижней гранью** и обозначается infX или inf{x} (inf - от лат. infimum - наименьший).

2. Функция

В математическом анализе изучаются главным образом переменные величины во взаимной связи между собой. Одним из основных понятий математического анализа является понятие функции.

Пусть имеются множество $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}\}$ и множество $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}\}$ и пусть также каждому элементу $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ по какому-либо закону $\mathbf{f}$ поставлен в соответствие элемент $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Тогда соответствие $\mathbf{f : x \to y}$ или $\mathbf{y = f(x)}$ называется **функцией** с областью определения $\mathbf{X}$ и областью значений $\mathbf{Y}$, при этом $\mathbf{x}$ называется независимой переменной или аргументом функции $\mathbf{f(x)}$, $\mathbf{y}$ называется зависимой переменной или значением функции.

Традиционно область определения обозначают $\mathbf{X = D(f)}$.

Если $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \quad \exists \mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{f(x) = y}$, то $\mathbf{Y}$ называется **множеством значений функции** и обозначается $\mathbf{E(f)}$.

Если каждому $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ соответствует одно значение $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, то функция $\mathbf{y = f(x)}$ называется **однозначной**, в противном случае – **многозначной**.

В дальнейшем, как правило, мы будем изучать однозначные функции.

Для значения функции при $\mathbf{x = x_0}$ используется запись:

$$\mathbf{f(x)}\Big|_{\mathbf{x=x_0}} = \mathbf{f(x_0)}.$$

2.1. Способы задания функции

Существует 3 способа задания функции:

1. аналитический,
2. табличный,
3. графический.

Рассмотрим каждый из них в отдельности.

Аналитический способ – способ задания, при котором числовые функции могут задаваться формулами на различных промежутках или интервалах, принадлежащих множеству определения функции. При этом могут встретиться такие ситуации.

1. Функция $\mathbf{y = f(x)}$ может быть задана одной формулой, например, $\mathbf{y = 2x^2 + 6\sin x}$.

2. Функция $\mathbf{y = f(x)}$ может быть задана несколькими формулами на раз-

ных областях определения: $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2}, & \mathbf{3 < x < 0} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{bx}, & \mathbf{x < 0} \end{cases}$.

3. В том случае, если не удается явно выразить y через x, а удается только указать зависимость между функцией и аргументом в виде $\mathbf{F(x, y) = 0}$, то такой способ задания называется **неявным аналитическим**.

Например, функция $\mathbf{x^2 + y^2 = 4}$ представляет собой уравнение окружности с центром в начале координат и радиуса, равного 2.

Табличный способ – способ, при котором некоторому множеству значений аргумента из множества определения функции удается поставить в соответствие множество значений функции с помощью каких-либо замеров.

Графический способ – способ, при котором функция задается в виде графика, выполненного в некоторой системе координат. Анализируя особенности этого графика, можно сделать выводы о свойствах функции.

Графиком функции $\mathbf{y = f(x)}$ называется геометрическое место точек плоскости с координатами $\mathbf{(x, f(x))}$, т.е. $\mathbf{\Gamma(f) = \{(x, f(x)), x \in X\}}$ (рис. 2.1.).

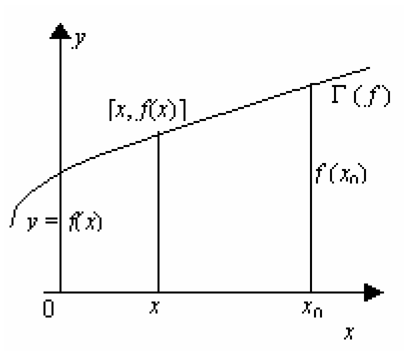


Рис.2.1.

Например, при снятии электрокардиограммы, осциллограммы, на ленте сразу появляется график изменения измеряемой величины. Тогда решают задачу оцифровки или дискретизации графика.

2.2. Классификация функций

В зависимости от типа функциональной зависимости функции делятся на следующие виды.

1. **Многочлены** или **целые рациональные функции**.

Многочленом целой рациональной функции или полиномом относительно переменной x называется функция вида

$$\mathbf{y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n},$$

где $\mathbf{a_0, a_1 ... a_n}$ – постоянные, называются коэффициентами многочлена.

Самая высокая степень x называется **степенью** многочлена. Областью определения многочлена является вся действительная ось.

При $\mathbf{n=0}$ имеем $\mathbf{y=a_0}$, где $\mathbf{a_0}$ – число. Графиком служит прямая, параллельная оси 0x и отсекающая от оси 0Y отрезок $\mathbf{a_0}$.

При $\mathbf{n=1}$ имеем $\mathbf{y=a_1x+a_0}$. Графиком служит прямая, зависимость называется **линейной.** Эта прямая наклонена к оси 0X под углом φ , для которого $\mathbf{tg\varphi=a_1}$, поэтому a_1 называется **угловым** коэффициентом.

При $\mathbf{n=2}$ имеем многочлен второй степени $\mathbf{y=a_2x^2+a_1x+a_0}$, графиком которой называют параболу, направленную ветвями вдоль оси 0Y для $\mathbf{a_0>0}$.

2. **Дробно-рациональные функции**.

Дробно-рациональной функцией относительно x называется функция, которую можно представить в виде отношения двух многочленов относительно переменной x, т.е.

$$\mathbf{y=\frac{a_0+a_1x+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+...+b_mx^m}},$$

где $\mathbf{a_0,a_1,...,a_n}$, $\mathbf{b_0,b_1,...,b_m}$ – постоянные.

Эта функция определена для всех значений x,кроме тех, для которых знаменатель не равен нулю.

Функция вида $\mathbf{y=\dfrac{A_1x+A_0}{B_1x+B_0}}$, где $\mathbf{A_0,A_1,B_0,B_1}$ – постоянные, причем $\mathbf{B_0\neq0}$ и $\mathbf{A_0B_1\neq A_1B_0}$ называется дробно-рациональной функцией от **x**. Графиком такой функции является гипербола (рис. 2.2.).

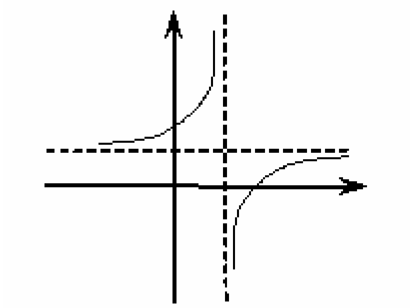


Рис.2.2.

3. Алгебраические функции.

Алгебраической функцией называют функцию, полученную из аргумента и действительных чисел с помощью алгебраических операций (сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечение корня), а также любую неявную функцию, связанную с аргументом алгебраическим уравнением какой-нибудь степени.

Из определения следует, что всякая рациональная функция относительно x является алгебраической.

Частным случаем алгебраической функции является степенная функция вида

$$\mathbf{y = x^a},$$

где **a** – рациональное число, т.е. $\mathbf{a = \frac{p}{g}}$, где **p** и **g** – целые числа.

Алгебраические функции, полученные из аргумента и действительных чисел с помощью алгебраических операций над степенными функциями с дробным показателем и не являющиеся рациональными, называют **иррациональными.** Иррациональные функции содержат операцию извлечения корня, например, $\mathbf{y = \frac{1+x}{\sqrt[3]{x+2}}}$.

4. **Трансцендентные функции.**

Трансцендентными функциями называются все функции, не относящиеся к первым трем указанным типам, т.е. не являющиеся алгебраическими.

Рассмотрим некоторые типы функций.

а) показательная функция, т.е. функция вида $\mathbf{y = a^x}$,
где a – любое число. График этой функции изображен на рис. 2.3.

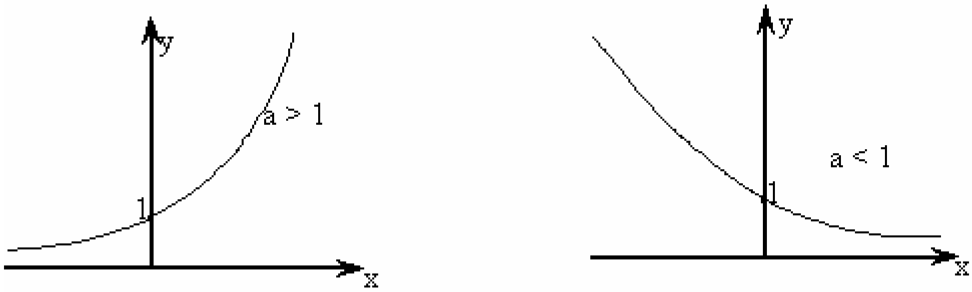


Рис.2.3.

Областью определения функции является вся действительная ось, а областью изменения множество положительных чисел.

б) логарифмическая функция, т.е. функция вида $\mathbf{y = \log_a x}$, где $\mathbf{a > 0}$ и $\mathbf{a \neq 1}$ при $\mathbf{x > 0}$. Эта функция является обратной к показательной.

Областью определения функции является множество положительных чисел, а областью изменения – вся действительная ось. График функции изображен на рис. 2.4.

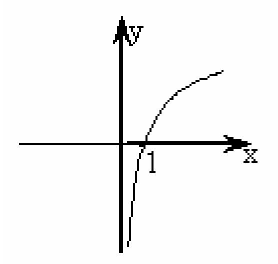


Рис.2.4.

5. **Тригонометрические функции.**

К функциям этого вида относятся

$$\mathbf{y = \sin x;\ y = \cos x;\ y = tg\, x;\ y = ctg\, x;\ y = \sec x;\ cosec\, x.}$$

Рассмотрим основные свойства этих функций.

а) $\mathbf{y = \sin x;\ y = \cos x}$.

Эти функции имеют областью определения всю действительную ось, а множество значений функции $\mathbf{E(y) = [-1;1]}$. Графиками являются синусоида (рис.2.5) и косинусоида (рис.2.6.).

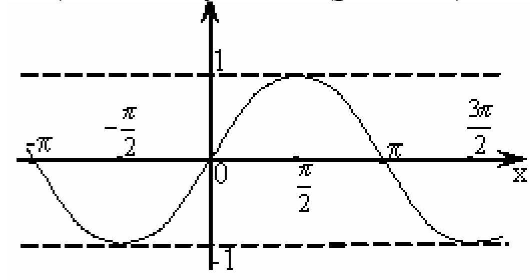


Рис.2.5.

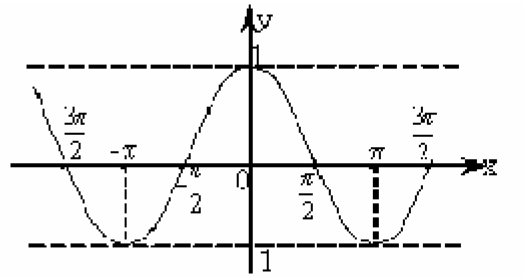


Рис.2.6.

б) $\mathbf{y = tg\, x}$. Эта функция имеет областью определения всю действительную ось, кроме точек, в которых $\mathbf{\cos x = 0}$, т.е. $\mathbf{x = \frac{\pi n}{2}}$. Областью изменения функции является вся действительная ось. Графиком функции является тангенсоида (рис. 2.7).

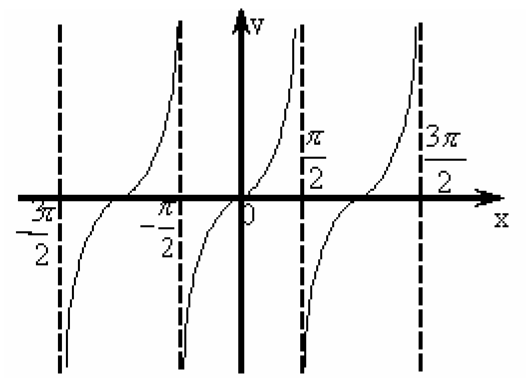


Рис.2.7.

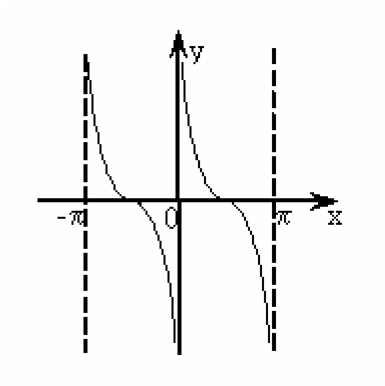


Рис.2.8.

в) $\mathbf{y = ctgx}$. Эта функция имеет областью определения всю действительную ось, кроме точек, в которых $\mathbf{\sin x = 0}$, т.е. $\mathbf{x = \pi n}$, областью изменения функции является вся действительная ось. Графиком функции является котангенсоида (рис. 2.8.)

г) $\mathbf{y = \sec x}$. Эта зависимость хотя и обладает периодичностью, так как $\mathbf{\sec x = \dfrac{1}{\cos x}}$, но она в точках $\mathbf{\cos x = 0}$, т.е. $\mathbf{x = \dfrac{\pi n}{2}}$ не существует. Поэтому область определения функции является вся действительная ось, кроме указанных точек $\mathbf{x = \dfrac{\pi n}{2}}$, областью изменения значений функций является множество всех действительных чисел. График функции изображен на рис.2.9.

д) $\mathbf{y = cosec\, x}$. Эта зависимость, как и предыдущие, обладает периодичностью, но в точках $\mathbf{\sin x = 0}$, $\mathbf{x = \pi n}$ она не существует. Областью определения функции является вся действительная ось, кроме точек $\mathbf{x = \pi n}$, а областью изменения – вся действительная ось.

График функции $\mathbf{y = cosecx}$ изображен на рис. 2.10.

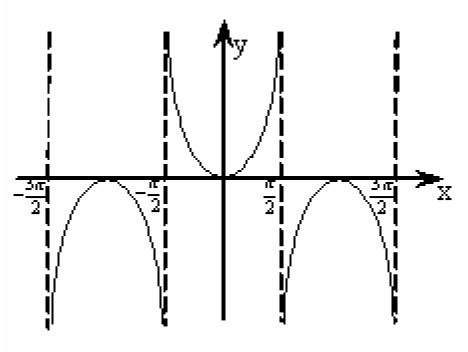


Рис.2.9.

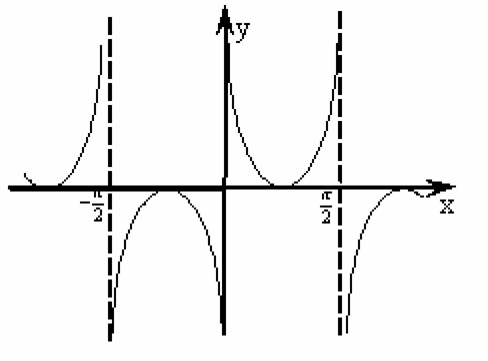


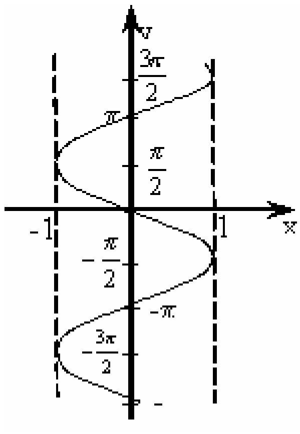
Рис.2.10.

6. **Обратные тригонометрические функции.**

К обратным тригонометрическим функциям относятся следующие: $\mathbf{y = \arcsin x}$; $\mathbf{y = \arccos x}$; $\mathbf{y = arctgx}$; $\mathbf{y = arcctgx}$.

Рассмотрим основные свойства указанных функций.

а) $\mathbf{y = arcsinx}$. Эта функция бесконечнозначная, обратная для функции $\mathbf{y = sinx}$. Область определения $\mathbf{-1 \le x \le 1}$; область изменения $-\infty < \mathbf{y} < +\infty$; график функции изображен на рис. 2.11.



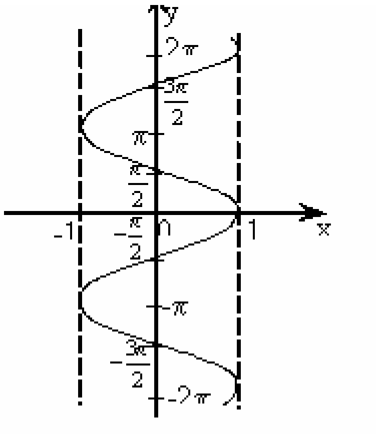


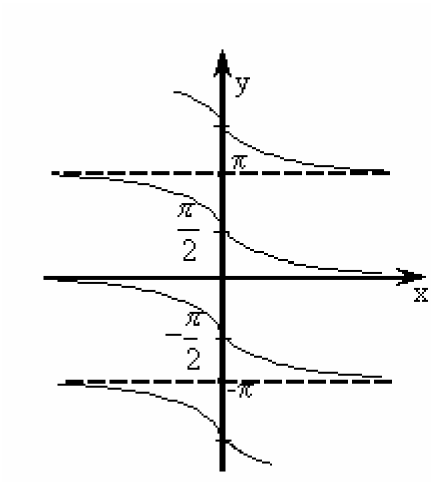
Рис.2.11. Рис.2.12.

б) $\mathbf{y = arccos\,x}$. Эта функция бесконечнозначная, обратная для функции $\mathbf{y = cos\,x}$. Область определения $-\mathbf{1} \le \mathbf{x} \le \mathbf{1}$; область изменения $-\infty < \mathbf{y} < +\infty$; график функции изображен на рис. 2.12.

Заметим, что графики на рис. 2.12. и 2.13. называются **главными ветвями** функций $\mathbf{y = arcsin\,x}$ и $\mathbf{y = arccos\,x}$, соответственно.

в) $\mathbf{y = arcctg\,x}$. Это тоже бесконечнозначная функция, область определения этой функции $-\infty < \mathbf{x} < +\infty$; область изменения $-\infty < \mathbf{y} < +\infty$; график изображен на рис. 2.13. Эта функция является обратной функции $\mathbf{y = ctg\,x}$.

г) $\mathbf{y = arctgx}$. Данная бесконечнозначная функция является обратной по отношению к $\mathbf{y = tgx}$. Областью ее определения является вся действительная ось $-\infty < \mathbf{x} < +\infty$; областью изменения $-\infty < \mathbf{y} < +\infty$; график этой функции изображен на рис. 2.14.



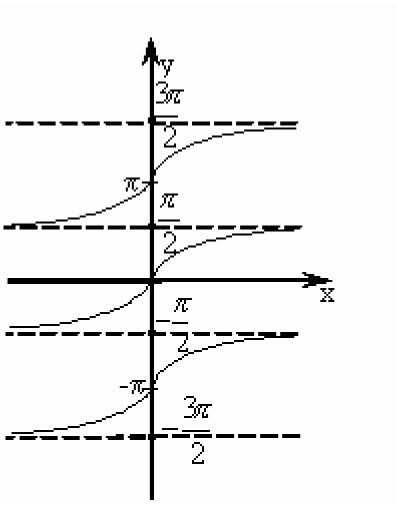


Рис.2.13 Рис.2.14.

2.3. Свойства функций

Дадим еще несколько определений.

Назовем **основными элементарными функциями** алгебраические функции, задаваемые явно, а также перечисленные выше трансцендентные и тригонометрические функции.

Функции, полученные из основных элементарных функций при помощи конечного числа алгебраических действий и применением конечного числа операций вычисления функций от функции, назовем **элементарными**.

Функция $y = f(x)$ называется **неубывающей** на промежутке X (конечном или бесконечном), если для любых $\mathbf{x_1 \in X}$ и $\mathbf{x_2 \in X}$ справедливо соотношение $(\mathbf{x_2 > x_1}) \Rightarrow \mathbf{f(x_2) \geq f(x_1)}$.

Если $(\mathbf{x_2 > x_1}) \Rightarrow \mathbf{f(x_2) > f(x_1)}$, то функция $f(x)$ называется **строго возрастающей**.

Функция $y = f(x)$ называется **невозрастающей** на промежутке X (конечном или бесконечном), если для любых $\mathbf{x_1 \in X}$ и $\mathbf{x_2 \in X}$ справедливо соотношение $(\mathbf{x_2 > x_1}) \Rightarrow \mathbf{f(x_2) \leq f(x_1)}$.

Если $(\mathbf{x_2 > x_1}) \Rightarrow \mathbf{f(x_2) < f(x_1)}$, то $f(x)$ называется **строго убывающей**.

Функции невозрастающие, строго убывающие, неубывающие и строго возрастающие называются **монотонными** на промежутке X.

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной снизу** на множестве X, если существует такое число $m \in \mathbf{R}$, что $\mathbf{\forall x \in X: f(x) \geq m}$.

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной сверху** на множестве X, если существует такое число $M \in \mathbf{R}$, что $\mathbf{\forall x \in X: f(x) \leq M}$.

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на множестве X, если существует $m, M \in R$, что $\mathbf{\forall x \in X: m \leq f(x) \leq M}$.

Функция $\mathbf{y = f(x)}$, определенная на промежутке называется **четной,** если выполняется равенство $\mathbf{f(x) = f(-x)}$.

Функция $\mathbf{y = f(x)}$, определенная в своей области определения, называется **нечетной**, если $\mathbf{f(x) = -f(x)}$.

Например, функция $\mathbf{f(x) = 3x^2 + 4}$ – четная; $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}}$ – нечетная; а $\mathbf{f(x) = x + 1}$ не является четной и не относится к нечетной.

Учет этого свойства существенно облегчает построение графика функции. Если функция четная относительно x, тогда строят только положительную ветвь (часть графика, соответствующего положительным x), а вторую – отображают симметрично относительно оси $\mathbf{x = 0}$ (рис. 2.15.).

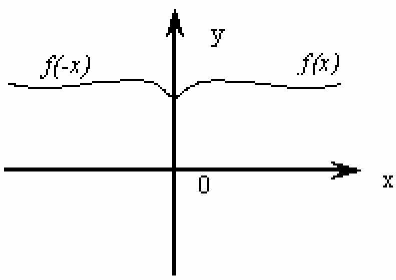


Рис.2.15.

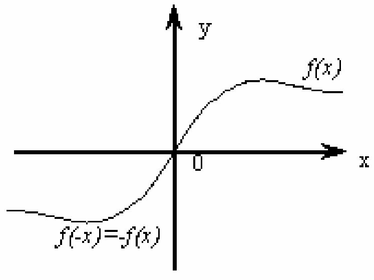


Рис.2.16.

Нечетность функции графически означает симметрию ветвей графика функции относительно начала координат (рис.2.16.)

Поэтому для построения графиков четной или нечетной функции достаточно построить их часть для положительных значений x.

2.4. Деформация графиков.

Рассмотрим построение графиков функций вида $\mathbf{f(x)+a}$; $\mathbf{f(x+a)}$; $\mathbf{af(x)}$; $\mathbf{f(ax)}$, зная вид исходной функции $\mathbf{f(x)}$.

ФУНКЦИЯ	ДЕЙСТВИЯ С ГРАФИКОМ	ДЕЙСТВИЯ С ОСЯМИ
$\mathbf{y = f(x) + b}$	Переместить график $\mathbf{f(x)}$ на $\mathbf{\lvert b\rvert}$ единиц по оси **OY** (вверх при $\mathbf{b > 0}$ и вниз при $\mathbf{b < 0}$)	Перенести ось абсцисс на $\mathbf{\lvert b\rvert}$ единиц вниз при $\mathbf{b > 0}$ (вверх при $\mathbf{b < 0}$).
$\mathbf{y = f(x + a)}$	Переместить график $\mathbf{f(x)}$ на $\mathbf{\lvert a\rvert}$ единиц по оси **OX** (вправо при $\mathbf{a < 0}$, влево при $\mathbf{a > 0}$).	Перенести ось ординат на $\mathbf{\lvert a\rvert}$ единиц (влево при $\mathbf{a < 0}$, вправо при $\mathbf{a > 0}$).
$\mathbf{y = -f(x)}$	Отобразить график $\mathbf{f(x)}$ симметрично относительно оси абсцисс (оси **OX**)(иногда говорят о «зеркальном» отображении).	
$\mathbf{y = f(-x)}$	График $\mathbf{f(x)}$ отобразить симметрично относительно оси ординат (оси **OY**).	
$\mathbf{y = Cf(x)}$	Увеличить ординаты «базового» графика в **C** раз при **C>1** или уменьшить в **1/C** раз при **0<C<1**	
$\mathbf{y = f(Cx)}$	У базового графика уменьшить абсциссы в **C** раз при **C>1** или увеличить их в **1/C** раз при **0<C<1**	
$\mathbf{y = \lvert f(x)\rvert}$	Оставить график $\mathbf{f(x)}$ без изменения там, где $\mathbf{f(x) \ge 0}$; фрагменты графика, соответствующие условию $\mathbf{f(x) < 0}$, отобразить симметрично относительно оси **OX**.	

Пример. С помощью преобразования графика гиперболы $\mathbf{y = 1/x}$ построить график функции $\mathbf{y = \dfrac{x+2}{x+3}}$.

Решение. Сначала необходимо выделить «целую часть» данной дробно-рациональной функции: $\mathbf{y = \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{x+3-1}{x+3} = 1 - \dfrac{1}{x+3}}$. Далее последовательно выполняются следующие действия:

1) построить график функции $\mathbf{y = 1/x}$;

2) сдвинуть его на 3 единицы влево по оси OX (получить график функции $\mathbf{y = 1/(x+3)}$);

3) полученный график симметрично отобразить относительно оси OX (график функции $\mathbf{y = -1/(x+3)}$);

5) сдвинуть его на единицу вверх вдоль оси OY (график заданной функции). Результат построений можно видеть на рис.2.17.

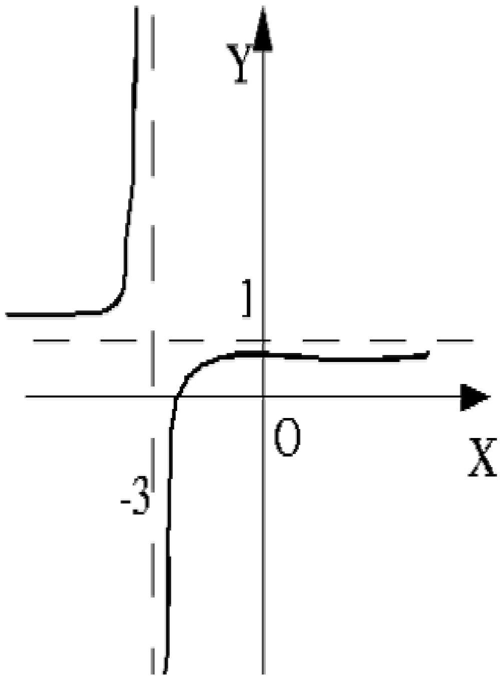


Рис.2.17.

2.5. Обратная и сложная функция.

Рассмотрим функцию **y = f (x)**, определенную на множестве X, и пусть Y – множество ее значений. Допустим, что эта функция строго возрастает или строго убывает на множестве X, тогда каждому значению $x \in X$ отвечает единственное значение $y \in Y$ и наоборот, т.е. на множестве Y определена функция $x = \varphi(y)$ такая, что множество X является множеством ее значений. Эту функцию называют **обратной** по отношению к функции **y = f (x)**. Если функция **y = f (x)** задана аналитически, то обратную функцию можно получить, разрешив это соотношение относительно x, после чего остается обозначить аргумент обратной функции через x, а саму функцию через y.

Итак, отметим, без доказательства, что если некоторая функция **y = y(x)** определена и строго возрастает на множестве X, то у нее существует обратная функция **x = x(y)**, которая определена и строго возрастает на множестве Y, которое является множеством значений прямой функции **y = y(x).** Из курса математики средней школы известно, что графики прямой и обратной функции располагаются симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Например, выделим промежуток строгого возрастания функции **y = tgx**: $\mathbf{x} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. При этом $\mathbf{y} \in \mathbf{]-\infty; +\infty[}$. Очевидно, что обратная функция y = arctgx строго возрастает на всей числовой оси, и при этом $\mathbf{arctg\,x} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ (рис.2.18.).

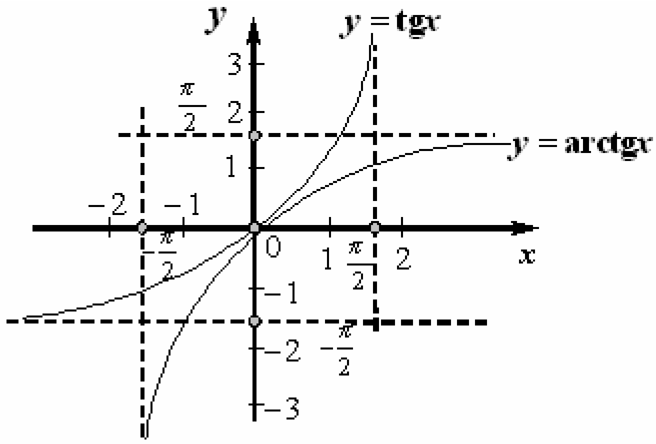


Рис.2.18.

Функции **y = e^x и y = lnx** также взаимнообратные, и графики их симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатного угла (рис. 2.19.).

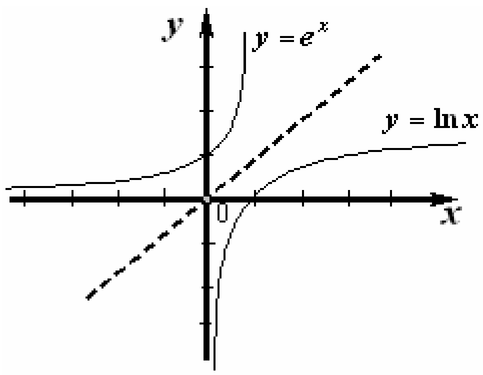


Рис.2.19.

Рассмотрим функцию **y = f (u),** определенную на множестве **U**, и пусть, в свою очередь, **u = φ(x)** определена на множестве **X**. Тогда можно говорить о **сложной функции** переменной **x: y = f [φ(x)],** определенной на множестве $\mathbf{X}^* \subset \mathbf{X}$, которое состоит только из тех элементов $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, для которых соответствующие значения $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{x}) \in \mathbf{U}$. При этом φ называется промежуточным аргументом сложной функции, а сама сложная функция $\mathbf{y} = \mathbf{f}\,[\varphi(\mathbf{x})]$ называется также **суперпозицией** функций **f** и φ.

2.6. Задание функций в полярных координатах

Исходя из некоторой точки 0 (полюса), проведём ось **Ор**, называемую полярной осью. Пусть точка **М** лежит на плоскости (рис.2.20.).

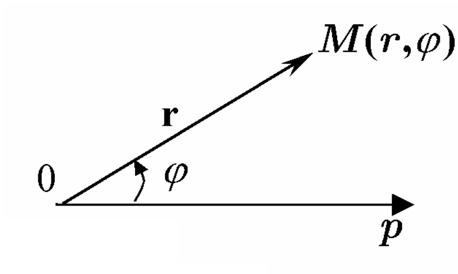


Рис. 2.20.

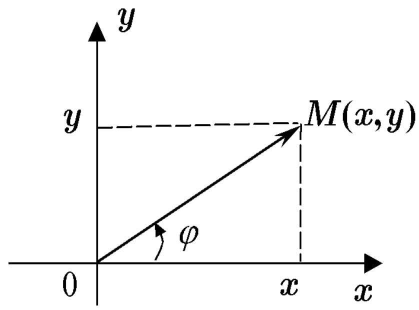


Рис.2.21.

Из полюса проведём радиус-вектор $\mathbf{r}$. Обозначим через φ угол, отсчитываемый от полярной оси по направлению к радиус-вектору против часовой стрелки (рис.2.20.). Положение точки **М** на плоскости однозначно определено параметрами $\mathbf{r}$ и φ, где $\mathbf{r}$ - длина радиус-вектора. Ясно, что $\boldsymbol{r} \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Совместим теперь начало декартовой системы координат хОу с полюсом, а полярную ось Ор направим вдоль оси Ох (рис.2.21.). Тогда нетрудно установить связь между декартовыми и полярными координатами:

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}\cos\varphi,\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}\sin\varphi$.

Часто из соображений большей наглядности или простоты выкладок бывает удобно учитывать связь между декартовыми и полярными координатами, переходить от уравнения кривой в декартовых координатах к её уравнению в полярных координатах и наоборот.

Пример 1. Нарисовать кривую $\boldsymbol{r} = \sin\varphi$ и найти её уравнение в декартовых координатах.

Решение. Заметим, что синус - 2π-периодическая функция. Берём промежуток изменения для $\varphi \in [0,\pi]$, т.к. в этом промежутке $\sin\varphi \geq 0$. Ясно, что кривая лежит в верхней полуплоскости. Составим таблицу для значений $\boldsymbol{r}$ в зависимости от φ:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\boldsymbol{r}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Теперь можно нарисовать данную кривую, проводя из полюса лучи под углом $\varphi = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, ..., \pi$ и откладывая на этих лучах значения соответственно равные $0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, ...$. Получим набор точек, через которые остаётся провести нашу кривую. (рис.2.22.)

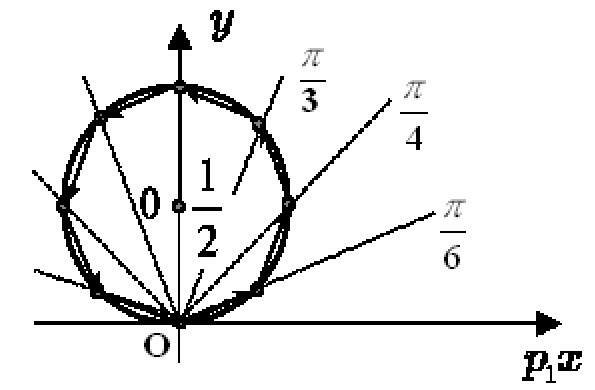


Рис.2.22.

Найдём уравнение этой кривой в декартовых координатах;

Т.к. $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$ то ясно, что $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, $x^2 + y^2 = r^2$ => $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а тогда данная кривая $r = \sin\varphi$ в декартовых координатах имеет уравнение $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ => $x^2 + y^2 = y$ => $x^2 + y^2 - y = 0$.

Выделим полный квадрат:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Получим каноническое уравнение окружности радиуса $r = \frac{1}{2}$ с центром в т. $O(0, \frac{1}{2})$.

Пример 2. Изобразить кривую $r = \sin 3\varphi$.

Решение. Прежде всего заметим, что $r \geq 0$, если

$3\varphi \in [0,\pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup [4\pi, 5\pi]$, т.е. $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2}{3}\pi, \pi] \cup [\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi]$.

Если $3\varphi \in [\pi, 2\pi] \cup [3\pi, 4\pi] \cup [5\pi, 6\pi]$, то оказывается $r < 0$, значит в областях, где $\varphi \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi] \cup [\pi, \frac{4}{3}\pi] \cup [\frac{5}{3}\pi, 2\pi]$ кривая не лежит, их следует исключить из рассмотрения.

Вычисляя значения r для указанных областей изменения φ, получим множество точек, называемое трёхлепестковой розой. (рис. 2.23.)

Найдём теперь уравнение этой кривой в декартовых координатах.

$$(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3.$$

Заметим, что изобразить кривую по её уравнению в таком виде довольно трудно.

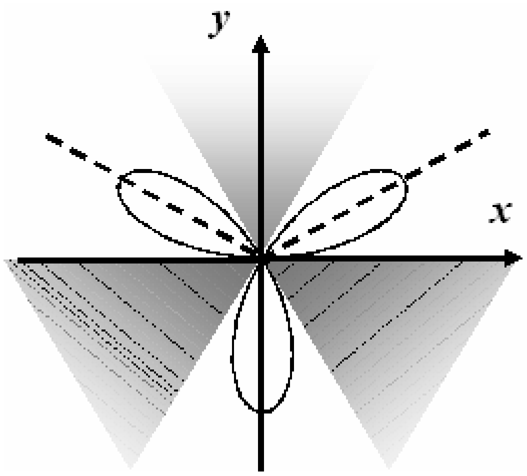


Рис.2.23.

2.6. Параметрическое задание функций

Иногда при аналитическом способе задания функции бывает удобно ввести в рассмотрение промежуточный аргумент **t** (так называемый параметр) и выразить x и y как функции этого промежуточного аргумента, изменяющегося на некотором числовом подмножестве $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$.

Например, если материальная точка перемещается в плоскости декартовой системы координат x0y, то, взяв в качестве параметра время **t**, указывают закон движения в виде

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}(\mathbf{t});\\ \mathbf{y} &= \mathbf{y}(\mathbf{t}); \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{t} \in [\mathbf{t_1}, \mathbf{t_2}].$$

Исключив параметр t, можно перейти к явному или неявному аналитическому способу задания рассматриваемой функции.

Пример 1. Нарисовать график функции, заданной параметрически:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{t}-\mathbf{\sin t};\\ \mathbf{y} &= \mathbf{1}-\mathbf{\cos t}; \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{t} \in [\mathbf{0}, +\infty[.$$

Решение. Примем во внимание, что sint и cost 2π-периодические функции. Следовательно, после того, как параметр t, пробежав полный период, продолжает расти, значения y будут повторяться. Составим таблицу:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	0	0,01	**0,09**	0,35	0,57	1,65	3,14	4,63	5,76	6,2	6,28
y	0	0,15	**0,3**	0,5	1,0	1,7	2,0	1,7	1,0	0,3	0

Теперь остается только построить кривую, которая называется **циклоидой** и представляет собой траекторию точки, закрепленной на катящейся окружности и находящейся в начальный момент времени t = 0 в начале координат при условии, что окружность катится по прямой линии без скольжения (рис.2.24.).

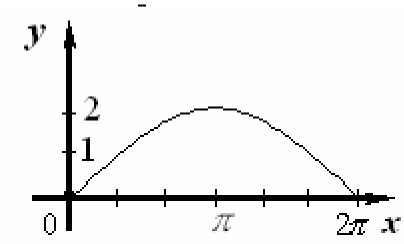


Рис.2.24.

3. Предел функции

3.1. Определение предела, его единственность и условие существования.

Пусть функция $\mathbf{y = f(x)}$ определена в некоторой окрестности точки $\mathbf{x_0 \in R}$, т. е. $\mathbf{x_0}$ - некоторое конечное число. Нас будет интересовать вопрос, как ведет себя функция по мере приближения **x** к точке $\mathbf{x_0}$.

Определение (по Коши) . Постоянное число **A** называется пределом функции $\mathbf{f(x)}$ в точке $\mathbf{x_0}$ (или при $\mathbf{x \to x_0}$) если для произвольного числа $\varepsilon > \mathbf{0}$ найдется число $\delta(\varepsilon) > \mathbf{0}$ такое, что из условия $|\mathbf{x - x_0}| < \delta \wedge \forall \mathbf{x \neq x_0}$ вытекает неравенство $|\mathbf{f(x) - A}| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{\mathbf{x \to x_0}} \mathbf{f(x) = A}$ или $\mathbf{f(x)} \underset{\mathbf{x \to x_0}}{\longrightarrow} \mathbf{A}$.

В кванторном виде данное определение имеет вид:

$$\lim_{\mathbf{x \to x_0}} \mathbf{f(x) = A} \overset{\mathbf{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > \mathbf{0} \exists \delta(\varepsilon) > \mathbf{0} : \left(\forall \mathbf{x} : |\mathbf{x - x_0}| < \delta \wedge \forall \mathbf{x \neq x_0}\right) \Rightarrow |\mathbf{f(x) - A}| < \varepsilon$$

Геометрическая интерпретация определения по Коши. Т.к. неравенство $|\mathbf{f(x)-A}|<\varepsilon$ равносильно неравенству $\mathbf{A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon}$, то какова бы ни была полоса, ограниченная прямыми $\mathbf{y=A-\varepsilon}$ и $\mathbf{y=A+\varepsilon}$, найдется интервал $(\mathbf{x_0-\delta;x_0+\delta})$, такой что все точки графика $\mathbf{y=f(x)}$ с абсциссами из этого интервала (кроме, быть может, точки с абсциссами $\mathbf{x_0}$) окажутся внутри данной полосы (рис.3.1.).

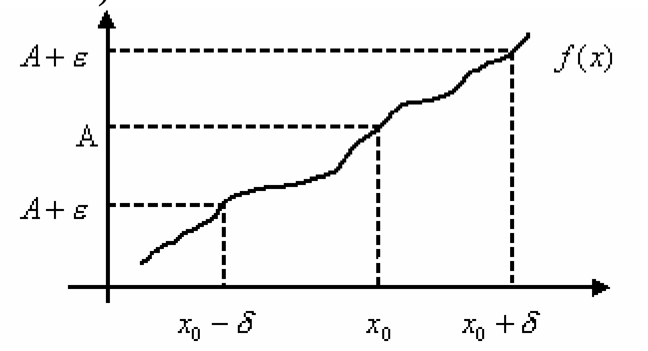


Рис.3.1.

Подчеркнем, что определение Коши не требует, что бы функция $\mathbf{f(x)}$ была определена в точке $\mathbf{x_0}$.

δ-окрестность точки $\mathbf{x_0}$ обозначается $\mathbf{U_\delta(x_0)\equiv U(x_0,\delta)}$:

$\mathbf{U_\delta(x_0)=\{\forall x: |x-x_0|<\delta\}}$.

δ-окрестность точки $\mathbf{x_0}$, из которой удалена точка $\mathbf{x_0}$, называется **проколотой δ- окрестностью** точки $\mathbf{x_0}$ и обозначается $\mathbf{O_\delta(x_0)\equiv O(x_0,\delta)}$:

$\mathbf{O_\delta(x_0)=\{\forall x: 0<|x-x_0|<\delta\}}$. ($\mathbf{0<|x-x_0|<\delta}$ - показывает что $\mathbf{x\neq x_0}$).

Примеры.

1. Докажем, что $\mathbf{\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)=7.}$ Если **|2x+1-7|<ε**, то **|2x-6|<ε**, **|x-3|<ε/2**. Таким образом, если принять **δ(ε)=ε/2**, то выполнены все условия определения предела. Утверждение доказано.

2. $\mathbf{\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=2+1=3.}$ Заметим, что в проколотой окрестности **x=2** $\mathbf{x-2\neq 0,}$ поэтому мы имеем право сократить дробь на **(x - 2)**.

3. $$\mathbf{f(x)=\begin{cases}2+(x-3)\sin\dfrac{1}{x-3} & \text{при} \quad x\neq 3\\ 0 & \text{при} \quad x=3\end{cases}}$$

При $\mathbf{x\neq 3}$ имеем:

$$\left|f(x)-2\right| = \left|(x-3)\sin\frac{1}{x-3}\right| \le \left|x-3\right|$$

Выбираем произвольно $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon$, тогда $\left|x-3\right| < \delta$ влечет за собой условие $\left|f(x)-2\right| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$.

Видим, что предел функции в точке **x=3** существует, а значение функции в этой точке тут совершенно ни при чем. Мы могли бы придать функции значение или не придавать никакое.

Определение. Функция y = f(x) имеет **бесконечный предел** при **x**, стремящемуся к x_0 (стремится к бесконечности, является бесконечно большой), если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x-x_0|<\delta$ значение $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty.$

Определение. Число А является **пределом функции** $y = f(x)$ в точке $x_0 = +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$ 0, что для всех x, удовлетворяющих условию $x > \frac{1}{\delta}$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис.3.2.).

При этом пишут: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A.$

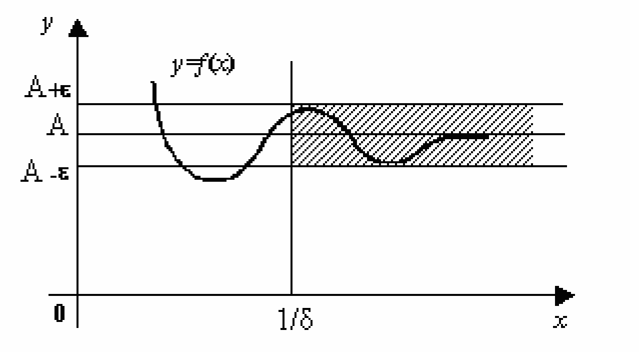


Рис.3.2.

Очевидно, что аналогичные определения можно сформулировать, если **A** - конечное число, $x_0 = \pm\infty$; или x_0 - конечное число, $A = \pm\infty$.

Отметим, что если **A** - конечное число, то предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ называется **конечным**; если же $A = +\infty$, $A = -\infty$, то предел называется **бесконечным** или **несобственным**.

Определение (правостороннего предела). Говорят, что число **A** является **правосторонним пределом** функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in \mathbf{R}$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists\delta = \delta(\varepsilon) > \mathbf{0}$, что для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условию $\mathbf{x_0} < \mathbf{x} < \mathbf{x_0}+\delta$, выполняется неравенство $|\,\mathbf{f}\,(\mathbf{x}) - \mathbf{A}| < \varepsilon$ (рис.3.3.).

Правосторонний предел обозначается так: f (x_0+0), или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A.$

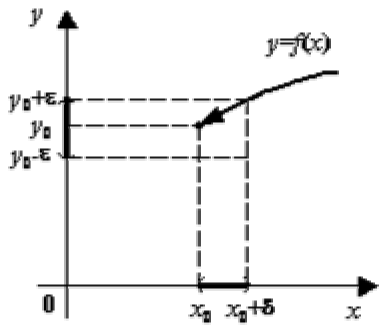


Рис.3.3.

Также определяется левосторонний предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$ (рис.3.4.).

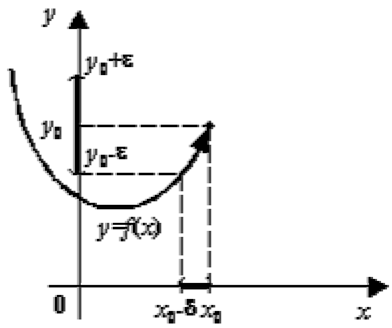


Рис.3.4.

Теорема 3.1. Если в точке $\mathbf{x_0}\in\mathbf{R}$ у функции $\mathbf{y} = \mathbf{f}\,(\mathbf{x})$ существует конечный предел, то в этой же точке существуют и равные между собою односторонние пределы этой функции и наоборот, т. е.

$$\left(A = \lim_{x\to x_0} f(x)\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A\,.$$

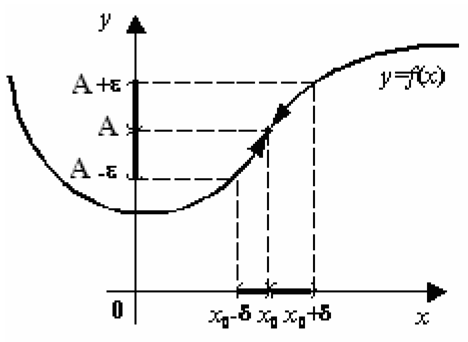


Рис.3.5.

Доказательство.

Необходимость. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то и для $\mathbf{x_0} - \mathbf{x} < \delta$, и для $\mathbf{x} - \mathbf{x_0} < \delta$

$|\mathbf{f(x)-A}|<\varepsilon$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A,\quad \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A.$

Достаточность. Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$, то:

$\exists\,\delta_1$**:** $|f(x)-A|<\varepsilon$ при $x_0 - x < \delta_1$ и $\exists\,\delta_2$: $|f(x)-A|<\varepsilon$ при $x - x_0 < \delta_2$.

Выбрав из чисел δ_1 и δ_2 меньшее и приняв его за δ: $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$, получим, что при $|x-x_0|<\delta$ $|f(x)-A|<\varepsilon$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Теорема 3.2. (о единственности предела).

Если в точке $x_0 \in \mathbf{R}$ данная функция $y = f(x)$ имеет конечный предел, то он единственный.

Доказательство. Допустим, что в данной точке $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ существуют два различных предела: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_2$ $(A_1 \neq A_2)$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$:

$$(\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0)\left(\forall x \in O_{\delta_1}(x_0)\right): |f(x) - A_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

$$(\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0)\left(\forall x \in O_{\delta_2}(x_0)\right): |f(x) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Очевидно, что оба утверждения тем более будут иметь место, если заменить в них δ_1 и δ_2 на $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$, а тогда оказывается, что

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\left(\forall x \in O_\delta(x_0)\right):$$
$$|A_1 - A_2| = |A_1 - f(x) + f(x) - A_2| \le |f(x) - A_1| + |f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

С другой стороны, число ε выбирается произвольно, и мы можем взять его удовлетворяющим неравенствам $0 < \varepsilon < |A_1 - A_2|$**.** Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 3.3. (достаточный признак существования предела).

Если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$, и в некоторой окрестности т. x_0 (кроме быть может самой т. x_0) выполняется условие $g(x) \le f(x) \le h(x)$, то функция $f(x)$ имеет в т. x_0 предел, и этот предел равен **A.** $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A\right)$

Доказательство. По условию теоремы

$$\exists\ O_\delta(x_0): x \in O_\delta(x_0) \Rightarrow \begin{cases} A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon \\ A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon \end{cases}$$ для $\forall \varepsilon > 0$ (здесь $O_\delta(x_0)$ - наименьшая окрестность точки x_0: $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$).

Но тогда в силу второго условия теоремы для $\forall x \in O_\delta(x_0)$ значения $f(x)$ так же будет находится в ε - окрестности точки **A,** т.е. $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, что и означает выполнение условия $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

3.2. Арифметические операции над пределами

Теорема 3.4. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.

Доказательство. Докажем теорему для случая, когда $x_0 \in \mathbf{R}$, т.е. является конечным вещественным числом.

Тогда $\forall \varepsilon > 0$:

$$(\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0)(\forall x \in O(x_0, \delta_1)) : A - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < A + \frac{\varepsilon}{2};$$

$$(\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0)(\forall x \in O(x_0, \delta_2)) : B - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < B + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем $\boldsymbol{\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}}$, тогда оба утверждения останутся в силе, а тогда, приняв во внимание, что неравенства, имеющие одинаковый знак, можно почленно складывать, получим

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon))(\forall x \in O(x_0, \delta)) : (A + B) - \varepsilon < f(x) + g(x) < (A + B) + \varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 3.5. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.

Теорема 3.6. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Приведенные теоремы о пределах и следствие позволяют решать вопросы о нахождении пределов сложных (составных) функций.

При решении примеров по вычислению пределов могут иметь место следующие случаи:

1) отсутствие неопределенности,
2) неопределенность вида $\infty \pm \infty$,
3) неопределенность вида $\infty \cdot \infty$,
4) неопределенность вида $0 \cdot \infty$,
5) неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x-1}$.

Решение. Заметим, что в точке $x = 0$ данное выражение принимает значение равное 0. При $x = 0$ здесь нет неопределенности, таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x-1} = 0$.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$.

Решение. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1} = \infty$.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$.

Решение. Очевидно, что мы имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+x^2}{x^3+x^2+x}$.

Решение. Неопределенность $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2}{x^3+x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+1)}{x(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x^2+x+1} = 0.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x}-x}{x-1}$.

Решение. Неопределенность $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x}-x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}$.

Решение. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+2x^4-x^3+2}{2x^5-x^4+x-1}$.

Решение. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+2x^4-x^3+2}{2x^5-x^4+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^5}\right)}{x^5\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-x+1}{x^2-2}$.

Решение. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x+1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left[1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right]}{x^2\left[1-\frac{2}{x^2}\right]}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left[1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right]}{1-\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{-}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{1}=\infty\cdot1=1.$$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x^3-2x^2-x+1}$.

Решение. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x^3-2x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{x\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=0.$$

На практике, если надо найти предел отношения двух многочленов при $x\to\infty$, сравнивают их высшие степени и рассматривают три случая.

1. $\frac{P_n}{Q_n}$, когда степени многочленов делимого и делителя равны. Тогда предел отношения будет равен рациональной дроби, у которой в числителе и знаменателе будут стоять коэффициенты при высших степенях многочленов (пример 7).

2. $\frac{P_n}{Q_m}$, если $n < m$. Тогда предел отношения будет равен нулю (см. пример 8).

3. $\frac{P_n}{Q_m}$, если $n > m$. Тогда предел отношения будет равен бесконечности (см. пример 9).

Рассмотрим это правило на следующем примере.

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3+x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x^2+x-1}}$.

Решение. Заменяя многочлены, стоящие под корнем, на эквивалентные им старшие степени, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3+x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x^2+x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{9}{12}}}{x^{\frac{8}{12}}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{x}=+\infty.$$

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}\right)$.

Решение. Неопределенность $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}\right)==\lim_{x\to\infty}\frac{x-2x+1}{\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)}{1+\sqrt{2-\frac{1}{x}}}=\infty.$$

3.3. Пределы ограниченных функций.

Остановимся еще на одном признаке существования предела у так называемых монотонных функций. Предварительно дадим следующие определения.

Определение.

1) Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной снизу** на множестве X, если существует такое число $m\in \mathbf{R}$, что $\forall x\in X\colon f(x)\geq m$.

2) Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной сверху** на множестве X, если существует такое число $M\in \mathbf{R}$, что $\forall x\in X\colon f(x)\leq M$.

3) Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на множестве X, если существует $m,M\in R$, что $\forall x\in X\colon m\leq f(x)\leq M$.

Теорема 3.4. (Ограниченность функции, имеющей конечный предел).

Если в точке $x_0 \in R$ функция **f (x)** имеет конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности $O(x_0, \delta)$ функция **f (x)** ограничена.

Доказательство. По условию теоремы, в точке x_0 функция **f (x)** имеет конечный предел. Это означает $(\forall\, \varepsilon > 0)$ $(\exists\, \delta = \delta(\varepsilon))$ $(\forall x \in O(x_0, \delta))$: $|f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, т.е. функция $y = f(x)$ ограничена в проколотой окрестности точки x_0.

Теорема 3.5. Если в окрестности точки x_0 имеет место неравенство $\varphi(x) \le \psi(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = B$, то $A \le B$.

Без доказательства.

Теорема 3.6. Если функция $y = f(x)$ монотонна и ограничена в $O_\delta(x_0)$, где $x_0 \in R$, то тогда существуют конечные левосторонний и правосторонний пределы функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Без доказательства.

Теорема 3.7. Если функция $y = f(x)$ не убывает (не возрастает) на бесконечном промежутке X и ограничена сверху (снизу), то она имеет конечный предел.

Без доказательства.

3.4. Первый замечательный предел

Допустим, что x - некоторый острый угол (рис.3.6.).

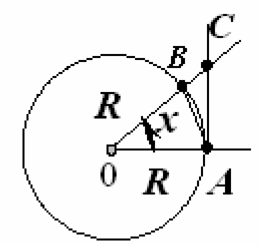


Рис.3.6.

Из рисунка ясно, что $S_{\Delta OAB} < S_{\text{сект.}OAB} < S_{\Delta OAC}$, т. е.

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Мы предположили, что x острый угол, значит $\sin x > 0$, а тогда имеем

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

В силу определения предела для $\forall\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, а именно $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, что если положить $|x| < \sqrt{2\varepsilon}$, то тогда $|1 - \cos x| = 2\sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2} < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Следовательно, можно сделать вывод, что в силу доказанной выше теоремы $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Допустим теперь, что $x < 0$ и найдем $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sin x}{x}$. Положим $-x = y$, тогда $\sin x = \sin(-y) = -\sin y$. Имеем $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{-\sin y}{-y} = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{\sin y}{y} = 1$.

Итак, окончательно получим предел, который называется **первым замечательным пределом**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следствия из первого замечательного предела.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} = k \lim\limits_{kx\to 0} \frac{\sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k.$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}kx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} \frac{1}{\cos kx} = k \cdot 1 = k.$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin kx}{\sin mx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} \frac{x}{\sin mx} = k \frac{1}{m} = \frac{k}{m}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}kx}{\mathrm{tg}mx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}kx}{x} \frac{x}{\mathrm{tg}mx} = \frac{k}{m}.$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1,$ где $y=\arcsin x$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}x}{x} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{\mathrm{tg}y} = 1,$ где $y=\mathrm{arctg}x$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

3.5. Понятие последовательности и ее предела

Определение. Если каждому натуральному **n** по какому-либо известному правилу поставлено в соответствие некоторое число $\mathbf{a_n}$, тогда говорят, что задана числовая **последовательность** $\mathbf{a_1;a_2;...;a_n}$, которая обозначается как $\{\mathbf{a_n}\}$.

Правило, по которому формируется последовательность $\{\mathbf{a_n}\}$, обозначается как $\mathbf{a_n = f(n)}$ и называется общим членом последовательности.

Примеры числовых последовательностей.

а) 1, -1, 1, -1, ... $\{\mathbf{a_n}\} = \mathbf{(-1)^{n-1}}$;

б) 0, 1, 0, -1, 0,... $\{\mathbf{a_n}\} = \mathbf{\sin(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2}(n-1)}$;

в) 1, 2, 3, 4, 5,... $\{\mathbf{a_n}\} = \mathbf{n}$;

г) 1, 4, 9, 16, 25,... $\{\mathbf{a_n}\} = \mathbf{n^2}$.

Числовую последовательность $\{\mathbf{a_n}\}$ можно считать функцией дискретного аргумента **n** и применить к ней определение предела функции по Коши:

Определение. Число А называется **пределом числовой последовательности** $\{\mathbf{a_n}\}$, если $\forall\varepsilon > \mathbf{0}$ $\exists \mathbf{N :} |\mathbf{a_n - A}| < \varepsilon$ при n>N.

При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{a_n = A}$ или $\mathbf{a_n} \underset{n\to\infty}{\to} \mathbf{A}$.

Подчеркнем, что $\varepsilon > \mathbf{0}$ выбирается произвольно, а число N должно быть указано после выбора ε.

Поскольку последовательность является частным случаем функции, то достаточно очевидно, что для предела последовательности имеют место основные теоремы, справедливые для предела функции:

Последовательность может иметь только один предел.

Если последовательность $\{\mathbf{a_n}\}$ имеет предел, то она ограничена.

Если последовательность $\{\mathbf{a_n}\}$ возрастает (или не убывает) и ограничена сверху, то она имеет предел.

3.6. Второй замечательный предел

Теорема. Последовательность $\left(\mathbf{1+\frac{1}{n}}\right)^{\mathbf{n}}$, где $\mathbf{n = 1, 2, \ldots}$, стремится к конечному пределу, заключенному между 2 и 3.

Доказательство.

Воспользуемся формулой бинома Ньютона

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)....[n-(n-1)]}{n!}x^n$$

Тогда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\frac{n(n-1)...[n-(n-1)]}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n=$$

$$=2+\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\ldots+\frac{1\cdot\ldots(n-1)n}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\cdot3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{n(n-1)\ldots(1+n-n)}{n^n}\right)=$$

$$=2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\cdot3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\ldots\frac{n-(n-1)}{n}\right)=$$

$$=2+\frac{1}{2}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{>0}+\frac{1}{2\cdot3}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{>0}+\ldots+\frac{1}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}_{>0}.$$

Так как слагаемые положительные, то последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имеет наименьшее значение 2, затем растет с увеличением n.

С другой стороны, так как выражения $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$ и т.д., то

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot\underbrace{3}_{>2}}+\ldots+\frac{1}{2\cdot\underbrace{3\cdot\ldots\cdot n}_{>2\cdot2\ldots2}}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$ (сумма геом.

прогрессии $s=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$) $=2+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2+1-\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$.

Таким образом $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$, то есть последовательность ограниченная возрастающая. Тогда она имеет предел, заключенный между 2 и 3. Этот предел называется число e, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\cong 2{,}7182818284\ldots$ —это иррациональное число (называется число Непера).

Это предельное соотношение можно записать в другом виде, обозначив $\frac{1}{n}=x \quad\Rightarrow\quad n=\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Следствия из второго замечательного предела.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\log_a(1+y)}=\ln a\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=\ln a,$ где a>0, y=a^x - 1.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\ln e=1.$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1-7x\right)^{\frac{1}{7x}}\right]^7=e^{-7}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)-1\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\frac{5}{x-2}\cdot x}=e^5.$

3.7. Гиперболические функции

По определению **гиперболическими** называют функции:

$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (гиперболический косинус)

$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ (гиперболический синус)

$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$ (гиперболический тангенс)

$\mathrm{cth}x=\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$ (гиперболический котангенс)

Гиперболические функции представлены на рис.3.7.

Основное тождество гиперболической геометрии: $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$.

Термин “гиперболический” означает, что равенство $x=a\cdot\mathrm{ch}(t)$, $y=a\cdot\mathrm{sh}(t)$ задают гиперболу, (т.к. $x^2-y^2=a^2$ - равнобочная гипербола). Подобно тому как равенство $x=a\cos(t)$, $t=a\sin(t)$ задают окружность ($x^2+y^2=a^2$).

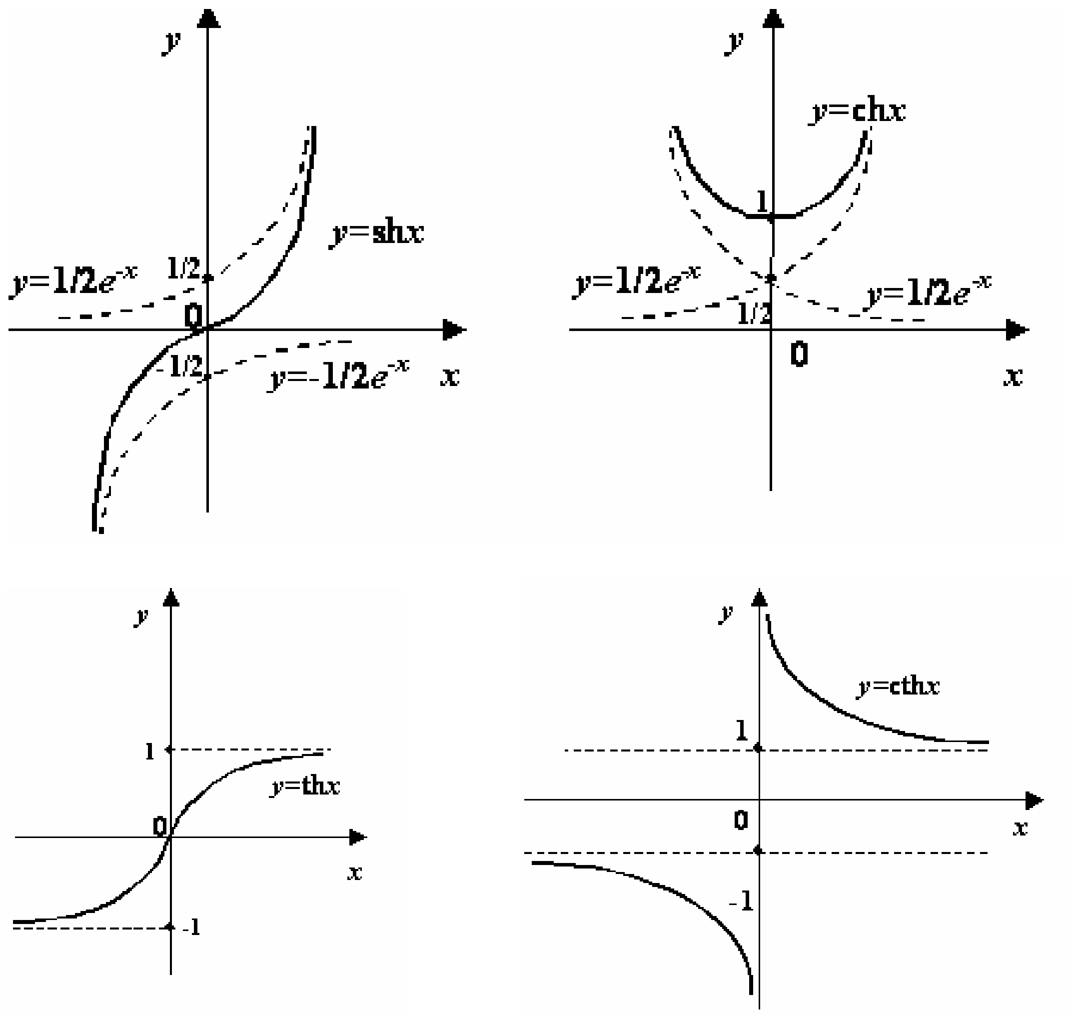


Рис.3.7.

Гиперболические функции обладают рядом свойств, аналогичных свойствам тригонометрических функций. Например, для гиперболических функций имеют место сложения:

$$\mathbf{sh(x \pm y) = sh(x)ch(y) \pm ch(x)sh(y)}; \quad \mathbf{ch(x \pm y) = ch(x)ch(y) \pm sh(x)sh(y)}$$

$$\mathbf{sh(2x) = 2sh(x)ch(x)}; \qquad \mathbf{ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x)}.$$

3.8. Второе определение предела функции

Дадим другое определение предела функции.

Определение (по Гейне).

Постоянное число **A** называется **пределом** функции **f(x)** в точке $\mathbf{x_0}$ (или при $\mathbf{x \to x_0}$) если для любой последовательности $\forall \{\mathbf{x_n}\}$ такой, что $\mathbf{x_n \to x_0}$ и $\forall \mathbf{x_n \neq x_0}$ соответствующая последовательность значений функций $\{\mathbf{f(x_n)}\}$ сходится к **A**.

Пишем: $\lim\limits_{\mathbf{x \to x_0}} \mathbf{f(x) = A}$

Пример: $\mathbf{f(x) = \sin\frac{1}{x}}$, $\mathbf{x_0 = 0}$

Решение. Рассмотрим две последовательности $\left\{\mathbf{x_n^{(1)} = \frac{1}{\pi n}} \text{ и } \mathbf{x_n^{(2)} = \frac{2}{\pi(4n+1)}}\right\}$. Ясно, что обе последовательности стремятся к нулю при $\mathbf{n \to \infty}$.

Но: $\left\{\mathbf{f(x_n^{(1)})}\right\} = \left\{\mathbf{\sin \pi n}\right\}$; $\left\{\mathbf{f(x_n^{(2)})}\right\} = \left\{\mathbf{\sin\frac{\pi(4n+1)}{2}}\right\}$

Очевидно, $\mathbf{\sin \pi n \to 0}$, $\mathbf{\sin\frac{\pi(4n+1)}{2} \to 1}$.

Видим, что соответствующие последовательности значений функций имеют разные пределы $\mathbf{0}$ **и** $\mathbf{1}$. Таким образом, определение Гейне не удовлетворяет. Следовательно функция $\mathbf{\sin\frac{1}{x}}$ в точке $\mathbf{x_0}$ предела не имеет.

3.9. Применение пределов в экономических расчетах

Приведем пример применения понятия предела функции в экономических расчетах. Рассмотрим обыкновенную финансовую сделку: предоставление в долг суммы $\mathbf{S_0}$ с условием, что через период времени $\mathbf{T}$ будет возвращена сумма $\mathbf{S_T}$. Определим величину **r относительного роста** формулой

$$\mathbf{r = \frac{S_T - S_0}{S_0}}.$$

Относительный рост можно выразить в процентах, умножив полученное значение **r** на 100.

Из этой формулы легко определить величину $\mathbf{S_T}$: $\mathbf{S_T = S_0(1 + r)}$.

При расчете по долгосрочным кредитам, охватывающим несколько полных лет, используют схему сложных процентов. Она состоит в том, что если за 1-й год сумма $\mathbf{S_0}$ возрастает в $\mathbf{(1 + r)}$ раз, то за второй год в $\mathbf{(1 + r)}$ раз возрастает сумма $\mathbf{S_1 = S_0(1 + r)}$, то есть $\mathbf{S_2 = S_0(1 + r)^2}$. Аналогично получается $\mathbf{S_3 = S_0(1 + r)^3}$.

Из приведенных примеров можно вывести общую формулу для вычисления роста суммы за **n** лет при расчете по схеме сложных процентов:

$$\mathbf{S_n = S_0(1 + r)^n}.$$

В финансовых расчетах применяются схемы, где начисление сложных процентов производится несколько раз в году. При этом оговариваются **годовая ставка r** и **количество начислений за год n**.

Пусть годовая ставка равна **r** и производится **n** начислений в год через равные промежутки времени. Тогда за год сумма $\mathbf{S_0}$ наращивается до величины, определяемой формулой $\mathbf{S_1 = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n}$.

В теоретическом анализе и в практике финансовой деятельности часто встречается понятие “непрерывно начисляемый процент”. Чтобы перейти к непрерывно начисляемому проценту, нужно в последней формуле неограниченно увеличивать число **n** (то есть устремить **n** к бесконечности) и вычислить, к какому пределу будут стремиться функция S_1. Применим эту процедуру, получим:

$$S_1^* = \lim_{n\to\infty} S_1 = S_0 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = S_0 \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^r = S_0\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right\}^r.$$

Заметим, что предел в фигурных скобках совпадает со вторым замечательным пределом. Отсюда следует, что при годовой ставке **r** при непрерывно начисляемом проценте сумма S_0 за 1 год наращивается до величины S_1^*, которая определяется из формулы

$$S_1^* = S_0 e^r.$$

Пусть теперь сумма S_0 предоставляется в долг с начислением процента **n** раз в год через равные промежутки времени. Обозначим r_e годовую ставку, при которой в конце года сумма S_0 наращивается до величины S_1^* из последней формулы. В этом случае будем говорить, что r_e — это **годовая ставка при начислении процента n раз в год, эквивалентная годовому проценту *r* при непрерывном начислении.**

Имеем:
$$S_1^* = S_0\left(1+\frac{r_e}{n}\right)^n.$$

Приравнивая правые части последних формул, можно вывести соотношения между величинами **r** и r_e:

$$r = n\ln\left(1+\frac{r_e}{n}\right), \quad r_e = n\left(e^{\frac{r}{n}}-1\right).$$

Эти формулы широко используются в финансовых расчётах.

3.10. Бесконечно малые функции

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$ или в точке x_0, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta(\varepsilon) \ \ \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Это эквивалентно следующему утверждению:

Определение 2. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой в точке $x_0 = a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

Примеры.

1) функция $\mathbf{y = \sin x}$ является бесконечно малой при $\mathbf{x \to \pi}$, так как $\lim\limits_{x\to\pi} \sin x = 0$,

2) функция $\mathbf{y = x^3 + 1}$ является бесконечно малой в точке $\mathbf{x_0 = -1}$, т.к. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3 - 1\right) = 0$.

3) $\mathbf{y(x) = \begin{cases} x^2, & \text{при } x \neq 0 \\ 100, & \text{при } x = 0 \end{cases}}$ бесконечно мала в точке $\mathbf{x_0 = 0}$, так как $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$.

Теорема 1. Сумма (произведение) конечного числа бесконечно малых функций при $\mathbf{x \to x_0}$ есть бесконечно малая функция.

Доказательство. Докажем для двух функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. По определению:

$$\alpha(x): \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1(\varepsilon) \ \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\beta(x): \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2(\varepsilon) \ \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда для $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$, получим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \forall x \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

т.е. $\alpha(x) + \beta(x)$ является также бесконечно малой при $\mathbf{x \to x_0}$.

Теорема 2. Произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $\mathbf{x \to x_0}$ на функцию $\mathbf{f(x)}$ ограниченную в некоторой δ окрестности точки $\mathbf{x_0}$, является бесконечно малой при $\mathbf{x \to x_0}$.

Доказательство. По условию и соответствующим определениям:

1) $\mathbf{f(x)}$ - ограничена в δ_0 окрестности, откуда

$$\exists K \ \ \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)| \le K$$

2) $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $\mathbf{x \to x_0}$:

$$\forall \frac{\varepsilon}{K} > 0 \ \ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 \ \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Тогда, взяв $\delta = \inf\{\delta_0, \delta_1\}$, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \, \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon,$$

т.е. $\alpha(x) \cdot f(x)$ - бесконечно малая при $\mathbf{x \to x_0}$.

Следствие 1. Произведение бесконечно малой на конечное число есть бесконечно малая.

Следствие 2. Произведение двух или нескольких бесконечно малых есть бесконечно малая.

Следствие 3. Линейная комбинация бесконечно малых есть бесконечно малая.

Теорема 3. Пусть функция $\mathbf{f(x)}$ определена в некоторой проколотой окрестности $\mathbf{O_\delta(x_0)}$ точки $\mathbf{x_0}$, кроме может быть самой точки $\mathbf{x_0}$. Для того, чтобы функция $\mathbf{f(x)}$ имела при $\mathbf{x \to x_0}$ предел $\mathbf{A}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{f(x)}$ можно было представить в виде суммы:

$$\mathbf{f(x) = A + \alpha(x)},$$

где $\mathbf{\alpha(x)}$ - бесконечно малая при $\mathbf{x \to x_0}$.

Доказательство.

Необходимость.

Докажем, что функция $\mathbf{\alpha(x) = f(x) - A}$ является бесконечно малой при $\mathbf{x \to x_0}$. По условию и определению предела функции имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ т.е.}$$

$$|f(x) - A| = |\alpha(x)| < \varepsilon,$$

т.е. $\mathbf{\alpha(x)}$ - бесконечно малая при $\mathbf{x \to x_0}$ и функцию можно представить в виде $\mathbf{f(x) = A + \alpha(x)}$.

Достаточность. $\mathbf{f(x) = A + \alpha(x)}$, где $\mathbf{A - const}$, $\mathbf{\alpha(x)}$ - бесконечно малая при $\mathbf{x \to x_0}$.

$$\forall \varepsilon > 0\quad \exists \delta(\varepsilon) > 0\quad \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \quad .$$
$$\Leftrightarrow A = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Доказанная теорема позволяет сформулировать определение предела функции по Коши следующим образом.

Определение. Пределом функции $\mathbf{y = f(x)}$ в точке $\mathbf{x_0 \in R}$ называется такое постоянное число **A,** разность между которым и функцией $\mathbf{y = f(x)}$ есть бесконечно малая функция.

Бесконечно малые функции играют существенную роль в математическом анализе, и в дальнейшем при доказательстве различных теорем мы будем переходить от рассмотрения предела функции $\mathbf{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A}$ к рассмотрению бесконечно малой функции $\mathbf{\alpha(x) = f(x) - A}$ в точке $\mathbf{x_0}$. Очевидно, что в силу доказанной выше теоремы такой переход закономерен.

3.11. Сравнение бесконечно малых функций

Рассмотрим функции α(x) и β(x), для которых $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0,$ то есть бесконечно малые в окрестности x_0.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A, |A|<\infty,$ то α(x) и β(x) называются бесконечно малыми **одного порядка**. Обозначение: α(x)=O(β(x)).

В частности, если A=1, говорят, что α(x) и β(x) – **эквивалентные** бесконечно малые. Обозначение: α(x)~β(x).

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$ то α(x) называется бесконечно малой более **высокого порядка** по сравнению с β(x). Обозначение: α(x)=o(β(x)).

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=A, |A|<\infty$, то α(x) есть бесконечно малая **порядка n** по сравнению с β(x). Обозначение: α(x)~β(x).

Примеры.

1) $\beta(x)=x^2-4$, $\alpha(x)=x^2-5x+6$ $\beta(x)=O(\alpha(x))$ при $x\to 2$, т.к.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=-4\neq 0$$

2) $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=2\sin 2x$ $\beta(x)=O(\alpha(x))$ при $x\to 0$, т.к.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=2\neq 0$$

3) $\beta(x)=x$, $\alpha(x)=\sin^2 x$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}=\infty$, т.е. $\beta(x)$ бесконечно малая более низкого порядка по сравнению с $\alpha(x)$, или α(x)=o(β(x)).

4) $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=tgx-\sin x=O(x^3)$, т.к.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}\cdot 4}=\frac{1}{2}.$$

Теорема 1. Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем каждый из сомножителей.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}0$, $\beta(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0;\ \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0.$$

Теорема 2. Для того, чтобы бесконечно малые α(x) и β(x) были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой более высокого порядка малости, чем каждая из них.

Доказательство.

Необходимость. Пусть α(x)~β(x)., тогда

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}\right]=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1-1=0.$$

Достаточность. Пусть разность α(x) - β(x) есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем α(x), т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1.$$

Аналогично: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Теорема 3. (Принцип замены на эквивалентную).

Если в точке x_0 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x),\ \beta(x)\sim\beta_1(x),$ то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Доказательство. По условию теоремы, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=1$,

следовательно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций:

$\sin x\sim x$	$\ln(1+x)\sim x$	$a^x-1\sim x\ln a$	$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$
$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$		$e^x-1\sim x$	$\alpha=\frac{1}{n};\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{5x}=\frac{7}{5}=1{,}4$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\mathrm{tg} 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{2x}=\frac{7}{2}=3{,}5$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)}{\mathrm{tg} 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{2}=\frac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x+3x^2}{2x+\mathrm{tg}^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{2x}=\frac{7}{2}=3{,}5$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{\ln(1-\mathrm{arctg}(5\sin x))}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{-\mathrm{arctg}(5\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{-5\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{-5x}=-\frac{3}{5}.$

3.12. Бесконечно большие функции

Определение. Функция f(x) называется **бесконечно большой** при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty.$

Для бесконечно больших можно ввести такую же систему классификации, как и для бесконечно малых, а именно:

1. Бесконечно большие f(x) и g(x) считаются величинами одного порядка, если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A, |A|<\infty$.
2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, то f(x) считается бесконечно большой более высокого порядка, чем g(x).
3. Бесконечно большая f(x) называется величиной k-го порядка относительно бесконечно большой g(x), если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g^k(x)}=A, |A|<\infty$.

Замечание. Отметим, что

1. $\mathbf{a^x}$ – бесконечно большая (при a>1 и $x\to\infty$) более высокого порядка, чем x^k для любого k,
2. $\log_a x$ – бесконечно большая низшего порядка, чем любая степень x^k.

Теорема. Если **α(x)** – бесконечно малая при $x\to x_0$, то 1/α(x) – бесконечно большая при $x\to x_0$.

Доказательство.

Возьмем любое число K > 0. Пусть $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией в точке x_0. Это означает, что

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in O(x_0,\delta)): |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Возьмем в качестве ε такое число, чтобы $\frac{1}{\varepsilon} = K$, тогда $\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{|\alpha(x)|} = +\infty$, а это и означает, что $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая функция.

Примеры.

1. Функция $y = \frac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$,
2. Функция $f(x) = \ln x$ - является бесконечно большой при $x \to 0+0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$
3. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ является бесконечно большой при $x \to \frac{\pi}{2}$, т.к. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$.

4. Непрерывность функции

4.1. Непрерывность функции в точке

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если выполняются следующие три условия:

1. $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности $U_\delta(x_0)$;
2. существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то есть предел функции при $x \to x_0$ равен значению $f(x_0)$ функции в точке x_0, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in U_{x_0}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Рассмотрим функцию $f(x)$ и допустим, что она непрерывна в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

Обозначим $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ и назовем эту разность приращением функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента

$\Delta x = x - x_0$. Ясно, что $\Delta x \to 0$, если $x \to x_0$. Таким образом, справедлива импликация $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)) \Rightarrow (\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0) = 0)$.

Очевидна и обратная импликация:

$$(\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0) = 0) \Rightarrow (\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)).$$

Таким образом, следующие два утверждения эквивалентны:

$$(\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)) \Leftrightarrow (\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0).$$

Приняв во внимание вышесказанное, можно дать другое определение непрерывности функции в точке x_0.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. если $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0) = 0$.

Геометрический смысл данного определения ясен из рис.4.1.

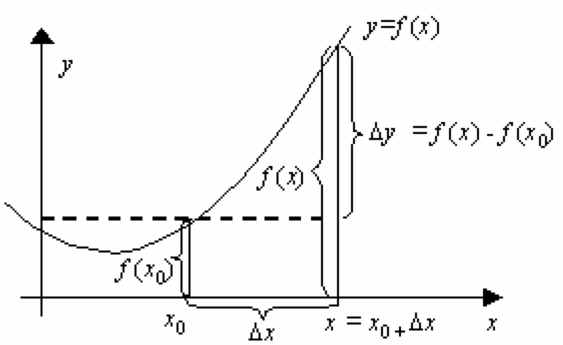


Рис.4.1.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0 справа**, если:

1) существует конечное значение $f(x_0)$;

2) существует конечный правосторонний предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$;

3) выполняется условие $f(x_0) = f(x_0+0)$.

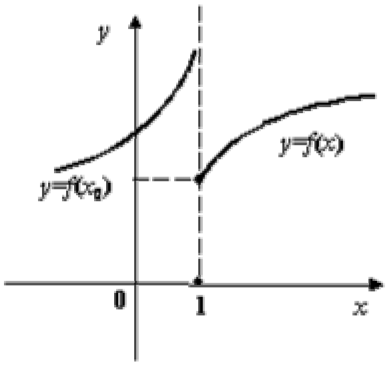


Рис.4.2.

Функция **f (x)** называется **непрерывной в точке x_0 слева**, если:
1) существует конечное значение **f (x_0)**;
2) существует конечный левосторонний предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$;
3) выполняется условие **f (x_0) = f (x_0 - 0).**

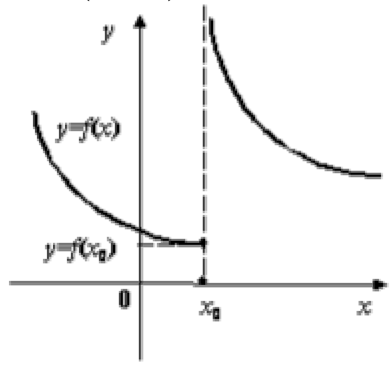


Рис.4.3.

В заключение приведем еще одно определение непрерывности функции в точке x_0.

Определение 3. Функция **f (x)** называется непрерывной в точке x_0, если она в этой точке непрерывна и слева, и справа.

Пример 1. Функция $y=\sin x$ непрерывна на интервале $(-\infty,+\infty)$. Действительно:

$$|\Delta y| = |\sin(x+\Delta x)-\sin x| = \left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le 2\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|, \text{ т.е.}$$

при $\Delta x \to 0 : \Delta y \to 0$.

Пример 2. Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ не является непрерывной в точке $x=0$.

Решение. Найдем $\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)$, получим

$$\Delta f = \frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

Очевидно, что равенство $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f = -\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}=0$ выполняется для всех точек числовой прямой, кроме единственной точки $x=0$. В этой точке под знаком предела стоит неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Для того, чтобы выяснить поведение функции в окрестности точки $x=0$ найдем предел слева и справа от указанной точки. Получим справа

$\lim\limits_{x\to 0+\varepsilon}\frac{1}{x}=\left[\frac{const}{+0}\right]=+\infty$, и слева $\lim\limits_{x\to 0-\varepsilon}\frac{1}{x}=\left[\frac{const}{-0}\right]=-\infty$, т.е. справа функция стремится к $+\infty$, а слева – к $-\infty$. Это значит, что при уменьшении x $\Delta f \to \infty$, т.е. не выполняются условия непрерывности функции.

Пример 3. Исследовать непрерывность функции

$$y=\begin{cases} x,\ x\in\,]-\infty,1] \\ x^2,\ x\in\,]1,+\infty[\end{cases} \quad \textbf{в точке } x_0=1.$$

Решение.

1) В точке $x_0 = 1$ функция определена: $y(1) = 1$.

2) Правосторонний предел в точке $x_0 = 1$: $y(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0} x^2=1$.

3) Левосторонний предел в точке $x_0 = 1$: $y(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0} x=1$.

4) Очевидно, что $y(1) = y(1 + 0) = y(1 - 0) = 1$.

Вывод: функция в точке $x_0 = 1$ непрерывна.

4.2. Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то существует некоторая окрестность $U(x_0, \delta)$, в которой функция имеет такой же знак, что и в точке x_0.

Доказательство. Пусть для определенности $f(x_0) > 0$; поскольку в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна, то это означает, что
$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \ \forall x\in U_{x_0}: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, откуда следует, что $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$.

Так как ε можно выбрать любым, то положим $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}$; тогда будет в силу последних неравенств $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$, т.е. $f(x) > 0$. $\forall x\in U_{x_0}$.

Теорема 2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то справедливы следующие утверждения:

1) функция $c\cdot f_1(x)$ непрерывна в точке x_0 (c = const);

2) функция $f_1(x) \pm f_2(x)$ непрерывна в точке x_0;

3) функция $f_1(x) \cdot f_2(x)$ непрерывна в точке x_0;

4) функция $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ $(f_2(x_0)\neq 0)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Докажем одно из этих утверждений (остальные доказываются аналогично), а именно: произведение $\mathbf{f_1(x) \bullet f_2(x)}$ непрерывно в точке $\mathbf{x_0}$. Действительно, поскольку существуют конечные значения $\mathbf{f_1(x_0)}$ и $\mathbf{f_2(x_0)}$, следовательно, существует и конечное значение $\mathbf{f_1(x_0) \bullet f_2(x_0)}$; кроме того, существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = f_2(x_0)$.

Значит существует

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) \cdot f_2(x_0).$$

А это и означает, что произведение $\mathbf{f_1(x) \bullet f_2(x)}$ непрерывно в точке $\mathbf{x_0}$.

Теорема 3. (Непрерывность сложной функции).

Если функция $\boldsymbol{\varphi(x)}$ непрерывна в точке $\mathbf{x_0}$, а функция $\mathbf{f\,(U)}$ непрерывна в точке $\mathbf{U_0}$, где $\mathbf{U_0 = \varphi\ (x_0)}$, то функция $\mathbf{f\,[U(x)]}$ непрерывна в точке $\mathbf{x_0}$, т.е. суперпозиция непрерывных функций непрерывна в данной точке.

(Без доказательства).

Теорема 4. (Непрерывность обратной функции).

Если функция $\mathbf{y = y(x)}$ строго возрастает (строго убывает) на промежутке [a; b] и непрерывна в точке $x_0 \in\,]a; b[$, то у нее существует обратная функция $\mathbf{x = x(y)}$, которая строго возрастает (строго убывает) на промежутке [p, q], где p = y(a), q = y(b) и непрерывна в точке $\mathbf{y_0 = y(x_0)}$.

(Без доказательства).

Теорема 5. Любая элементарная функция непрерывна в каждой точке ее множества определения.

(Без доказательства).

4.3. Вычисление пределов от непрерывных функций

В силу теоремы о непрерывности элементарных функций следует, что для каждой элементарной функции имеет место соотношение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$; это обстоятельство упрощает подход к вычислению многих пределов от элементарных функций.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение. $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Поэтому $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = \cos\left[\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\right] = \cos[0] = 1$.

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left[\frac{x^2+2x-1}{3x^2+x+4}\right]$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left[\frac{x^2+2x-1}{3x^2+x+4}\right] = \ln\left[\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{3x^2+x+4}\right] = \ln\left[\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-2x+1)}{(3x^2+x+4)}\right] =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}\right] = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+\arcsin x)^8 - 1}{\ln(1+\operatorname{tg} x)}$.

Решение. Заменяя числитель и знаменатель на эквивалентные бесконечно малые, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\arcsin x)^8 - 1}{\ln(1+\operatorname{tg} x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left[(1+\arcsin x)^8 - 1 + 1\right]}{\operatorname{tg} x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{8\ln(1+\arcsin x)}{x} = 8 \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 8.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{4^x - 5^x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{4^x-5^x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{3^x\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1\right]}{5^x\left[\left(\frac{4}{5}\right)^x - 1\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{3^x \ln\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 + 1\right]}{5^x \ln\left[\left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 + 1\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3^x x \ln\frac{2}{3}}{5^x x \ln\frac{4}{5}} = \frac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 4 - \ln 5}.$$

4.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение 1. Функция **f (x)**, непрерывная в каждой точке отрезка [a; b], называется **непрерывной на этом промежутке**.

Заметим, что под непрерывностью функции на концах промежутка понимается ее односторонняя непрерывность.

Заметим также, что графиком функции, непрерывной на промежутке, служит сплошная (непрерывная) линия на этом промежутке, которую можно вычертить одним движением карандаша, не отрывая его от бумаги.

Сформулируем теперь достаточно очевидные с геометрической точки зрения теоремы, дающие нам свойства функций, непрерывных на промежутке.

Теорема 1 (1-я теорема Вейерштрасса).

Если функция непрерывна на замкнутом промежутке [a; b], то на этом промежутке она и ограничена.

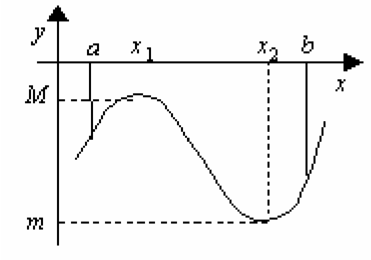


Рис.4.4.

Теорема 2 (2-я теорема Вейерштрасса).

Если функция непрерывна на замкнутом промежутке [a; b], то среди ее значений на этом промежутке имеется наименьшее и наибольшее значение.

Теорема 3 (1-я теорема Больцано-Коши).

Если функция непрерывна на замкнутом промежутке [a; b] и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри промежутка найдется хотя бы одна точка, в которой функция обращается в ноль.

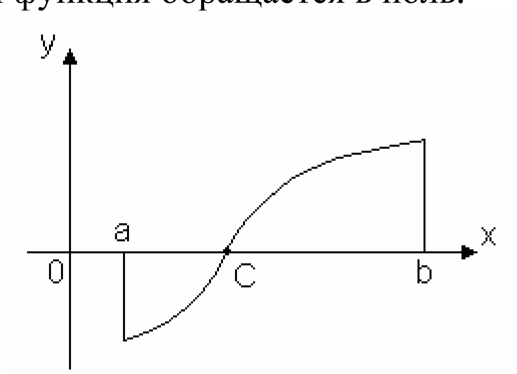


Рис.4.5.

Пример. Доказать, что уравнение $\mathbf{x^5 - 6x^2 + 3x - 7 = 0}$ имеет действительные корни на отрезке $[\mathbf{0,2}]$.

Решение. $\mathbf{f(x) = x^5 - 6x^2 + 3x - 7}$ непрерывна на $[\mathbf{0,2}]$ кроме того $\mathbf{f(0) = -7}$ и $\mathbf{f(2) = 7}$, следовательно $\exists\xi \in \mathbf{(0,2) : f(\xi) = 0}$.

Теорема 4 (2-я теорема Больцано-Коши).

Если функция непрерывна на замкнутом промежутке [a; b], то, принимая любые два значения на [a; b], функция принимает и всякое промежуточное значение.

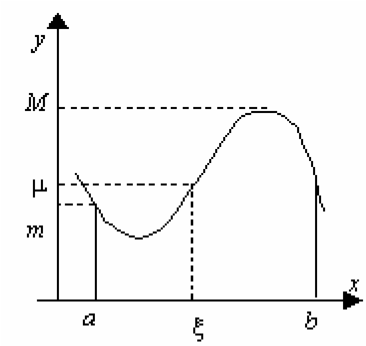


Рис.4.6.

4.4. Точки разрыва функции

Определение 1. Точка $\mathbf{x_0}$, принадлежащая множеству определения функции или являющаяся его граничной точкой, называется **точкой разрыва**, если в этой точке функция не является непрерывной.

Определение 2. Точкой разрыва первого рода функции **f(x)** называется такая точка $\mathbf{x_0}$, в которой функция имеет конечный левосторонний и правосторонний пределы, неравные между собой.

Определение 3. Скачком функции **f(x)** в точке разрыва x_0 называется разность ее конечных односторонних пределов , если они различны:

$$\mathbf{d = y(x_0 + 0) - y(x_0 - 0)}.$$

Определение 4. Точкой разрыва второго рода функции **f(x)** называется точка $\mathbf{x_0}$, если в этой точке один из односторонних пределов окажется бесконечным.

Определение 5. Точка $\mathbf{x_0}$ называется **точкой устранимого разрыва**, если в точке $\mathbf{x_0}$ функция не определена, а односторонние пределы $\mathbf{y(x_0 + 0)}$ и $\mathbf{y(x_0 - 0)}$ конечны и равны между собой, т.е. $\mathbf{y(x_0 + 0) = y(x_0 - 0)}$.

Например, функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ не определена при $x = 0$, но, полагая дополнительно $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, устраняем разрыв.

Пример 1. Исследовать на разрыв функцию $y = \text{arcctg}\frac{1}{x}$.

Элементарная функция $y = \text{arcctg}\,\frac{1}{x}$ определена и непрерывна во всех точках числовой оси, кроме $x = 0$. В точке $x = 0$ функция имеет разрыв, так как она определена в любой окрестности точки, за исключением самой точки. Найдем односторонние пределы :

$$\lim_{x\to x_0-0}\text{arcctg}\frac{1}{x}=\text{arcctg}\lim_{x\to x_0-0}\frac{1}{x}=\text{arcctg}(-\infty)=\pi;$$

$$\lim_{x\to x_0+0}\text{arcctg}\frac{1}{x}=\text{arcctg}\lim_{x\to x_0+0}\frac{1}{x}=\text{arcctg}(+\infty)=0.$$

Следовательно, разрыв функции в точке $x = 0$ конечен, относится к разрыву первого рода, и так как предел слева от исследуемой точки не равен пределу справа, то говорят, что функция здесь имеет скачок:

$$d=\lim_{x\to x_0+0}\text{arcctg}\frac{1}{x}-\lim_{x\to x_0-0}\text{arcctg}\frac{1}{x}=0-\pi=-\pi.$$

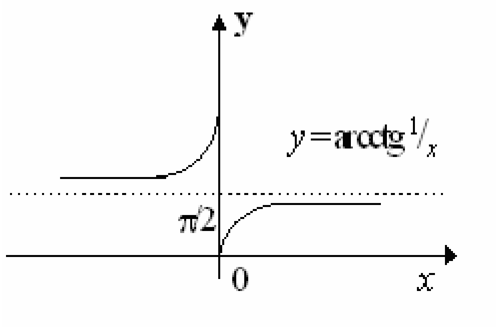


Рис.4.7.

Пример 2. $f(x)=\dfrac{6}{2+3^{\frac{1}{x-1}}}$.

Решение. Точка разрыва $x=1$. Так как $f(1+0)=0,\ f(1-0)0-3=-3$, то $x=1$ - точка разрыва 1 рода, скачок $f(1+0)-f(1-0)=-3$.

При построении графика учтем, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$.

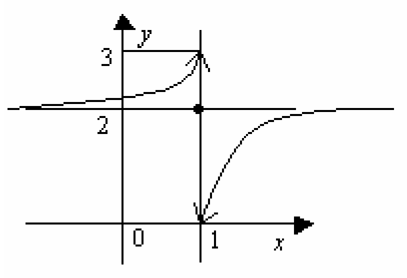


Рис.4.8.

Пример 3. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Решение. Очевидно, что при **x = 2** функция не существует. Исследуем поведение функции в указанной точке:

$$f(2)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Следовательно, если доопределить функцию в точке x = 2 как f(2) = 4, то функция становится непрерывной в указанной точке, т.е. при x = 2 разрыв является устранимым.

Пример 4. Исследовать непрерывность функции

$$y=\begin{cases}-x,\ x\in\,]-\infty,1[;\\ x,\ x\in\,]1,+\infty[\end{cases}\quad \text{в точке } x_0=1.$$

Решение.

1) В точке $x_0 = 1$ функция определена: **y(1) = 1**.

2) Правосторонний предел в точке x_0: $y(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0} x=1$.

3) Левосторонний предел в точке x_0: $y(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}(-x)=-1$.

Вывод: в точке $x_0 = 1$ функция претерпевает конечный разрыв (разрыв 1-го рода).

Скачок функции в точке x_0 **= -1**: **d = y(1 + 0) - y(1 - 0) = 1 - (- 1) = 2.**

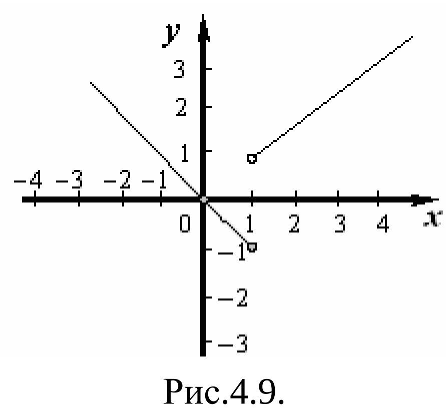


Рис.4.9.

4.5. Вертикальные асимптоты

С каждой точкой разрыва второго рода всегда связана некоторая прямая, обладающая особыми свойствами по отношению к функции.

Определение. Вертикальная прямая, задаваемая уравнением $\mathbf{x = x_0}$, называется **вертикальной асимптотой** графика функции $\mathbf{y = f(x)}$, если в точке $\mathbf{x_0}$ предел слева или справа равен бесконечности .

Пример 1. Дана функция $\mathbf{f(x) = \dfrac{x-7}{x^2+x-12}}$. Найти точки разрыва , если они существуют , определить их характер . Построить рисунок .

Область определения этой функции - множество всех действительных чисел, кроме тех, в которых знаменатель обращается в ноль: $\mathbf{x_1 = -4;\ x_2 = 3}$. Так как эта функция элементарная, то она непрерывна на всей числовой оси, кроме $\mathbf{x_1 = -4;\ x_2 = 3}$.

Вычислим односторонние пределы в этих точках.

При $\mathbf{x \to -4+0}$ величина $\mathbf{x + 4}$ является положительной бесконечно малой, тогда $\mathbf{\dfrac{1}{x+4}}$ является положительной бесконечно большой:

$$\lim_{x\to-4+0} f(x) = \lim_{x\to-4+0} \frac{x-7}{(x+4)(x-3)} = +\infty .$$

При $\mathbf{x \to -4+0}$ величина $\mathbf{x + 4}$ является отрицательной бесконечно малой , тогда $\mathbf{\dfrac{1}{x+4}}$ является отрицательной бесконечно большой:

$$\lim_{x\to-4-0} f(x) = \lim_{x\to-4-0} \frac{x-7}{(x+4)(x-3)} = -\infty .$$

Значит, в точке $\mathbf{x = -4}$ функция имеет разрыв второго рода.

Исследуем вторую точку $\mathbf{x = 3}$ и убедимся, что в данной точке функция терпит разрыв второго рода (предел справа от точки равен бесконечности):

$$\lim_{x\to3-0} f(x) = \lim_{x\to3-0} \frac{x-7}{(x+4)(x-3)} = +\infty ;$$

$$\lim_{x\to3+0} f(x) = -\infty .$$

Для построения графика функции найдем пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. В каждом из пределов получаем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Преобразуем выражение $\mathbf{\dfrac{x-7}{x^2+x-12}}$, разделив числитель и знаменатель на $\mathbf{x}$ в старшей степени

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}}=\frac{0-0}{1+0-0}=\frac{0}{1}=0; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{0}{1}=0.$$

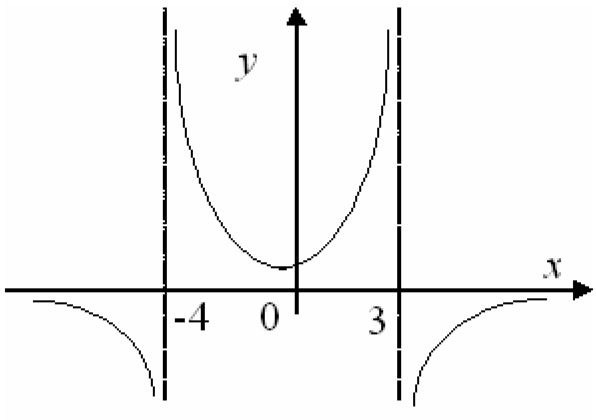


Рис.4.10.

Пример 2. Дана функция $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x<0;\\ -x+1, 0\le x<1;\\ x^2+1, x\ge 1\ .\end{cases}$

Найти точки разрыва, если они существуют, определить их характер. Построить рисунок.

Решение. Данная функция определена на всей числовой оси, но она не является элементарной, так как задана тремя различными формулами для различных значений аргумента **x**. Она может иметь разрыв в точках, где меняется ее аналитическое выражение. В остальных точках числовой оси функция непрерывна, так как задающие ее формулы определяют элементарные функции, непрерывные при всех значениях **x**.

Исследуем на непрерывность точки $x_1 = 0$; $x_2 = 1$:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty \quad ; \qquad \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(-x+1)=1,$$

следовательно, в точке $x = 0$ данная функция имеет разрыв второго рода:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(-x+1)=0; \quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(x^2+1)=2,$$

следовательно, в точке $x = 1$ данная функция имеет конечный разрыв первого рода.

Определим “скачок” функции: $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)-\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=2-0=2$.

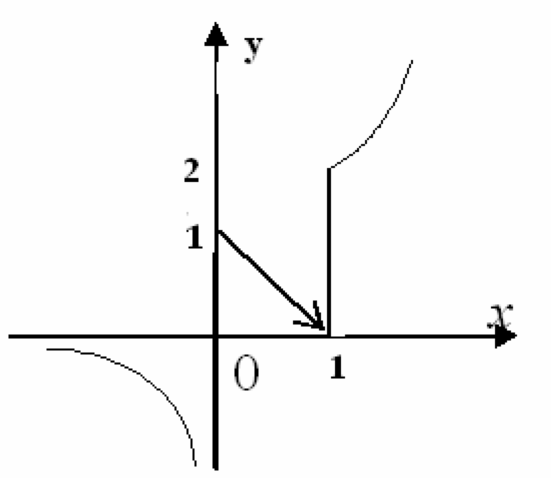


Рис.4.11.

Задание 01. Найти область определения функции.

Вар.	Задание.	Вар.	Задание.
1.	$y=\log_x(x^2-3x+2)$	2.	$y=\arccos e^{x^2-3x+2}$
3.	$y=\arcsin\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)$	4.	$y=\sqrt{\log_2\frac{x-1}{3-x}}$
5.	$y=\arcsin e^{x^2-1}$	6.	$y=\arcsin(\frac{x^2}{2}-1)$
7.	$y=\log_3(-x^3+x)$	8.	$y=\sqrt{\operatorname{tg}\pi x}$
9.	$y=\sqrt{\log_2\frac{x}{2}+1}$	10.	$y=\sqrt{\frac{x+2}{1-5x}}$
11.	$y=\arcsin\frac{2x^2+1}{2}$	12.	$y=\sqrt{3^x-3^{1-x}+2}$
13.	$y=\sqrt{\log_3\frac{x+1}{2-x}}$	14.	$y=\arcsin\frac{x-1}{1-2x}$
15.	$y=\ln\frac{x-2}{1-3x}$	16.	$y=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$
17.	$y=\sqrt{2^x(-x^2+x+2)}$	18.	$y=\sqrt{\log_x(2x-1)}$
19.	$y=\sqrt{\sin\pi x}$	20.	$y=\arcsin(x^2-1)$
21.	$y=\sqrt{\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x}}$	22.	$y=\ln\frac{x}{x^2-3x+2}$
23.	$y=\frac{1}{\log_2 x+\log_2(x+2)}$	24.	$y=\arccos\frac{x-1}{2-3x}$
25.	$y=\sqrt{x-8x^3}$	26.	$y=\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}$
27.	$y=\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2-3x}$	28.	$y=\sqrt{\ln\frac{x-1}{2}-1}$
29.	$y=\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}$	30.	$y=\arccos\frac{2x^2+1}{2}$

Задание 02. Исследовать функцию на четность (нечетность).

Вар.	Задание.	Вар.	Задание.
1.	$y=(x+x^2)^2$	2.	$y=\log_3(x^2-2x)$
3.	$y=\cos\dfrac{x}{1+x^2}$	4.	$y=e^{\frac{x}{x+2}}$
5.	$y=\cos x^3\cdot tgx$	6.	$y=\ln(x^4+1)$
7.	$y=e^{\cos x}+x^4$	8.	$y=\sqrt{x^4-x^2}$
9.	$y=\ln(x^5-1)$	10.	$y=\cos\dfrac{x}{1+x^3}$
11.	$y=\arcsin x\cdot arctgx^3$	12.	$y=\sin(\cos(\sin x))$
13.	$y=\cos\dfrac{1+x}{1+x^2}$	14.	$y=\sin\dfrac{2x}{1+x^4}$
15.	$y=e^{x^2}-e^{-x^2}$	16.	$y=\sin x\cdot e^{\sin^2 x}$
17.	$y=\ln(x^2+1)$	18.	$y=arctg(x^4+1)$
19.	$y=\sqrt{x^4+2x^2-3}$	20.	$y=\sin x^3\cdot tgx$
21.	$y=\arcsin(x^2-1)$	22.	$y=\log_2(x^3+4)$
23.	$y=e^{(tgx-\sin x)^2}$	24.	$y=e^{x^2+3x}$
25.	$y=\cos(\sin(\cos x))$	26.	$y=\sin(e^x-e^{-x})$
27.	$y=\cos\dfrac{2x}{1+x^4}$	28.	$y=e^{\sqrt{\cos 2x}}$
29.	$y=tg(ctgx)$	30.	$y=\ln(x^3+1)$

Задание 03. Используя деформацию графиков, построить эскизы графиков.

	Вариант 1.		Вариант 2.
1.	$y=3\ln(x-5)+1$	1.	$y=2e^{3x}-1$
2.	$y=\dfrac{2x}{x+1}$	2.	$y=\dfrac{1+x}{x-2}$
3.	$y=2\lvert ctg3x+1\rvert$	3.	$y=\lvert\ln(x+1)\rvert$
4.	$y=\ln\lvert x+1\rvert$	4.	$y=e^{\lvert 2x\rvert}$
5.	$y=\dfrac{\sin x}{x}$	5.	$y=x^2\sin 2x$

	Вариант 3.		Вариант 4.
1.	$y = 2\ln 3x + 3$	1.	$y = 2(\ln 3x + 3)$
2.	$y = \frac{1+x}{1-3x}$	2.	$y = \frac{2x+1}{x-1}$
3.	$y = 3\lvert\cos 2x - 1\rvert$	3.	$y = 2\lvert\operatorname{ctg}(2x-1)\rvert$
4.	$y = \sin\lvert 2x\rvert$	4.	$y = \lg\lvert x+1\rvert$
5.	$y = x + \sin 2x$	5.	$y = x^2 \cos 2x$

	Вариант 5.		Вариант 6.
1.	$y = 2\arcsin 2x$	1.	$y = 2\sqrt{1-3x} - 1$
2.	$y = \frac{1-x}{x-2}$	2.	$y = \frac{x-3}{x-1}$
3.	$y = 3\lvert\ln(x-5)\rvert$	3.	$y = 2\lvert\ln 3(x-1)\rvert$
4.	$y = 3^{\lvert x+1\rvert}$	4.	$y = \frac{1}{\cos\lvert x-\pi\rvert}$
5.	$y = 2x\sin 2x$	5.	$y = e^x \sin x$

	Вариант 7.		Вариант 8.
1.	$y = 2\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$	1.	$y = 3\arccos 2x + 1$
2.	$y = \frac{1-x}{2x+3}$	2.	$y = \frac{1+x}{2-x}$
3.	$y = 2\lvert\ln 3x\rvert$	3.	$y = 2\lvert\sin(2x-1)\rvert$
4.	$y = 2^{\lvert 2x+1\rvert}$	4.	$y = \cos\lvert 2x\rvert$
5.	$y = x\cos 3x$	5.	$y = x^2 \cos x$

	Вариант 9.		Вариант 10.
1.	$y = 3e^{3x-1} + 2$	1.	$y = 2\ln(x+1) - 1$
2.	$y = \frac{2x-1}{x-1}$	2.	$y = \frac{1-x}{1+2x}$
3.	$y = \lvert\operatorname{tg}(2x-1)\rvert$	3.	$y = \lvert\operatorname{ctg}(2x+1)\rvert$
4.	$y = 3^{\lvert x\rvert} - 1$	4.	$y = 2^{\lvert x-2\rvert}$
5.	$y = 2x - \frac{1}{x}$	5.	$y = \frac{x}{2} + \sin x$

	Вариант 11.		Вариант 12.
1.	$y = 2\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$	1.	$y = \frac{1}{2}\sqrt{1-2x} + 1$
2.	$y = \frac{2-x}{x-1}$	2.	$y = \frac{2x}{2-x}$
3.	$y = 2\left\|\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right\|$	3.	$y = 3\left\|\cos\frac{x}{2} - 1\right\|$
4.	$y = \operatorname{tg}\|2x\|$	4.	$y = \ln\|4x\|$
5.	$y = e^{x}\cos x$	5.	$y = x\sin 3x$

	Вариант 13.		Вариант 14.
1.	$y = 2\sin\frac{\pi x}{2} + 1$	1.	$y = 2e^{2x+1} - 2$
2.	$y = \frac{1+2x}{1-2x}$	2.	$y = \frac{1-x}{1+3x}$
3.	$y = \|3\ln(2+x)\|$	3.	$y = 2\|\ln(3-x)\|$
4.	$y = e^{\|x+2\|}$	4.	$y = \sin\left(\|x\| + \frac{\pi}{4}\right)$
5.	$y = \frac{x}{2}\sin x$	5.	$y = \frac{\cos x}{x}$

	Вариант 15.		Вариант 16.
1.	$y = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} - 2$	1.	$y = \frac{1}{2}\ln(x-1) + 2$
2.	$y = \frac{x-1}{1-2x}$	2.	$y = \frac{1-2x}{x+2}$
3.	$y = 2\|\sin 2x - 1\|$	3.	$y = \left\|(x-1)^{2} - 1\right\|$
4.	$y = 2^{\|x\|} - 1$	4.	$y = \frac{1}{\cos\|x\|}$
5.	$y = \frac{x}{2} + \cos x$	5.	$y = e^{-x}\cos x$

	Вариант 17.		Вариант 18.
1.	$y = 3\arccos\frac{x}{2}$	1.	$y = \sqrt{3-2x}$
2.	$y = \frac{1+x}{x-3}$	2.	$y = \frac{1-x}{x+2}$
3.	$y = \left\|-x^2+4x-3\right\|$	3.	$y = 3\left\|\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\|$
4.	$y = \frac{1}{\|x\|}+1$	4.	$y = \mathrm{ctg}\|2x\|$
5.	$y = e^{-x}\sin x$	5.	$y = x\cos x$

	Вариант 19.		Вариант 20.
1.	$y = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1$	1.	$y = \frac{3}{2}\arccos 2x$
2.	$y = \frac{2-x}{x+3}$	2.	$y = \frac{x-1}{2x-3}$
3.	$y = \left\|2\ln(3-x)\right\|$	3.	$y = \left\|x^2+3x+2\right\|$
4.	$y = e^{\|x-1\|}$	4.	$y = \ln\|2x-1\|$
5.	$y = \frac{x}{2}\cos 3x$	5.	$y = \frac{\cos x}{x^2}$

	Вариант 21.		Вариант 22.
1.	$y = 2\cos\frac{\pi x}{2}+1$	1.	$y = \frac{1}{2}e^{x+1}-1$
2.	$y = \frac{1-2x}{1+2x}$	2.	$y = \frac{x}{3-x}$
3.	$y = \left\|x^2-4x+3\right\|$	3.	$y = 2\left\|\mathrm{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\|$
4.	$y = \frac{1}{\sin\|x\|}$	4.	$y = \frac{1}{\sin\|x-\pi\|}$
5.	$y = x+\cos x$	5.	$y = \frac{x}{4}+\cos x$

	Вариант 23.		Вариант 24.
1.	$y = 2\sqrt{x-5} + 3$	1.	$y = 3\operatorname{ctg} 2x - 1$
2.	$y = \dfrac{x}{2x+1}$	2.	$y = \dfrac{2x+1}{1-x}$
3.	$y = 2\lvert \operatorname{tg} 2x + 1 \rvert$	3.	$y = \lvert (x+1)^2 - 1 \rvert$
4.	$y = \dfrac{1}{\ln\lvert x \rvert}$	4.	$y = e^{\lvert 2x-1 \rvert}$
5.	$y = \dfrac{1}{x} + x$	5.	$y = x \sin x$

	Вариант 25.		Вариант 26.
1.	$y = \dfrac{1}{2}\arccos 2x - 1$	1.	$y = 2\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$
2.	$y = \dfrac{x+1}{x-2}$	2.	$y = \dfrac{1-x}{3x+2}$
3.	$y = \lvert x^2 - 6x + 8 \rvert$	3.	$y = \lvert \ln(3 - x^2) \rvert$
4.	$y = 2 + \dfrac{1}{\lvert 2x \rvert}$	4.	$y = 1 - \dfrac{2}{\lvert x \rvert}$
5.	$y = \dfrac{x}{3}\cos 2x$	5.	$y = \dfrac{x}{2} + \cos 2x$

	Вариант 27.		Вариант 28.
1.	$y = 3\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$	1.	$y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x+2} - 2$
2.	$y = \dfrac{1-3x}{1+x}$	2.	$y = \dfrac{x-1}{2x+1}$
3.	$y = \lvert 3\ln(2-x) \rvert$	3.	$y = 2\left\lvert \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \right\rvert$
4.	$y = 2^{\lvert x-1 \rvert}$	4.	$y = 3^{\lvert 2x+1 \rvert}$
5.	$y = \dfrac{x}{3} + \cos x$	5.	$y = \dfrac{1}{x} + 2x$

	Вариант 29.		Вариант 30.
1.	$y = 2tg3x + 3$	1.	$y = 2\sqrt{8x} - 1$
2.	$y = \frac{x}{1-2x}$	2.	$y = \frac{x+1}{2x-1}$
3.	$y = \left\|x^2 - 3x + 2\right\|$	3.	$y = \left\|\ln\left(x^2 - 1\right)\right\|$
4.	$y = \frac{1}{\|2x\|} - 1$	4.	$y = ctg\|x + \pi\|$
5.	$y = x + \sin x$	5.	$y = \frac{x}{2}\cos x$

Задание 04. Найти участок монотонности функции и показать ее ограниченность.

Вар.	a_n	Вар.	a_n
1.	$\frac{3x+4}{x+2}$	2.	$\frac{2x+4}{1-3x}$
3.	$\frac{3x-2}{2x-1}$	4.	$\frac{5x+15}{6-x}$
5.	$\frac{4x-1}{2x+1}$	6.	$\frac{3-x^2}{2x^2+1}$
7.	$\frac{3x+4}{x+2}$	8.	$\frac{2x-1}{2-3x}$
9.	$\frac{2x-5}{3x+1}$	10.	$\frac{3x-1}{5x+1}$
11.	$\frac{7x-1}{x+1}$	12.	$\frac{1-2x^2}{4x^2+2}$
13.	$\frac{4x^2+1}{3x^2+2}$	14.	$\frac{5x+1}{10x-3}$
15.	$\frac{9-x^2}{2x^2+1}$	16.	$\frac{2-2x}{4x+3}$
17.	$-\frac{5x}{x+1}$	18.	$\frac{23-4x}{2-x}$
19.	$\frac{x+1}{1-2x}$	20.	$\frac{3x+1}{6-x}$

21.	$\dfrac{2x+1}{3x-5}$	22.	$\dfrac{2x+3}{x+5}$
23.	$\dfrac{1-2x^2}{x^2+3}$	24.	$\dfrac{3x^2+2}{4x^2-1}$
25.	$\dfrac{3x^2}{2-x^2}$	26.	$\dfrac{2-3x^2}{5x^2+4}$
27.	$\dfrac{x}{3x-1}$	28.	$\dfrac{2x^2}{x^2-2}$
29.	$\dfrac{3x}{x-1}$	30.	$\dfrac{x+7}{2x+5}$

Задание 05. На языке окрестностей ("$\varepsilon - \delta$") сформулировать определения предела функции в точке и одностороннего предела, соответствующие символическим равенствам.

Вариант	Задание 1.	Задание 2.
1.	1. $\lim\limits_{x\to5} f(x) = -3$	2. $\lim\limits_{x\to2+0} \log_4(x-2) = -\infty$
2.	1. $\lim\limits_{x\to3-0} f(x) = \infty$	2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
3.	1. $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$	2. $\lim\limits_{x\to+0} \log_5 x = -\infty$
4.	1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	2. $\lim\limits_{x\to-0} e^x = 1$
5.	1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$	2. $\lim\limits_{x\to-4+0} \dfrac{1}{x+4} = +\infty$
6.	1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	2. $\lim\limits_{x\to-1+0} \arcsin x = -\dfrac{\pi}{2}$
7.	1. $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 1$	2. $\lim\limits_{x\to+0} \log_{0,5} x = +\infty$
8.	1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$	2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$
9.	1. $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = 4$	2. $\lim\limits_{x\to+0} \log_2 X = -\infty$
10.	1. $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$	2. $\lim\limits_{x\to1-0} \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$

11.	1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$
12.	1. $\lim\limits_{x\to3-0} f(x)=+\infty$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{3}} x=-\infty$
13.	1. $\lim\limits_{x\to3+0} f(x)=-\infty$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$
14.	1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$	2. $\lim\limits_{x\to1+0} \log_2(x-1)=-\infty$
15.	1. $\lim\limits_{x\to3+0} f(x)=+\infty$	2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}=0$
16.	1. $\lim\limits_{x\to10} f(x)=1$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x=+\infty$
17.	1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$	2. $\lim\limits_{x\to-5-0} \frac{1}{x+5}=-\infty$
18.	1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	2. $\lim\limits_{x\to-3-0} \frac{1}{x+3}=-\infty$
19.	1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-3$	2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x=-\infty$
20.	1. $\lim\limits_{x\to4} f(x)=+\infty$	2. $\lim\limits_{x\to-1} x^3=-1$
21.	1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	2. $\lim\limits_{x\to2} x^2=4$
22.	1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$	2. $\lim\limits_{x\to-5+0} \frac{1}{x+5}=+\infty$
23.	1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-5$	2. $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{ctg} x=+\infty$
24.	1. $\lim\limits_{x\to-3-0} f(x)=-\infty$	2. $\lim\limits_{x\to\pi} \cos x=-1$
25.	1. $\lim\limits_{x\to4-0} f(x)=-\infty$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty} 4^{-x}=0$
26.	1. $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$	2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x=+\infty$
27.	1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-10$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 x=+\infty$
28.	1. $\lim\limits_{x\to4+0} f(x)=+\infty$	2. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \cos x=0$
29.	1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$	2. $\lim\limits_{x\to3\pi/2} \cos x=0$
30.	1. $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$	2. $\lim\limits_{x\to1+0} \frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

Задание 06. Доказать (найти δ(*x*)), что:

Вар	Задание	x_0	Вар	Задание	x_0
1	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2+5x-3}{x+3}=-7$	-3	2	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{5x^2-4x-1}{x-1}=6$	1
3	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2+5x-2}{x+2}=-7$	-2	4	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{4x^2-14x+6}{x-3}=10$	3
5	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{6x^2+x-1}{x+1/2}=-5$	-1/2	6	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{6x^2-x-1}{x-1/2}=5$	1/2
7	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{9x^2-1}{x+1/3}=-6$	-1/3	8	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2-5x-2}{x-2}=7$	2
9	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2-2x-1}{x+1/3}=-4$	-1/3	10	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{7x^2+8x+1}{x+1}=-6$	-1
11	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-4x+3}{x-3}=2$	3	12	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2+3x-2}{x-1/2}=5$	1/2
13	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{6x^2-5x+1}{x-1/3}=-1$	1/3	14	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{10x^2+9x-7}{x+7/5}=-19$	-7/5
15	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2+13x+21}{2x+7}=-\frac{1}{2}$	-7/2	16	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-9x+10}{2x-5}=\frac{1}{2}$	5/2
17	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{6x^2+x-1}{x-1/3}=5$	-1/3	18	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{6x^2-75x-39}{x+1/2}=-81$	-1/2
19	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-21x-11}{x-11}=23$	11	20	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{5x^2-24x-5}{x-5}=26$	5
21	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2+15x+7}{x+7}=-13$	-7	22	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2+6x-8}{x+4}=-10$	-4
23	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{6x^2-x-1}{3x+1}=-\frac{5}{3}$	-1/3	24	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+2x-15}{x+5}=-8$	-5
25	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2-40x+128}{x-8}=8$	8	26	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{5x^2-51x+10}{x-10}=49$	10
27	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-5x+2}{x-1/2}=-3$	½	28	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2+17x-6}{x+6}=-19$	-6
29	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2+17x-6}{x-1/3}=19$	1/3	30	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{15x^2-2x-1}{x+1/5}=-8$	-1/5

Задание 07. Вычислить пределы функций:

Вар.		Вар.	
1.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$	2.	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$
3.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$	4.	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$
5.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$	6.	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$
7.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$	8.	$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{2x^2+13x+20}$
9.	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+4x-21}{2x^2-7x+3}$	10.	$\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x^2+8x+15}$
11.	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$	12.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$
13.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$	14.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$
15.	$\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$	16.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{2x^2-13x+20}$
17.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$	18.	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$
19.	$\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{3x^2+5x-50}{x^2+8x+15}$	20.	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$
21.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-2x}$	22.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+x-6}$
23.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2+4x+3}$	24.	$\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+x-20}{2x^2+7x-15}$
25.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{2x^2-13x+20}$	26.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{6x^2-5x-11}{3x^2+4x+1}$
27.	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-x-20}$	28.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2+x-6}{2x^2-x-1}$
29.	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{x^2+5x+6}$	30.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2-3x-4}$

Задание 08. Вычислить пределы функций:

Вар.		Вар.	
1.	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$	2.	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$
3.	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+4x^2+3x}$	4.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$
5.	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$	6.	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$
7.	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x^3)-(1+3x)}{x+x^5}$	8.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$
9.	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$	10.	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$
11.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$	12.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$
13.	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$	14.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$
15.	$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$	16.	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$
17.	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$	18.	$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$
19.	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$	20.	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$
21.	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$	22.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$
23.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$	24.	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$
25.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$	26.	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$
27.	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$	28.	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3+(1+3x)}{x^2+x^5}$
29.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$	30.	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$

Задание 09. Вычислить пределы функций:

Вар.		Вар.	
1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$	2.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+2}{2x^2+x-3}$
3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+5x^2-3}{5x^4-2x^3-4x}$	4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$
5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-x}$	6.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-7x^2-5x^3}{2-2x-x^3}$
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3-3x^2+3}{3-2x^3+x}$	8.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2+7}{9x^4+x-5}$
9.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x-5x^4}{2+2x^2-x^4}$	10.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+14x^2}{7x^2-x+2}$
11.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2+x}{3x^2-x}$	12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x^5-2x+1}{8x^5+3x^2-x}$
13.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3-2x+7}{3x^3-x^2+x}$	14.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-2x^3+2}{x^4+x}$
15.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x+1}{-x^3+3x^2-x}$	16.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x+1}{2x^3+3x^2-x}$
17.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-6x+4x^3}{2x^3+3x^2-x}$	18.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-x-5x^4}{2+2x^2+5x^4}$
19.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-14x^2}{7x^2+4x+2}$	20.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-12}{3x^2-x}$
21.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-4x^3-2x}{8x^3-3x^2-x}$	22.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-2x+7}{2x^2+4x^2+x}$
23.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-2x^3+2}{x^4+x}$	24.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-5x^3}{x^3-4x^2-x}$
25.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1-6x^3}{2x^3+3x^2-x}$	26.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-6x-x^3}{2x^3-x}$
27.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+2}{2x^2-x-3}$	28.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+5x^2-3}{x^4-x^3+14}$
29.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{8x^2+2x-5}$	30.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+x-2x^3}{2x^3+x^2-x}$

Задание 10. Вычислить пределы функций:

Вар.		Вар.	
1.	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$	2.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$
3.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$	4.	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{2-\sqrt{2x-6}}$
5.	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$	6.	$\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$
7.	$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$	8.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{8+x}}$
9.	$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{8+x}-2}{\sqrt{x^2-7}-3}$	10.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$
11.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-x^2}$	12.	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{x+4}}$
13.	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{2x-2}}{2-\sqrt{x+1}}$	14.	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$
15.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5-\sqrt{6x+1}}{2-\sqrt{x}}$	16.	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{2x+3}}$
17.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{2-\sqrt{2x}}$	18.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x^2}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$
19.	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1-\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x+6}}$	20.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$
21.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{5-\sqrt{5x+5}}$	22.	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}{2-\sqrt{x+1}}$
23.	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x-5}$	24.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5-\sqrt{6x+1}}{3-\sqrt{x+5}}$
25.	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{2x+3}}$	26.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3}}{2-\sqrt{2x}}$
27.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x+3}}$	28.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$
29.	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{5-x}$	30.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{x+9}}{5x}$

Задание 11. Вычислить пределы функций:

Вар.		Вар.	
1.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$	2.	$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$
3.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$	4.	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$
5.	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$	6.	$\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$
7.	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$	8.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$
9.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$	10.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$
11.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}$	12.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$
13.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$	14.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$
15.	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$	16.	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$
17.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$	18.	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$
19.	$\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$	20.	$\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$
21.	$\lim\limits_{x\to 0,25}\dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$	22.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$
23.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$	24.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$
25.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$	26.	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$
27.	$\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$	28.	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$
29.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$	30.	$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$

Задание 12. Доказать что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Заполнить таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$			

Вар	a_n	a	Вар	a_n	a
1	$\frac{3n-2}{2n-1}$	3/2	2	$\frac{4n-1}{2n+1}$	2
3	$\frac{7n+4}{2n+1}$	7/2	4	$\frac{2n-5}{3n+1}$	2/3
5	$\frac{7n-1}{n+1}$	7	6	$\frac{4n^2+1}{3n^2+2}$	4/3
7	$\frac{9-n^3}{1+2n^3}$	-1/2	8	$\frac{4n-3}{2n+1}$	2
9	$\frac{1-2n^2}{2+4n^2}$	-1/2	10	$-\frac{5n}{n+1}$	-5
11	$\frac{n+1}{1-2n}$	-1/2	12	$\frac{2n+1}{3n-5}$	2/3
13	$\frac{1-2n^2}{n^2+3}$	-2	14	$\frac{3n^2}{2-n^2}$	-3
15	$\frac{n}{3n-1}$	1/3	16	$\frac{3n^3}{n^3-1}$	3
17	$\frac{4+2n}{1-3n}$	-2/3	18	$\frac{5n+15}{6-n}$	-5
19	$\frac{3-n^2}{1+2n^2}$	-1/2	20	$\frac{2n-1}{2-3n}$	-2/3
21	$\frac{3n-1}{5n+1}$	3/5	22	$\frac{4n-3}{2n+1}$	2
23	$\frac{1-2n^2}{2+4n^2}$	-1/2	24	$\frac{5n+1}{10n-3}$	1/2
25	$\frac{2-2n}{3+4n}$	-1/2	26	$\frac{23-4n}{2-n}$	4
27	$\frac{1+3n}{6-n}$	-3	28	$\frac{2n+3}{n+5}$	2
29	$\frac{3n^2+2}{4n^2-1}$	3/4	30	$\frac{2-3n^2}{4+5n^2}$	-3/5

Задание 13. Доказать, что последовательность расходится.

Вар.	a_n	Вар.	a_n
1.	$3n+1$	2.	$\sqrt{n+3}$
3.	$2\cdot(-1)^n$	4.	$2n-(-1)^n$
5.	$1-n$	6.	$4n+3$
7.	$\frac{1+(-1)^n}{2}$	8.	$\sin\frac{\pi n}{2}$
9.	$\sqrt{n^2+3}$	10.	$\sqrt{2n+1}$
11.	$\ln(n+2)$	12.	n^2-5n+1
13.	$n+\sin\frac{\pi n}{2}$	14.	$\sqrt{n^2-2n+9}$
15.	2^{n+1}	16.	$5+(-1)^n$
17.	$3-\cos\pi n$	18.	$\sqrt{6n+7}$
19.	n^2-2n	20.	$n^2\cdot(-1)^n$
21.	$n^{(-1)^n}$	22.	$\frac{n^2}{n+1}$
23.	3^n+1	24.	$\log_2(n^2+n)$
25.	2^{n-3}	26.	$\sqrt[3]{n+1}$
27.	$\sqrt[4]{n}$	28.	$\frac{3^n}{n}$
29.	3^n+2^{-n}	30.	$1+3\cdot(-1)^n$

Задание 14. Вычислить пределы числовых последовательностей

Вар	Задание	Вар	Задание
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3+(3+n)^3}{(3-n)^2-(3+n)^2}$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$
5	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$	6	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$
7	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$	8	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^2-(n+3)^2}$
9	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$	10	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}$
11	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$	12	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3}$
13	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^3}$	14	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$
15	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$	16	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$
17	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$	18	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^3}{(n+6)^3-(n+1)^3}$
19	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$	20	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$
21	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$	22	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$
23	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+5)^2+(n-5)^2}$	24	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$
25	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$	26	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$
27	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(2n-2)^3}{3n^3+2n^2-1}$	28	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}$
29	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$	30	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$

Задание 15. Вычислить пределы числовых последовательностей

Вар	Задание	Вар	Задание
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$
5	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n}-n}$	6	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{9+n^2}}$
7	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1}-\sqrt[3]{n^4-1}}$	8	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2}+\sqrt{n-2}}$
9	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$	10	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$
11	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[4]{3n+1}+\sqrt{81n^4-n^2+1}}{(n+\sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}$	12	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{3n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}$
13	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3}+\sqrt{n-3}}$	14	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{2n-\sqrt[4]{n^4+1}}$
15	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n+1}-\sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[3]{n^5+n}}$	16	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{7n}-\sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}}$
17	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3-7}+\sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5}+\sqrt{n}}$	18	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6}-\sqrt{n-6}}$
19	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1}-5n}$	20	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4}-\sqrt[5]{n^5+5}}$
21	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})\sqrt{n^2-n+1}}$	22	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}-\sqrt{n+1}}$

23	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^7+5}-\sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5}+\sqrt{n-5}}$	24	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$
25	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2}-\sqrt[5]{n^5+2}}$	26	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{71n}-\sqrt[3]{64n^6+9}}{(n-\sqrt[3]{n})\sqrt{11+n^2}}$
27	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^3+1}}$	28	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^8+6}-\sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6}+\sqrt{n-6}}$
29	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}$	30	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[5]{n^5+1}}$

Задание 16. Вычислить пределы числовых последовательностей

Вар	Задание
1	$\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$
2	$\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3})$
3	$\lim\limits_{n\to\infty} (n-\sqrt[3]{n^3-5})n\sqrt{n}$
4	$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9})$
5	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$
6	$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-3n+2}-n)$
7	$\lim\limits_{n\to\infty} (n+\sqrt[3]{4-n^3})$
8	$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3})$
9	$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)})$
10	$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8})$
11	$\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n)$

12	$\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3})$
13	$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2})$
14	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$
15	$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3})$
16	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})$
17	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n(n^5+9)}-\sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}$
18	$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+5)}-n)$
19	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1})$
20	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)}-\sqrt{n(n^4+1)}}{2\sqrt{n}}$
21	$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)})$
22	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)}-n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$
23	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)}-\sqrt{n^6-1}}{n}$
24	$\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n(n-1)})$
25	$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2(n^6+4)}-\sqrt[3]{n^8-1})$
26	$\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)})$
27	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)})$
28	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4})$
29	$\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2})$
30	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)(n+2)}(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2})$

Задание 17. Вычислить пределы числовых последовательностей

Вар	Задание
1	$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2})$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+3+5+7+...+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{n})$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{\sqrt{9n^4+1}}$
6	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{1+2+3+...+n}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{n+3}-n)$
8	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$
9	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$
11	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}-5^{n+2}}$
12	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^n}}$
13	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3-5-7+9-11+...+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}$
14	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2+3-4+...+(2n-1)-2n}{n}$
15	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+...+(2n-1)}$
16	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$

17	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{n+2}{1+2+3+...+n}-\frac{2}{3}\right)$
18	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+...+\frac{3^n+2^n}{6^n}\right)$
19	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-5+4-7+...+2n-(2n+3)}{n+3}$
20	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$
21	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n-n^2+3}$
22	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+...+(5n-3)}$
23	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{16}+\frac{9}{64}+...+\frac{1+2^n}{4^n}\right)$
24	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n-1)}$
25	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+5+9+13+...+(4n-3)}{n+1}-\frac{4n+1}{2}\right)$
26	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2+3-4+...-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}$
27	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$
28	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$
29	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+6+9+...+3n}{n^2+4}$
30	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{100}+...+\frac{2^n+5^n}{10^n}\right)$

Задание 18. Вычислить пределы числовых последовательностей

Вар	Задание	Вар	Задание
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$

3	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$
5	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$	6	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$
7	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$	8	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+5}$
9	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$	10	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$
11	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$	12	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$
13	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$	14	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}$
15	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$	16	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^2}$
17	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$	18	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$
19	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$	20	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$
21	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$	22	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$
23	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$	24	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^{n}$
25	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$	26	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$
27	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$	28	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$
29	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$	30	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-7}\right)^{n/6+1}$

Задание 19. Вычислить пределы:

Вар	Задание	Вар	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\,2x}{4x}$	2	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 ctg\,2x}{\sin 3x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$	4	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\arcsin x}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{5x}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{xtg3x}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\cos x-\cos^2 x}$	10	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{\arcsin 3x}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{3arctg3x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x\cdot tgx}$
13	$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot tgx\cdot ctg^2 2x$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\cos 2x-1}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{\cos x-\cos^3 x}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cdot tg3x}$
17	$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg5x$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\cdot\sin 2x}$
19	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 3x}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{arctg3x}$
21	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x\cdot tgx}$	22	$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot tg5x\cdot ctg^2 x$
23	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin 3x}$	24	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{tg^2 4x}$
25	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cdot\sin 5x}$	26	$\lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot ctg^2 3x$
27	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 ctg3x}{\sin x}$	28	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 4x-1}{x^2}$
29	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{4x^2}$	30	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 4x}{6x}$

Задание 20. Вычислить пределы:

Вар	Задание	Вар	Задание
1	$\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+1)(\ln(x+3)-\ln x)$	2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$

3	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$	4	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$
5	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)(\ln(x-3)-\ln x)$	6	$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{1/x}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x-1}$	8	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+1}\right)^{2x}$
9	$\lim\limits_{x\to2}(3x-5)^{2/(x-2)}$	10	$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-7)(\ln(x+4)-\ln x)$
11	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)(\ln(2x-3)-\ln(2x+1))$	12	$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$
13	$\lim\limits_{x\to3}(2x-5)^{2x/(x-3)}$	14	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)(\ln(x+1)-\ln(x-2))$
15	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)(\ln(3-2x)-\ln(4-2x))$	16	$\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{x/(x-2)}$
17	$\lim\limits_{x\to3}(2x-5)^{\frac{2x}{x^2-9}}$	18	$\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{2x/(x-1)}$
19	$\lim\limits_{x\to+\infty}(2+3x)(\ln(3x+1)-\ln(2+3x))$	20	$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)(\ln(x+3)-\ln(x+4))$
21	$\lim\limits_{x\to+\infty}4x(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$	22	$\lim\limits_{x\to3}(x-2)^{1/(3-x)}$
23	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-4)(\ln(x+1)-\ln x)$	24	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{5x-1}$
25	$\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{x/(x-1)}$	26	$\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{2x}{x^2-1}}$
27	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{x-2}\right)^{4x}$	28	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^{5x}$
29	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x+3}\right)^{2x-3}$	30	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)(\ln(x-3)-\ln(x-1))$

Задание 21. Показать, что данные функции являются бесконечно малыми или бесконечно большими при указанном стремлении. Сравнить их (если возможно). Определить (если это возможно) порядок каждой из них и выделить (если возможно) главную часть в виде $\mathbf{Cx^k}$ или $\mathbf{C(x-x_0)^k}$.

№	**f(x)**	**g(x)**	стремление
1.	$\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$	$x\sin^3\frac{1}{x}$	$+\infty$
2.	$\ln\frac{x}{2}$	$\ln\frac{x}{2}$	**2**
3.	$\sqrt[3]{x-1}$	$\sqrt[3]{\ln(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4})}$	**1**

4.	$\ln(1+\sqrt{x^2 \sin x})$	$\dfrac{e^{x^2}-1}{tgx}$	**0**
5.	$e^{2x}-e^x$	$tg2x-\sin 3x$	**0**
6.	$x^2+x\sin x$	$x^3 \ln\dfrac{x+1}{x+2}$	∞
7.	$2x^2+x\sin x$	$x^2 \sin\dfrac{1}{x}$	∞
8.	$\sqrt[3]{2-\sqrt{x}}$	$\ln\dfrac{x}{4}$	**4**
9.	$(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})\dfrac{1}{x}$	$\ln\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right)$	$+\infty$
10.	$\dfrac{\ln(x-2)}{\arcsin\sqrt{x-3}}$	$\sqrt{3x}-\sqrt{6+x}$	**3+**
11.	$\left(\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x}}-1\right)^2$	$\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}-1\right)^5$	$+\infty$
12.	$\dfrac{1}{5^x-25}$	$\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}$	**2-**
13.	$\sin x$	$e^{\sqrt{\frac{x}{\pi}}}-e$	π
14.	$\sqrt{x+2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x+3\sqrt{x}}$	$+\infty$
15.	$\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$	$tg\dfrac{\pi x}{2}$	**1**
16.	$x^3(1-e^{-x})$	$x^3 \sin\dfrac{1}{x}$	$+\infty$
17.	$\dfrac{arctgx}{1+x^2}$	$\dfrac{4}{3+x^2}$	$+\infty$
18.	$\sin\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x(e^{x^2}-1)}$	$+\infty$
19.	$\sin(x+x^2)$	$\ln(1-x^2+x^3)$	**0**
20.	$\ln\dfrac{x+1}{x-1}$	$\dfrac{1}{x^2+x^6}$	∞
21.	$tg\left(x^2+x^3\right)$	$e^{x^2}-e^x$	**0**
22.	$\dfrac{1}{\sin x-tgx}$	$\dfrac{1}{e^{x^2}-1}$	**0**

23.	$\ln\frac{x}{e}$	$\sin\sqrt[3]{x-e}$	e
24.	$x+x^2\sin\frac{1}{x}$	$\sin x$	0
25.	$\arcsin\left(\sqrt{x}+x^2\right)$	$x\ln(1+\sin x)$	$0+$
26.	$e^{2x}-e^x$	$tg\left(x^2+x\right)$	0
27.	$2x^2+x\sin x$	$\sin\frac{1}{x}$	$+\infty$
28.	$\frac{4}{3+x^2}$	$\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)$	$+\infty$
29.	$\ln\frac{x}{9}$	$\sqrt[3]{3-\sqrt{x}}$	9
30.	$\sqrt[3]{x-1}$	$\frac{x^2+1}{x^2-1}$	1

Задание 22. Определить порядок функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ относительно x, предварительно установив, являются ли они в точке x_0, бесконечно малыми или бесконечно большими. Сравнить функции f_1 и f_2. Выделить главную часть.

Вариант	$f_1(x)$	$f_2(x)$	x_0
1.	$3\arcsin(2x^2+x^4)$	$tg^2\sqrt{x}(1-\cos 2\sqrt{x})$	0
2.	$\sin\pi(x+5)$	$(e^{3x}-1)^2$	0
3.	$\sin(x\sqrt{x}+e^{2x}-1)$	$\sqrt{x}\,tg\sqrt[3]{x}$	0
4.	$5x^3+3x^2 arctgx$	$(x^3-1)^2+2x^6$	∞
5.	$\ln(1+x^2+x^5)$	$3x+x\sqrt{x}$	0
6.	$(3x+1)arctg4x^2$	$x\sqrt{x^2+1}$	0
7.	$\ln(1+\sqrt{x}\sin x)$	$e^{2x}-1$	0
8.	$x^2+3\sqrt{x}+4x^3$	x^2-2x+3	∞
9.	$\sqrt{x^2+3\sqrt{x+1}}$	x^2+5x+1	∞
10.	x^2+6x	$\ln(1+2\,tg\,x)$	0
11.	$6x^3+\sqrt{x^6+1}$	$\sqrt[3]{x^9+1}+x^2$	∞

12.	$\left(e^{2x}-1\right)^2$	$1-\cos^3 x$	**0**
13.	$\sin\sqrt[3]{x}(1-\cos\sqrt{x})$	$\mathrm{tg}(\pi(x-5))$	**0**
14.	$4^{-3x^2}-1$	$\sin 5x-3\sin 2x$	**0**
15.	$\mathrm{arctg}\,(x^2+3x)$	$1-\sqrt{3x+1}$	**0**
16.	$\frac{1}{1-\sqrt{3x+1}}$	$\frac{1}{3x^2+2x}$	**0**
17.	$1-\cos 10x^2$	$\sqrt{1+x}-1$	**0**
18.	$x\sqrt[3]{5x^3}+\sqrt[4]{x^{12}+1}$	$(x^2-1)^2-x^4$	∞
19.	$\arcsin(3x+5x^3)$	$2^{x^2}-1$	**0**
20.	$x^2+6x+3\sqrt{x}$	$\frac{1}{(2x+1)\cdot\sin^2\frac{1}{x}}$	∞
21.	$\left(5^{-x^2}-1\right)x$	$(1-\cos 6x)\cdot\mathrm{tg}\,2x$	**0**
22.	$\left(1-e^{-6x}\right)\cdot\cos 2x$	$\ln\left(1+2\sin\sqrt{x}+x\right)$	**0**
23.	$(2-x)^4-(3+x)^4$	$\frac{\left(x^3+3x^2\right)}{\sin\frac{1}{x}}$	∞
24.	$\left(x^2-3x+2\right)(x^2-2)$	$3x^3-1+(x-2)^3$	∞
25.	$\sin 10x-4\sin x^2$	$e^{6x^2}-1$	**0**
26.	$\frac{1}{3x^2+2x\cdot\mathrm{arctg}\,x}$	$x\cdot\sin\frac{x+1}{5x^3+3x}$	∞
27.	$\sqrt{1+3x^2}-1$	$x\cdot\mathrm{tg}\left(2\pi(x+\frac{1}{2})\right)$	**0**
28.	$\sin\frac{2}{x+x^2}$	$\frac{2x+1}{3x^2\sqrt{x}+5x}$	∞
29.	$x+\sqrt{x}(1+5x^2)$	$(x^2-1)^2$	∞
30.	$1-\sqrt{1+3x^2}$	$x\cdot\mathrm{tg}\,3x$	**0**

Задание 23. Определить характер функций (б.б., б.м.) $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ в точке x_0 и выделить главную часть.

Вариант	Задание.
1.	$f_1(x)=\dfrac{3\cos 4x}{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}, \quad x_0=0,$ $f_2(x)=(3x^2+1)\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5x}, \quad x_0=\infty$ $f_3(x)=\operatorname{tg} 3\pi x, \quad x_0=2$
2.	$f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}-1}, \quad x_0=1,$ $f_2(x)=(2x+3)(x+\sqrt[3]{x}), \quad x_0=\infty$ $f_3(x)=\cos x-\sqrt[3]{\cos x}, \quad x_0=0$
3.	$f_1(x)=\ln(13-3x^2), \quad x_0=-2,$ $f_2(x)=(x^2-3x)\operatorname{tg}2x^2, \quad x_0=0$ $f_3(x)=x\sqrt{x}(x+\sqrt{x^2+1}), \quad x_0=\infty$
4.	$f_1(x)=\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x, \quad x_0=0,$ $f_2(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)\sin\pi x}, \quad x_0=1$ $f_3(x)=\ln(x+2)-\ln x, \quad x_0=\infty$
5.	$f_1(x)=1-\cos^3 x, \quad x_0=0,$ $f_2(x)=\dfrac{3x+7}{x^2-x-12}, \quad x_0=-3$ $f_3(x)=\sqrt[4]{x^4+x^2}+x^3, \quad x_0=\infty$
6.	$f_1(x)=\sin\sqrt{x}(e^{2\sqrt{x}}-1), \quad x_0=0,$ $f_2(x)=\dfrac{x+3}{(x^3-1)^2}, \quad x_0=1$ $f_3(x)=\sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\arcsin\dfrac{2x}{5x^2+3}, \quad x_0=\infty$

7.	$f_1(x) = e^{2x} + e^{-x} - 2, \quad x_0 = 0,$ $f_2(x) = \dfrac{x-3}{\sin^2 \pi x}, \quad x_0 = 2$ $f_3(x) = (2x^2 + 3x) \cdot \operatorname{arctg} 3x^2, \quad x_0 = \infty$
8.	$f_1(x) = \ln(1 + 2\sin\sqrt{x} + \operatorname{tg}^2 x), \quad x_0 = 0,$ $f_2(x) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}, \quad x_0 = 5$ $f_3(x) = \dfrac{x}{x^2+5}\sin\dfrac{2}{x\sqrt{x}}, \quad x_0 = \infty$
9.	$f_1(x) = \operatorname{tg} x - 2\sin\sqrt{x}, \quad x_0 = 0,$ $f_2(x) = \dfrac{2x+3}{\sin 3x}, \quad x_0 = \pi$ $f_3(x) = \ln(x^2 + x) - \ln(x^2 + 1), \quad x_0 = \infty$
10.	$f_1(x) = \arcsin 3x - \sin 4x, \quad x_0 = 0,$ $f_2(x) = \dfrac{2x-1}{\ln(4+x)}, \quad x_0 = -3$ $f_3(x) = \dfrac{2x^2 - 3x^3 + 4\sqrt{x+5}}{x^2 + 4x}, \quad x_0 = \infty$
11.	$f_1(x) = \left(e^{x^2} - 1\right) \cdot \sin 2x, \quad x_0 = 0,$ $f_2(x) = \dfrac{1}{\ln^2(x^2 - 8)}, \quad x_0 = -3$ $f_3(x) = \dfrac{2}{x^2 + x} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{3}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = \infty$
12.	$f_1(x) = \sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1, \quad x_0 = 0,$ $f_2(x) = \dfrac{2x+1}{x^3 + 2x^2 + x)}, \quad x_0 = -1$ $f_3(x) = \operatorname{arctg} 4x \cdot \left(e^{\frac{1}{2x}} - 1\right), \quad x_0 = \infty$

13.	$f_1(x)=\frac{x+6}{2^x-8},\ \ x_0=3,$ $f_2(x)=x^{-1}(\ln(x+1)-\ln x),\qquad x_0=\infty$ $f_3(x)=x^2+2x+3\sin^2 x-4\operatorname{tg}x,\qquad x_0=0$
14.	$f_1(x)=\frac{1}{x\sin 3x},\quad x_0=\pi$ $f_2(x)=\frac{(2x+3)^3(3x-2)^3}{x^4+1},\quad x_0=\infty$ $f_3(x)=\operatorname{arctg}(\sqrt{4+x^2}-2),\quad x_0=0$
15.	$f_1(x)=\sqrt{1+x^2+3x}-1,\quad x_0=0,$ $f_2(x)=2^{\frac{5x}{\cos^2 x-1}}-2^{-5x},\quad x_0=\pi/2$ $f_3(x)=x^2+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x},\quad x_0=\infty$
16.	$f_1(x)=\sqrt[3]{x+2}-2,\quad x_0=6,$ $f_2(x)=\frac{3\cos 2x}{1-4^{-\sin 2x^2}},\quad x_0=0$ $f_3(x)=2x^2-3\sqrt{x^8-5x^2+1},\quad x_0=\infty$
17.	$f_1(x)=\ln(1+2x\sqrt{x}+3x^2),\quad x_0=0,$ $f_2(x)=\frac{1}{2^x-8},\quad x_0=3$ $f_3(x)=\operatorname{arctg}3x\cdot\sin\frac{1}{x+2x^2},\quad x_0=\infty$
18.	$f_1(x)=\frac{1}{\sin\pi x},\quad x_0=1,$ $f_2(x)=x\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad x_0=\infty$ $f_3(x)=\sin^2\sqrt{x}\cdot(\operatorname{tg}3x-2\operatorname{tg}5x),\quad x_0=0$

19.	$f_1(x)=e^{3x}-\cos 6x,\quad x_0=0,$ $f_2(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4x+3},\quad x_0=1$ $f_3(x)=\left(x^2+4\right)^2\cdot\sqrt{16x^4+1},\quad x_0=\infty$
20.	$f_1(x)=2x+3\arcsin^2 x-3\,\mathrm{arctg}\,4x,\quad x_0=0$ $f_2(x)=\dfrac{1}{\sin\pi x\cdot\mathrm{tg}\,3\pi x},\quad x_0=1$ $f_3(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}),\quad x_0=\infty$
21.	$f_1(x)=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1,\quad x_0=1,$ $f_2(x)=\left(x^2+5x\right)^2\cdot\mathrm{tg}\dfrac{1}{x+1},\quad x_0=\infty$ $f_3(x)=e^{x^2}+e^{-3x\sqrt{x}}+2\sin^2 x-2,\quad x_0=0$
22.	$f_1(x)=\dfrac{3\cos^2 x}{e^{2x}-\cos x},\quad x_0=0,$ $f_2(x)=\sqrt{x^2+3x-9}-1,\quad x_0=2$ $f_3(x)=\sqrt{x(x^3+2)}+2x^2,\quad x_0=\infty$
23.	$f_1(x)=\sqrt[4]{x^4+x^2}+x^3,\quad x_0=\infty,$ $f_2(x)=\ln(1+2\sin 2x+\mathrm{tg}^2\sqrt{x}),\quad x_0=0$ $f_3(x)=(x^3-1)^2\cdot\sqrt[3]{x-1},\quad x_0=1$
24.	$f_1(x)=(x^2+2x)(1-\sqrt{\cos x}),\quad x_0=0,$ $f_2(x)=\mathrm{ctg}\,8\pi x,\quad x_0=2$ $f_3(x)=\dfrac{3}{x^3}-2\arcsin\dfrac{1}{x^2},\quad x_0=\infty$
25.	$f_1(x)=(x+2)(e^{x^2-5}-e^{-1}),\quad x_0=-2,$ $f_2(x)=1-\sin\dfrac{\pi x}{2},\quad x_0=1$ $f_3(x)=2x^2-4\cdot\sqrt[3]{x^{12}-5x^3+1},\quad x_0=\infty$

26.	$f_1(x)=\ln(x^2+4)-\ln(x+10),\quad x_0=3,$ $f_2(x)=e^{-x^2}+\cos x-2,\quad x_0=0$ $f_3(x)=\sqrt[4]{9x^8+1}+3x^2,\quad x_0=\infty$
27.	$f_1(x)=2\sqrt{x}\cdot(1-\cos^3 2x),\quad x_0=0,$ $f_2(x)=\dfrac{x^2+5}{x^3-4x},\quad x_0=2$ $f_3(x)=(2x^3+4x)\cdot \mathrm{tg}\dfrac{1}{3\sqrt{x}},\quad x_0=\infty$
28.	$f_1(x)=\mathrm{tg}\,\pi x\cdot\sin 5\pi x,\quad x_0=1,$ $f_2(x)=\dfrac{1}{2\sin 3x-x+5\,\mathrm{tg}\,x^2},\quad x_0=0$ $f_3(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^4}+\mathrm{tg}\frac{2}{x^2},\quad x_0=\infty$
29.	$f_1(x)=\sin^2 x\cdot\left(\mathrm{tg}\,3x-2\,\mathrm{tg}\,5x\right),\quad x_0=0,$ $f_2(x)=\dfrac{x}{\ln x^2-\ln 4},\quad x_0=2$ $f_3(x)=2x^2\,\mathrm{arctg}\,x+3x^2\sin\dfrac{1}{x},\quad x_0=\infty$
30.	$f_1(x)=2^x-2^{-x}+3x,\quad x_0=0,$ $f_2(x)=\mathrm{ctg}^2\,\pi x,\quad x_0=1$ $f_3(x)=\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{tg}\dfrac{1}{x^5+2x^2},\quad x_0=\infty$

Задание 24. Вычислить пределы функций:

Вар	Задание	Вар	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$	2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$	4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\mathrm{tg}(\pi(2+x))}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin(2\pi(x+1/2))}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$

9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$	10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}2x}{\sin(2\pi(x+10))}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+5\pi/2)\mathrm{tg}x}{\arcsin 2x^2}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4\mathrm{arctg}3x}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos(\pi(x+1)/2)}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\mathrm{arctg}x}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(\pi(x+1))}{\ln(1+2x)}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$
19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(\pi(x+2))}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x}-1}$
21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$	22	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$
23	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin(\pi(x/2+1))}$	24	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$
25	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}{x^4}$	26	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$
27	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$	28	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$
29	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(\pi(1+x/2))}{\ln(x+1)}$	30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{3(\sqrt[3]{1+x}-1)}$

Задание 25. Вычислить пределы функций:

Вар	Задание	x_0	Вар	Задание	x_0
1	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$	1	2	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$	1
3	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$	π	4	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$	$\pi/4$
5	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1+\cos(x\pi)}{\mathrm{tg}^2(x\pi)}$	1	6	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}x}$	$\pi/2$

7	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}{(x-\pi)^2}$	π	8	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\mathrm{tg}(x\pi)}$	1
9	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$	π	10	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$	2π
11	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin 7(x\pi)}{\sin 8(x\pi)}$	2	12	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$	2
13	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin(x\pi)}$	1	14	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$	π
15	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\mathrm{tg}(x\pi)}$	2	16	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2^x-16}{\sin(x\pi)}$	4
17	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin(5x/2)\cos x}$	$\pi/2$	18	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln \mathrm{tg}x}{\cos 2x}$	$\pi/4$
19	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$	π	20	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin(2x\pi)}$	2
21	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-2^{4-x^2}}{\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2}}$	2	22	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$	1
23	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathrm{tg}(x\pi)}{x+2}$	-2	24	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$	π
25	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$	$\pi/3$	26	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathrm{arctg}(x^2-2x)}{\sin(3x\pi)}$	2
27	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-x^2}{\sin(x\pi)}$	1	28	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\cos((x\pi)/2)}{1-\sqrt{x}}$	1
29	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin(3x\pi)}$	1	30	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{tg}3x}$	π

Задание 26. Вычислить пределы функций:

Вар	Задание	x_0	Вар	Задание	x_0
1	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$	$\pi/2$	2	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin x\pi}-e^{-\sin 3x\pi}}$	1/2
3	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln(x-\sqrt[3]{2x-3})}{\sin(\pi x/2)-\sin((x-1)\pi)}$	2	4	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}2}{\sin\ln(x-1)}$	2
5	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^{\mathrm{tg}2x}-e^{-\sin 2x}}{\sin x-1}$	$\pi/2$	6	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}$	$\pi/6$

7	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(\sqrt{2x^2-3x-5}-\sqrt{1+x})}{\ln(x-1)-\ln(x+1)+\ln 2}$	3	8	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-2\pi)^2}{\mathrm{tg}(\cos x-1)}$	2π
9	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$	1/2	10	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\arcsin((x+2)/2)}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$	-2
11	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2^{\sin x\pi}-1}{\ln(x^3-6x-8)}$	3	12	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln\cos 2x}{(1-\pi/x)^2}$	π
13	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathrm{tg}\ln(3x-5)}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}$	2	14	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln\cos x}{3^{\sin 2x}-1}$	2π
15	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{1+\cos\pi x}$	1	16	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\cos(x/2)}{e^{\sin x}-e^{\sin 4x}}$	π
17	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin x\pi}-1}$	3	18	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}$	$\pi/3$
19	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\mathrm{tg} 2x}}{\ln(2x/\pi)}$	$\pi/2$	20	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathrm{tg}(e^{x+2}-e^{x^2-4})}{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}2}$	-2
21	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{2^x+7}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^3-1}$	1	22	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$	π
23	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x^3-\pi^3)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}$	π	24	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathrm{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e}$	-1
25	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$	π	26	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$	π
27	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a^{x^2-a^2}-1}{\mathrm{tg}\ln(x/a)}$	a	28	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(e^{\sqrt[3]{1-x^2}/2}-e^{\sqrt[3]{x+2}})}{\mathrm{arctg}(x+3)}$	-3
29	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln(\cos(x/a)+2)}{a^{a^2\pi^2/x^2-a\pi/x}-a^{a\pi/x-1}}$	πa	30	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathrm{tg}(3^{\pi/x}-3)}{3^{\cos(3x/2)}-1}$	π

Задание 27. Вычислить пределы функций:

Вар	Задание	Вар	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\mathrm{arctg}3x}$	2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-3x}$	4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$

5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\mathrm{arctg}x+x^3}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\mathrm{arctg}x-x^2}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{x}}{x-\sin 9x}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\mathrm{arctg}x-\sin x}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^{x}-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$	10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{x}}{\arcsin x+x^3}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{x}-2^{7x}}{\mathrm{tg}3x-x}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\mathrm{tg}2x-\sin x}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2\mathrm{tg}x-\mathrm{arctg}x}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 3x-\sin 5x}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{\mathrm{tg}x+x^3}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2\mathrm{tg}x-\sin x}$
19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^{x}}{\arcsin x-5x}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-\mathrm{tg}x}$
21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{5x}-2^{3x}}{\sin x-\mathrm{tg}x^3}$	22	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\mathrm{tg}2x}$
23	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$	24	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{\sin 3x-\mathrm{tg}2x}$
25	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{x}-2^{3x}}{\mathrm{arctg}2x-7x}$	26	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin x^2}$
27	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-\mathrm{tg}x}$	28	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 2x-\sin x}$
29	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+\mathrm{tg}x^2}$	30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$

Задание 28. Вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ с помощью замены бесконечно малых на эквивалентные.

Вар.	Задание 1.	Задание 2.	Задание 3.
1.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\ln(1+5\sin^2 x)}$	b) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$

2.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 2x)^2}{tg^2x-\sin^2 x}$	b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{tg(x\pi)}$	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{arctgx+x^3}$
3.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$	b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^x-5^{-2x}}{2\arcsin x-x}$.
4.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-3x}}{tg6x}$	b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^x}{\arcsin x+x^3}$.
5.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln(1+3x^2)}$	b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin 4x}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^{7x}}{tg3x-x}$.
6.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-2^{-x}}{\sin x}$	b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{tg^2x-\sin x}$.
7.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(x-x^4)}{\arcsin 5x}$	b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{tg\pi x}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2\pi x-arctgx}$.
8.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin\frac{x}{3})^3}{\ln(1+3x^2)}$	b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos x}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{tgx+x^3}$.
9.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+tg^2 0{,}2x)}{3^{5x^2}-1}$	b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 3x-\sin 5x}$.
10.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{tg3x}}{\sin x-1}$	b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-arctgx}{x^3}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$.
11.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1-arctg5x)}{\sin 3x}$	b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2tg2x-\sin 4x}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{-2x}}{\sin 3x-2x}$
12.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{tg5x}-1}{\ln(1+3x)}$	b) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{\pi}{2}+arctgx\right)$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$.
13.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{2^{\arcsin x}-1}$	b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{3x}}{\sin 3x-tg2x}$
14.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{\sqrt{\sin 2x}}-1}{arctg3x}$	b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-2^{3x}}{arctg2x-7x}$	c) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi-x}$
15.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos 5x}$	b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\pi x}{x+2}$	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$
16.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{tgx}-1}{\ln(1+\arcsin 2x)}$	b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{tg\sqrt{x}}$.	c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}$.

17.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}8x}{\ln(1+\sin 3x)}$	b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^{x}}{\arcsin 3x-5x}$.
18.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$	b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-2^{4-x^2}}{2\left(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2}\right)}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\mathrm{tg}2x}$.
19.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\mathrm{tg}3x}-1}{\ln(1+\sqrt{x})}$	b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(9-2x^2\right)}{\sin(x2\pi)}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-\mathrm{tg}x}$.
20.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{3x}-e^{x}}$	b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(7x\pi)}{\sin(8x\pi)}$	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$
21.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2x-\sin^2 x}{x^4}$	b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\arccos x+x^3}$
22.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{\ln(1+5x)}$	b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos(x\pi)}{\mathrm{tg}^2(x\pi)}$	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$
23.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2x-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$	b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$
24.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\mathrm{tg}0{,}5x}$	b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\mathrm{arctg}3x}$	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$
25.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$	b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$	c) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)^2}{e^{\mathrm{six}\pi}-e^{-\sin 3x\pi}}$
26.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x^2}{2^{\sin^3 x}-1}$	b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln \mathrm{tg}x}{\cos 2x}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2\mathrm{tg}x-\sin x}$.
27.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\ln(1+\mathrm{tg}^2x)}$	b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^{x}}{\arcsin 3x-5x}$.
28.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2}-e^{x^2}}{\ln(1+5\sin^2 x)}$	b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}x}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\mathrm{arctg}x-x^2}$.
29.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-\mathrm{tg}x}}{\sin^2 x}$	b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{arctg}\left(x^2-2x\right)}{\sin(x3\pi)}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$.
30.	a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$	b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2x}{(x-\pi)^4}$.	c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2x}{x-\sin 9x}$.

Задание 29. Вычислить пределы функций:

Вар	Задание	x_0	Вар	Задание	x_0
1	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$	0	2	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$	0
3	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$	-1	4	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}a}{\ln x-\ln a}$	*a*
5	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2}$	0	6	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$	0
7	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$	0	8	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2(e^x-e^{-x})}{e^{x^3+1}-e}$	0
9	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$	$\pi/3$	10	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$	1
11	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x-\cos x}{\ln\mathrm{tg}x}$	$\pi/4$	12	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$	*b*
13	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-\cos 2x+\mathrm{tg}^2 x}{x\sin 3x}$	0	14	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$	0
15	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}$		16	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-x}{\log_2 x}$	1
17	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\mathrm{tg}x}$	0	18	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2^x-2}{\ln x}$	1
19	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$		20	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$	0
21	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$		22	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$	0
23	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin\pi x}$	3	24	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2-3\sin x+1}$	$\pi/6$
25	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$	10	26	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln(1+x\sqrt{1+xe^x})}$	0
27	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$	0	28	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin bx-\sin ax}{\ln(\mathrm{tg}(\pi/4+ax))}$	0
29	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$	$\pi/2$	30	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\log_3 x-1}{\mathrm{tg}\pi x}$	3

Задание 30. Вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, используя второй замечательный предел.

Вар.	Задание.	Вар.	Задание.
1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+2}\right)^{0,5x^2}$	2.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{\frac{x^2-4}{x}}$
3.	$\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\cos x)^{2tgx}$	4.	$\lim\limits_{x\to\pi/2}(1-\cos x)^{2tgx}$
5.	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$	6.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$
7.	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$	8.	$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin^2 2x)^{\frac{1}{x^2}}$
9.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^{\frac{x^2-4}{x}}$	10.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$
11.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{\frac{x^2-3}{x}}$	12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{5x^2}$
13.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x}$	14.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-4}\right)^{2x}$
15.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+5}\right)^{x+3}$	16.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+2}$
17.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$	18.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$
19.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+3tgx)^{\frac{20}{x}}$	20.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$
21.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{x^2}}$	22.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$
23.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+2tgx)^{\frac{1}{3\sin x}}$	24.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{2x+1}$
25.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$	26.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$
27.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2x)^{ctg^2x}$	28.	$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 0,5x)^{0,5ctgx}$
29.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$	30.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x}$

Задание 31. Вычислить пределы функций:

Вар	Задание	Вар	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln(1+x^3))^{3/(x^2\arcsin x)}$	2	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{1/x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{1/x^2}$	4	$\lim\limits_{x\to 0}(2-3^{\mathrm{arctg}^2\sqrt{x}})^{2/\sin x}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos ax}{1+\sin x\cos bx}\right)^{\mathrm{ctg}^3 x}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{1/\sin^2 3x}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln(1+\sqrt[3]{x}))^{x/\sin^4\sqrt[3]{x}}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}})^{3/x}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x\pi))^{1/(x\sin(x\pi))}$	10	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 3x)^{1/\ln\cos x}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}(\dfrac{\pi}{4}-x)\right)^{\mathrm{ctg}x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin^2 x)^{1/\ln(1+x^2\pi)}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}(2-5^{\arcsin x^3})^{(\mathrm{cosec}^2 x)/x}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{1/\ln(1+x^2)}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{\sin x})^{\mathrm{ctg}(x\pi)}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\ln(1+x^2)}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{x^2})^{1/\ln(1+\mathrm{tg}^2((x\pi)/3))}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}(3-2\cos x)^{-\mathrm{cosec}^2 x}$
19	$\lim\limits_{x\to 0}(2-3^{\sin^2 x})^{1/\ln\cos x}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{1/x^2}$
21	$\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\mathrm{ctg}^2 x}$	22	$\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{2}{\cos x}\right)^{\mathrm{cosec}^2 x}$
23	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos 2x}{1+\sin x\cos 3x}\right)^{1/\sin x^3}$	24	$\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{x^2})^{1/(1-\cos(x\pi))}$
25	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln\dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}^6(\sqrt{x})\right)^{1/x^3}$	26	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\mathrm{tg}x\cos 2x}{1+\mathrm{tg}x\cos 5x}\right)^{1/x^3}$
27	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x3^x}{1+x7^x}\right)^{1/\mathrm{tg}^2 x}$	28	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}^2 x)^{1/\ln(1+3x^2)}$
29	$\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln\cos x)^{1/\mathrm{tg}^2 x}$	30	$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin^2(x/2))^{1/\ln(1+\mathrm{tg}^2 3x)}$

Задание 32. Вычислить пределы функций:

Вар	Задание	Вар	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$	2	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{2/(x+2)}$	4	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2(\pi/4+x)}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x+3}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\cos(x/\pi)^{1+x}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{x/(x+2)}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{tg}4x}{x}\right)^{2+x}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^3}-1}{x^2}\right)^{(8x+3)/(1+x)}$	10	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{6/(1+x)}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}(x+\frac{\pi}{3})\right)^{x+2}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\cos x^4}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}(\sin(x+2))^{3/(3+x)}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^{2x}-1}{x}\right)^{x+1}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^4+5}{x+10}\right)^{4/(x+2)}$
19	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{11x+8}{12x+1}\right)^{\cos^2 x}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3+1}{x^3+8}\right)^{2/(x+1)}$
21	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)^{3/(x+8)}$	22	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$
23	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{2/(x+5)}$	24	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{arctg}3x}{x}\right)^{x+2}$
25	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3+8}{3x^2+10}\right)^{x+2}$	26	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x^2}{\sin x}\right)^{1/(x+6)}$
27	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-x)\right)^{(e^x-1)/x}$	28	$\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\frac{5}{\cos x}\right)^{\mathrm{tg}^2 x}$
29	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+8x}{2+11x}\right)^{1/(x^2+1)}$	30	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x}\right)^{2x+1}$

Задание 33. Вычислить пределы функций:

Вар	Задание	x_0	Вар	Задание	x_0
1	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}$	1	2	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$	a
3	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}$	-1	4	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2}\right)^{1/(x-2)}$	2
5	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{2x-7}{x+1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-2)}$	8	6	$\lim\limits_{x\to x_0}(\mathrm{tg}x)^{1/\cos(3\pi/4-x)}$	$\pi/4$
7	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt[5]{x}-1)}$	1	8	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2a}}$	a
9	$\lim\limits_{x\to x_0}(\cos x)^{\mathrm{ctg}2x/\sin 3x}$	2π	10	$\lim\limits_{x\to x_0}(\cos x)^{1/\sin^2 2x}$	2π
11	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{6-x}{3}\right)^{\mathrm{tg}(\pi x/6)}$	3	12	$\lim\limits_{x\to x_0}(\cos x)^{\mathrm{ctg}x/\sin 4x}$	4π
13	$\lim\limits_{x\to x_0}(3-2x)^{\mathrm{tg}(\pi x/2)}$	1	14	$\lim\limits_{x\to x_0}(\cos x)^{5/(\mathrm{tg}5x\cdot\sin 2x)}$	4π
15	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{9-2x}{3}\right)^{\mathrm{tg}(\pi x/6)}$	3	16	$\lim\limits_{x\to x_0}(\sin x)^{6\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}3x}$	$\pi/2$
17	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(2e^{x-1}-1\right)^{x/(x-1)}$	1	18	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^{1/(x-\pi/2)}$	$\pi/2$
19	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(2e^{x-1}-1\right)^{(3x-1)/(x-1)}$	1	20	$\lim\limits_{x\to x_0}(1+\cos 3x)^{\sec x}$	$\pi/2$
21	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(2e^{x-2}-1\right)^{(3x+2)/(x-2)}$	2	22	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{2-x}{x}\right)^{1/\ln(2-x)}$	1
23	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$	1	24	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\mathrm{ctg}\frac{x}{2}\right)^{1/\cos x}$	$\pi/2$
25	$\lim\limits_{x\to x_0}(2-x)^{\frac{\sin(\pi x/2)}{\ln(2-x)}}$	1	26	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{1/(x-3)}$	3
27	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{x+1}{2x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$	1	28	$\lim\limits_{x\to x_0}(\sin x)^{18\sin x/\mathrm{ctg}x}$	$\pi/2$
29	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$	1	30	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\mathrm{ctg}\frac{x}{4}\right)^{1/\cos(x/2))}$	π

Задание 34. Вычислить пределы функций:

Вар	Задание	x_0	Вар	Задание	x_0
1	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\ln x-1}{x-e}\right)^{\sin(\frac{\pi x}{2e})}$	e	2	$\lim\limits_{x\to x_0}(tgx)^{ctgx}$	$\pi/4$
3	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\ln tgx}{1-ctgx}\right)^{1/(x+\pi/4)}$	$\pi/4$	4	$\lim\limits_{x\to x_0}(\sin x)^{3/(1+x)}$	2
5	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\sin 3\pi x}{\sin \pi x}\right)^{\sin^2(x-2)}$	2	6	$\lim\limits_{x\to x_0}(\sin x)^{(6x)/\pi}$	$\pi/6$
7	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\sin(x\pi)}$	3	8	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x^2)/(1-x)}$	1
9	$\lim\limits_{x\to x_0}(1+e^x)^{\frac{\sin(x\pi)}{1-x}}$	1	10	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{tg(9x\pi)}{\sin(4x\pi)}\right)^{x/(x+1)}$	1
11	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\arcsin(x-3)}{\sin(3x\pi)}\right)^{x^2-8}$	3	12	$\lim\limits_{x\to x_0}(\sin 2x)^{\frac{x^2-\pi^2/16}{x-\pi/4}}$	$\pi/4$
13	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(arctg\frac{x-3/4}{(x-1)^2}\right)^{x+1}$	1	14	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(ctg\frac{x}{4}\right)^{\sin(x-\pi)}$	π
15	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\right)^{x^2/a^2}$	a	16	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\right)^{1/x}$	2
17	$\lim\limits_{x\to x_0}(\sin x+\cos x)^{1/tgx}$	$\pi/4$	18	$\lim\limits_{x\to x_0}(tg2x)^{\sin(\pi/8+x)}$	$\pi/8$
19	$\lim\limits_{x\to x_0}(\arcsin x)^{tg(x\pi)}$	1	20	$\lim\limits_{x\to x_0}(x+\sin x)^{\sin x+x}$	π
21	$\lim\limits_{x\to x_0}(\ln^2 ex)^{1/(x^2+1)}$	1	22	$\lim\limits_{x\to x_0}(\sqrt{x}+1)^{\pi/arctgx}$	1
23	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)^{1/x^2}$	1	24	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{e^{\sin(x\pi)}-1}{x-1}\right)^{x^2+1}$	1
25	$\lim\limits_{x\to x_0}(\cos(x\pi))^{tg(x-2)}$	2	26	$\lim\limits_{x\to x_0}(\arcsin x+\arccos x)^{1/x}$	1/2
27	$\lim\limits_{x\to x_0}(\cos x+1)^{\sin x}$	$\pi/2$	28	$\lim\limits_{x\to x_0}(\sqrt[3]{x}+x-1)^{\sin(\pi x/4)}$	1
29	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}\right)^{1/(2-x)}$	1	30	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1+\cos(x\pi)}{tg^2(x\pi)}\right)^{x^2}$	1

Задание 35. Вычислить пределы функций:

Вар	Задание	Вар	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4\cos 3x + x\,\mathrm{arctg}(1/x)}$	2	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\sqrt{3\sin x + (2x-\pi)\sin\frac{x}{2x-\pi}}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-\sin n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^3-7}}$	4	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x\cos(1/x)+\lg(2+x)}{\lg(4+x)}$
5	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{1/n}+\sin\frac{n}{n^2+1}\cdot\cos n}{1+\cos(1/n)}$	6	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{2+n^5}-\sqrt{2n^3+3}}{(n+\sin n)\sqrt{7n}}$
7	$\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}x}+(4x-\pi)\cos\frac{x}{4x-\pi}}{\lg(2+\mathrm{tg}x)}$	8	$\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n^2+1}\,\mathrm{arctg}\frac{n}{n^2+1})$
9	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-\sqrt{3n^5-7}}{(n^2-n\cos n+1)\sqrt{n}}$	10	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\sin n+\sqrt{n-1}}{n+\sqrt{n+1}}$
11	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-\cos n)\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1}-1}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\ln(2+\sqrt{\mathrm{arctg}x\cdot\sin(1/x)})$
13	$\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{\frac{1+\cos(x\pi)}{4+(x+2)\sin(x/(x+2))}}$	14	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^4-3}+\sin n}$
15	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+\cos n}+\sqrt{3n^2+2}}{\sqrt[5]{n^6+1}}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{(e^{\sin x}-1)\cos(1/x)+4\cos x}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\mathrm{arctg}x\cdot\sin^2(1/x)+5\cos x}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4\cos x+\sin(1/x)\ln(1+x)}$
19	$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2\cos^2 x+(e^x-1)\sin(1/x)}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+\ln(1+x)\sqrt{2+\cos(1/x)}}{2+e^x}$
21	$\lim\limits_{x\to 0}\ln((e^{x^2}-\cos x)\cos(1/x)+$ $+\,\mathrm{tg}(x+\pi/3))$	22	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+\ln(e+x\sin(1/x))}{\cos x+\sin x}$
23	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos 2(x\pi)}{2+(e^{\sqrt{x-1}}-1)\mathrm{arctg}((x+2)/(x-1))}$	24	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}x\,\mathrm{arctg}(1/x)+3}}{2-\lg(1+\sin x)}$
25	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(1+x)}{(2+\cos(1/x))\ln(1+x)+2}$	26	$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\mathrm{tg}(x+2)+\sin\sqrt{4-x^2}\cos\frac{x+2}{x-2}}$
27	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{2+\cos x\cdot\sin(2/(2x-\pi))}{3+2x\sin x}$	28	$\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{tg}(\cos x+\sin\frac{x-1}{x+1}\cos\frac{x+1}{x-1})$
29	$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x(2+\sin(1/x))+4\cos x}$	30	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin x+\sin\pi x\,\mathrm{arctg}((1+x)/(1-x))}{1+\cos x}$

Задание 36. Доказать, что функция $\mathbf{f(x)}$ непрерывна в точке $\mathbf{x_0}$ (найти $\boldsymbol{\delta(\varepsilon)}$).

Вар.	Задание.	Вар.	Задание.
1.	$f(x)=5x^2-1,\ \ x_0=6.$	2.	$f(x)=4x^2-2,\ \ x_0=5.$
3.	$f(x)=3x^2-3,\ \ x_0=4.$	4.	$f(x)=3x^2-3,\ \ x_0=4.$
5.	$f(x)=-2x^2-5,\ \ x_0=2.$	6.	$f(x)=-3x^2-6,\ \ x_0=1.$
7.	$f(x)=-4x^2-7,\ \ x_0=1.$	8.	$f(x)=-5x^2-8,\ \ x_0=2.$
9.	$f(x)=-5x^2-9,\ \ x_0=3.$	10.	$f(x)=-4x^2+9,\ \ x_0=4.$
11.	$f(x)=-3x^2+8,\ \ x_0=5.$	12.	$f(x)=-2x^2+7,\ \ x_0=6.$
13.	$f(x)=2x^2+6,\ \ x_0=7.$	14.	$f(x)=3x^2+5,\ \ x_0=8.$
15.	$f(x)=4x^2+4,\ \ x_0=9.$	16.	$f(x)=5x^2+3,\ \ x_0=8.$
17.	$f(x)=5x^2+1,\ \ x_0=7.$	18.	$f(x)=4x^2-1,\ \ x_0=6.$
19.	$f(x)=3x^2-2,\ \ x_0=5.$	20.	$f(x)=2x^2-3,\ \ x_0=4.$
21.	$f(x)=-2x^2-4,\ \ x_0=3.$	22.	$f(x)=-3x^2-5,\ \ x_0=2.$
23.	$f(x)=-4x^2-6,\ \ x_0=1.$	24.	$f(x)=-5x^2-7,\ \ x_0=1.$
25.	$f(x)=-4x^2-8,\ \ x_0=2.$	26.	$f(x)=-3x^2-9,\ \ x_0=3.$
27.	$f(x)=-2x^2+9,\ \ x_0=4.$	28.	$f(x)=2x^2+8,\ \ x_0=5.$
29.	$f(x)=3x^2+7,\ \ x_0=6.$	30.	$f(x)=4x^2+6,\ \ x_0=7.$

Задание 37. Найти точки разрыва функции **f(x)** и определить их характер. Построить эскиз графика функции вблизи точек разрыва.

Вар.	Задание	Вар.	Задание.
1.	$f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x}}, x<1\\ x+1, x\ge 1\end{cases}$	2.	$f(x)=e^{ctgx}$
3.	$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, \lvert x\rvert\le 1\\ \pi/4, \lvert x\rvert>1\end{cases}$	4.	$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{\ln x}, x>0\\ 1, x\le 0\end{cases}$
5.	$f(x)=\begin{cases}\frac{tg\pi x}{\arcsin x}, \lvert x\rvert\le 1\\ 0, \lvert x\rvert>1\end{cases}$	6.	$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{\ln x}}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$
7.	$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\ln(x+1)}, x>-1\\ \frac{1}{\sin\pi x}, x<-1\end{cases}$	8.	$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}, x<0\\ e^{\frac{1}{x}}, x>0\end{cases}$
9.	$f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{2x-\pi}, \lvert x\rvert\le\pi\\ -\frac{1}{x}, \lvert x\rvert>\pi\end{cases}$	10.	$f(x)=e^{\frac{1}{x-x^2}}$
11.	$f(x)=\frac{2x-\pi}{\cos x}$	12.	$f(x)=e^{\frac{1}{\cos x}}$
13.	$f(x)=\frac{x}{\ln(x^2-x+1)}$	14.	$f(x)=\frac{x^2-\pi^2}{\sin x}$
15.	$f(x)=\begin{cases}\frac{4^x-2}{2x-1}, x\le 1\\ \sqrt{x+3}, x>1\end{cases}$	16.	$f(x)=\frac{1}{\ln(x-x^2+1)}$

17.	$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{\lvert x\rvert}}, \lvert x\rvert<1 \\ \frac{x}{e}, \lvert x\rvert\ge 1 \end{cases}$	18.	$f(x)=\frac{x}{\sin \pi x}$
19.	$f(x)=\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2-x}$	20.	$f(x)=e^{tgx}$
21.	$f(x)=\frac{(x-1)^2}{e^{x^2}-e}$	22.	$f(x)=e^{\frac{1}{x^3-x}}$
23.	$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \lvert x\rvert\le 1 \\ \frac{-x}{e}, \lvert x\rvert>1 \end{cases}$	24.	$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{\ln(x-1)}, x>1 \\ \frac{1}{\sin \pi x}, x<1 \end{cases}$
25.	$f(x)=\begin{cases} arctg^{\frac{1}{x}}, x\le 2 \\ x, x>2 \end{cases}$	26.	$f(x)=\frac{2x-\pi}{\sin x}$
27.	$f(x)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x^2-1}}, \lvert x\rvert<2 \\ \sqrt[3]{x}, \lvert x\rvert\ge 2 \end{cases}$	28.	$f(x)=\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x^3-x}$
29.	$f(x)=e^{\frac{1}{x^2-x}}$	30.	$f(x)=\begin{cases} \frac{x^3-1}{\ln x}, x>0 \\ 1, x\le 0 \end{cases}$

Задание 38. Исследовать функции $\mathbf{f_1(x), f_2(x)}$ на непрерывность, установить тип точек разрыва и сделать графики функций в окрестности точек разрыва.

Вариант	Задание.
1.	$f_1(x)=\begin{cases}\sin x, \ x<0,\\ x^3, \ 0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{2-x}, \ x>2\end{cases} \qquad f_2(x)=\dfrac{\lvert x+2\rvert}{x+2}+x$
2.	$f_1(x)=\begin{cases}4-x^2, \ x<0\\ 4e^x, \ 0<x\le 4\\ \dfrac{1}{x-4}, \ x>4\end{cases} \qquad f_2(x)=x+2\dfrac{\lvert x-2\rvert}{x-2}$
3.	$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+3}, \ x<-3\\ x+3, \ -3\le x\le 0,\\ x^2, \ x>0\end{cases} \qquad f_2(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$
4.	$f_1(x)=\begin{cases}x^2+2x, \ x<0\\ -x^3, \ 0<x<2,\\ x+3, \ x\ge 2\end{cases} \qquad f_2(x)=\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$
5.	$f_1(x)=\begin{cases}e^x, \ x<0\\ x+1, \ 0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2}, \ x>2\end{cases} \qquad f_2(x)=\dfrac{\cos x-1}{x^2}$
6.	$f_1(x)=\begin{cases}0, \ x<-1\\ \lvert x\rvert, \ \lvert x\rvert\le 1\\ \ln(x-1), \ x>1\end{cases}, \qquad f_2(x)=\dfrac{1}{5+2^{\frac{1}{x}}}$
7.	$f_1(x)=\begin{cases}3, \ x<-3\\ \lvert x\rvert, \ -3\le x\le 3,\\ 6-x, \ x>3\end{cases} \qquad f_2(x)=\dfrac{1}{5+3^{\frac{1}{x}}}$

8.	$f_1(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ \frac{1}{x^2}, & 0<x<\frac{1}{2} \\ 4, & x>\frac{1}{2} \end{cases}, \qquad f_2(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}$
9.	$f_1(x)=\begin{cases} \sin x, & x\le 0 \\ \cos x, & 0<x\le\pi \\ \frac{1}{x-\pi}, & x>\pi \end{cases}, \qquad f_2(x)=\frac{x^2-x^3}{\lvert x-1\rvert}$
10.	$f_1(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2 \\ x^2-6x+11, & 2<x<4 \\ 2x-5, & x>4 \end{cases}, \qquad f_2(x)=2^{\frac{x}{x^2-1}}$
11.	$f_1(x)=\begin{cases} -x, & x\le -1 \\ \frac{1}{x}, & -1<x<0 \\ -2x^2+x, & x\ge 0 \end{cases}, \qquad f_2(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$
12.	$f_1(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x<-2 \\ 0, & -2\le x<0 \\ \sin x, & 0<x<\infty \end{cases} \qquad f_2(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$
13.	$f_1(x)=\begin{cases} -x^2, & x<0 \\ \operatorname{tg}x, & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ x, & x\ge\frac{\pi}{2} \end{cases}, \qquad f_2(x)=\frac{e^{4x}-1}{x}$
14.	$f_1(x)=\begin{cases} 3x+1, & x<1 \\ 2x+2, & 1<x\le 3 \\ \lg(x-3), & x>3 \end{cases} \qquad f_2(x)=2^{x-\frac{1}{x}}$
15.	$f_1(x)=\begin{cases} 3, & x<-3 \\ \lvert x\rvert, & -3<x\le 3 \\ \ln(x-3), & x>3 \end{cases} \qquad f_2(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x+3}$

16.	$f_1(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ \cos x, & 0<x<\pi\\ \frac{\pi}{x}, & x\ge\pi\end{cases}\qquad f_2(x)=\frac{1}{x^2-4}$
17.	$f_1(x)=\begin{cases}x^3, & -\infty<x<0\\ x^2+1, & 0\le x<4\\ \lg(x-4), & x>4\end{cases}\qquad f_2(x)=x+\frac{x+2}{\lvert x+2\rvert}$
18.	$f_1(x)=\begin{cases}2, & x<-2\\ \lvert x\rvert, & \lvert x\rvert<2\\ \frac{1}{x-2}, & x>2\end{cases}\qquad f_2(x)=\frac{2x}{\sin x}$
19.	$f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1}, & x<-1\\ \lvert x\rvert, & -1\le x\le 1\\ 1-x^2, & x>1\end{cases}\qquad f_2(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$
20.	$f_1(x)=\begin{cases}\lvert x\rvert, & x\le 2\\ \lg(x-2), & x>2\end{cases}\qquad f_2(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$
21.	$f_1(x)=\begin{cases}4^x, & x<1\\ 5-x^2, & 1<x\le 4\\ \lg(x-4), & x>4\end{cases}\qquad f_2(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x+2}$
22.	$f_1(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0\\ \frac{1}{x}, & 0<x<5\\ 3x+4, & x\ge 5\end{cases}\qquad f_2(x)=\frac{\pi}{2}\frac{(x-1)}{\lvert x-1\rvert}+\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$
23.	$f_1(x)=\begin{cases}-1, & x\le-\pi/2\\ \operatorname{tg}x, & -\pi/2<x<0\\ x, & x>0\end{cases}\qquad f_2(x)=\frac{\sin 4x}{\lvert x\rvert}$

24.	$f_1(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^x, & x<0\\ x+1, & 0<x\le 3\\ \lg(x-3), & x>3\end{cases}$ $\quad f_2(x)=\dfrac{1}{1+6^{\frac{1}{x}}}$
25.	$f_1(x)=\begin{cases}x-x^2, & -\infty<x\le 1\\ \lg(x-1), & x>1\end{cases}$ $\quad f_2(x)=x+\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$
26.	$f_1(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x<0\\ \cos x, & 0<x\le \pi/2\\ \frac{1}{x-\pi/2}, & x>\pi/2\end{cases}$ $\quad f_2(x)=\dfrac{1}{2+3^{-1/x}}$
27.	$f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+2}, & x<-2\\ \lvert x\rvert, & \lvert x\rvert<2\\ x, & x>2\end{cases}$ $\quad f_2(x)=\dfrac{\sin x}{\lvert x\rvert}$
28.	$f_1(x)=\begin{cases}x^2-x, & x<1\\ 2-x, & 1<x\le 4\\ \frac{1}{x-4}, & x>4\end{cases}$ $\quad f_2(x)=\dfrac{\mathrm{tg}\,3x}{x}$
29.	$f_1(x)=\begin{cases}3-x, & x\le 3\\ 8x-x^2-15, & 3<x\le 5\\ 2x-12, & x>5\end{cases}$ $\quad f_2(x)=\dfrac{x}{\ln x}$
30.	$f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<0\\ 3x+1, & 0\le x<2\\ 4-x^2, & x\ge 2\end{cases}$ $\quad f_2(x)=\dfrac{e^{3x}-1}{x}$

Задание 39. Найти точки разрыва функции **f(x)** и определить их характер. Построить эскиз графика функции.

Вар.	Задание	Вар.	Задание.
2.	$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$	2.	$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$
3.	$f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$	4.	$f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{3x-3}$
5.	$f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}$	6.	$f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-3x-4}$
7.	$f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$	8.	$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$
9.	$f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x-10}$	10.	$f(x)=\dfrac{5-x}{x^2-3x-10}$
11.	$f(x)=\dfrac{3x^2-12}{x-2}$	12.	$f(x)=\dfrac{3+x}{x^2-x-12}$
13.	$f(x)=\dfrac{1+x}{x^2-3x-4}$	14.	$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$
15.	$f(x)=\dfrac{x-6}{x^2-3x-18}$	16.	$f(x)=\dfrac{x-4}{2x^2-3x-20}$
17.	$f(x)=\dfrac{16-x^2}{x+4}$	18.	$f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-3x-18}$
19.	$f(x)=\dfrac{x^2+4x-21}{x-3}$	20.	$f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{4-2x}$
21.	$f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-3x-4}$	22.	$f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$
23.	$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$	24.	$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$
25.	$f(x)=\dfrac{2-x}{2x^2-3x-2}$	26.	$f(x)=\dfrac{25-x^2}{x+5}$
27.	$f(x)=\dfrac{3+x}{2x^2+x-15}$	28.	$f(x)=\dfrac{4+2x}{2x^2-3x-14}$
29.	$f(x)=\dfrac{x^2-3x-18}{x+3}$	30.	$f(x)=\dfrac{x-7}{x^2-5x-14}$